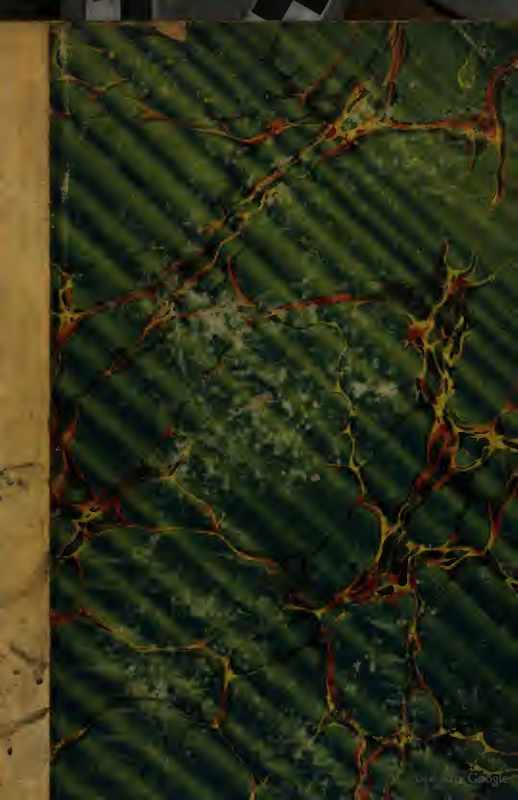
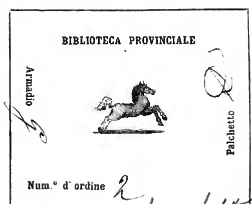



FONDO PROVINCIA


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine



EXPOSITION GÉNÉRALE

DES

CONNAISSANCES HUMAINES





1696. — Paris. — Imprimerie de H. Carion, rue Bonaparte, 64.

EXPOSITION GÉNÉRALE DES CONNAISSANCES HUMAINES

PLAN RAISONNÉ



ET

TRAITÉ GÉNÉRAL DE CALCUL

(*ARITHMOLOGIE*)

PAR

C. HERTZ



PARIS
LIBRAIRIE ARTISTIQUE
RUE BONAPARTE, 18

1868

RÈGNE DES CONNAISSANCES IMPERSONNELLES

LIVRE PREMIER

SCIENCES EXACTES

PREMIÈRE SÉRIE

ARITHMOLOGIE.

INTRODUCTION

Pour connaître les choses il faut d'abord les discerner, et ce discernement ne peut s'opérer qu'en les ramenant à des conceptions abstraites de l'esprit.

On dit qu'une conception est abstraite quand notre attention, en s'arrêtant sur un objet, ne s'attache qu'à un seul phénomène, sans tenir compte des autres. Lorsque nous ne considérons dans une fleur que sa couleur sans nous préoccuper de sa forme, de son parfum, de son espèce, nous faisons abstraction de toutes les propriétés de la fleur à l'exception d'une seule qui est commune à une infinité de choses. Si la fleur est rouge, l'idée abstraite de la couleur rouge s'étendra à toutes les choses qui sont rouges, aux autres fleurs de même couleur, à l'insecte appelé cochenille, aux globules du sang humain, aux étoffes de pourpre, etc. Ensuite nous discernerons différentes sortes de rouge, le garance, le pourpre, le carmin, etc.

Toute abstraction est donc une généralisation qui ramène les choses les

plus disparates à une perception commune, unique au premier abord, mais dans laquelle nous ne tardons pas à introduire des divisions, des nuances, des modes, etc.

Les mathématiques et la physique ne procèdent que par des abstractions ; les mathématiques par des abstractions relatives au temps, à l'espace, au mouvement; la physique par des abstractions relatives aux impressions générales qui nous parviennent directement ou indirectement par les sens.

L'abstraction mathématique est une opération de notre intelligence. Elle n'est pas dans les choses, mais dans les procédés que nous employons pour les évaluer.

Lors donc que nous avons dit : « le nombre est l'expression abstraite des durées », ce ne sont pas les durées particulières aux choses ou aux êtres que les sciences exactes considèrent, mais les intervalles de temps qui séparent les constatations que nous en faisons. Quand nous comptons abstraitement : « deux, trois, quatre, etc. », si l'on demande : « quatre quoi? » il faut répondre : « quatre fois le temps que notre esprit a mis à faire quatre constatations semblables » et non : « quatre fois rien », comme l'enseignent à leur première page beaucoup de traités d'arithmétique.

Cela est si vrai que lorsque nous exprimons des nombres concrets, c'est-à-dire appliqués à des choses définies « quatre tables », par exemple, l'idée de nombre ne s'attache pas à l'idée concrète de *table*, puisque « quatre tables » peut signifier à la rigueur « quatre fois la même table. »

C'est précisément ce que fait l'arithmétique quand elle énonce un nombre quelconque, *quatre* par exemple; elle n'entend pas dire quatre *unités*, car l'unité en elle-même est absolue et ne se comprend guère à l'état de pluralité, mais quatre fois la constatation de l'unité, c'est-à-dire quatre actes de notre esprit opérés en un instant, ou un même acte répété à quatre instants différents.

Les nombres s'appliquent indifféremment à toutes les constatations que nous pouvons faire ; mais leur théorie spéciale peut être ramenée à la théorie des durées qui fournissent une donnée toujours présente à l'esprit, et permettent de pénétrer tout particulièrement, dans l'intelligence de l'arithmologie.

La théorie des nombres, une fois établie sur la théorie des durées, pourra s'étendre aux constatations de toute nature; appliquée aux grandeurs, c'est-à-dire aux durées qu'un mouvement de vitesse uniforme emploie pour parcourir une direction quelconque, elle constitue la théorie arithmologique des formes; appliquée à la théorie combinée des grandeurs parcourues avec des

vitesses différentes, elle constitue la théorie arithmologique des mouvements, etc. On voit ici que l'idée de durées successives ou simultanées est toujours au fond de tout nombre.

Ces considérations, un peu nouvelles, vont devenir lumineuses à mesure que nous allons pénétrer dans leur exposition. Mais il importe, au préalable, d'indiquer les divisions générales que nous avons introduites dans cette exposition même.

Nous allons donner à l'exposition des sciences d'abstraction (mathématiques et physique) un développement assez étendu dans ce premier volume, d'abord parce que ces sciences servent de contrôle à toutes les autres sciences impersonnelles qui leur ont emprunté un essor tout moderne, ensuite parce que le lecteur ne peut être abandonné à lui-même dans les principales déductions des lois qu'elles établissent.

L'*Arithmologie* est la science générale du calcul fondée sur les opérations de l'esprit humain dans le temps. Elle a pour objet la détermination des quantités de toute nature qui, en fin de compte, peuvent être ramenées à des nombres. Elle comprend les sciences connues sous le nom d'arithmétique et d'algèbre.

L'arithmétique est la science des quantités exprimées en chiffres, c'est-à-dire des *nombres*. Elle a pour principal objet la réalisation des calculs numériques.

Toutes les théories de l'arithmétique, et quelques autres qu'on a l'habitude d'introduire dans l'algèbre, constituent pour nous une seule théorie que nous appellerons *Théorie des nombres*, et qui se compose de trois parties :

La construction des nombres.

L'analyse des nombres.

Les relations des nombres.

La construction des nombres se fonde sur sept espèces d'opérations :

La construction successive des nombres : par voie de succession, numération.

La construction simultanée des nombres par voie d'agrégation : addition, multiplication, puissances ou graduation (opérations synthétiques).

La construction simultanée des nombres par voie de désagrégation : soustraction, division, racines ou extraction (opérations analytiques).

C'est à quatre de ces procédés qu'on a donné le nom de *quatre règles :*

addition, soustraction, multiplication et division, parce que ce sont ceux qu'on emploie le plus fréquemment.

L'analyse des nombres a pour point de départ les trois dernières opérations, elle a pour but de rechercher les cas où le calcul conduit à des quantités numériques positives ou négatives, déterminées ou indéterminées, réelles ou imaginaires. Elle comprend non-seulement les théories connues sous le titre de divisibilité des nombres, mais aussi plusieurs théories particulières à l'algèbre et qui y sont très-obscures. Ces théories deviennent intelligibles quand on considère l'arithmologie comme une spéculation relative aux durées et quand on les introduit sous ce point de vue dans les faits numériques.

Les relations des nombres sont déduites de leur comparaison, de leur dépendance mutuelle, et des abréviations qu'elles introduiseut dans les calculs les plus compliqués. Nous étudierons ici non-seulement les proportions numériques, les progressions, et la théorie arithmétique des logarithmes, mais aussi les séries, les arrangements, les combinaisons et les permutations qu'on expose dans l'algèbre d'une manière incidente en vue de cas spéciaux.

L'algèbre (de l'arabe *al adjabber*, la consolidation) est la science des quantités exprimées par des symboles, signes, chiffres ou lettres quelconques. Les quantités y sont considérées, non en elles-mêmes, mais au point de vue du rôle qu'elles jouent dans le calcul.

On divise généralement l'algèbre en algèbre élémentaire et algèbre supérieure, mais cette division n'a rien de précis. Nous réunirons toutes les théories algébriques sous le titre commun de Théorie des quantités, que nous subdiviserons en *Théories des quantités fixes* et *Théories des quantités variables*, parce que, dans le premier cas, les résultats du calcul sont précis et absolus, dans le second, ils ne sont que relatifs et approchés.

En résumé, l'Arithmologie se répartit dans notre exposition en trois théories générales, dont les deux premières embrassent l'ensemble des connaissances professées en France dans l'enseignement secondaire, et la troisième dans l'enseignement spécial ou supérieur.

Il importe de signaler que nous avons exclu de l'Arithmologie tout ce qui a rapport à l'analyse des grandeurs, car cette analyse est du ressort même de la Géométrie. L'application des calculs à des quantités de grandeur est remplacée ici par l'application des calculs aux opérations de l'esprit dans le temps.



Le plus noble et le plus impérieux désir de tous les bons esprits consiste à augmenter leurs connaissances et à les propager.

Quels que soient l'âge et la position sociale, ce désir est général ; il est même plus vif dans l'aisance que dans la pauvreté, dans la fréquentation du monde que dans l'isolement.

On pardonne à l'homme plongé dans la misère de chercher à réaliser avant tout son bien-être matériel ; mais, quand les besoins physiques sont satisfaits, l'intelligence réclame ses droits. Esclave du corps tant qu'il a fallu pourvoir aux plus pressantes exigences, elle se révolte dès que l'heure de son développement a sonné.

Quels châtiments n'inflige-t-elle pas alors à celui qui la méconnait ? La vie du paria dans les sociétés orientales est moins douloureuse que celle de l'ignorant dans nos sociétés civilisées. L'ignorant entend parler de découvertes et ne peut les comprendre ; les plus beaux résultats de l'étude lui semblent des miracles ou des mystifications ; les enfants qui bégayent les premiers mots de la Science peuvent l'humilier ; le charlatan le tient à sa merci ; il se laisse fourvoyer dans toutes les intrigues ; il accorde sa croyance à toutes les erreurs ; il est exposé à toutes les déceptions. Ce qu'il a de plus précieux, sa raison, son libre arbitre, sa foi, sont flétris par la défiance, et, de déboires en déboires, réduit à fuir la société des hommes instruits, retombant dans la fange de l'humanité, il s'éteint dans l'horreur et l'épouvante d'un monde qu'il n'a pas su connaître.

Si telle est la destinée de l'ignorant quand il vit isolé, que dire de son

existence quand il a charge d'âmes? Moins il se sent intelligent, plus il réclame de sympathies et d'appuis; aux irritations de l'amour-propre s'ajoute la crainte de perdre le respect des êtres qui lui sont chers. A-t-on jamais réfléchi aux souffrances de ceux à qui une influence étrangère enlève la confiance et l'estime de leurs enfants? A-t-on jamais songé aux douleurs secrètes qui doivent dévorer surtout le cœur des femmes, si jalouses de considération, et que leur défaut de connaissances semble vouer aux amertumes de l'isolement?

Comme la nourriture mystérieuse de l'Apocalypse, l'étude, amère d'abord, devient douce ensuite. Elle nous rend la conscience de nos forces; elle nous console dans l'adversité; elle nous permet de détourner notre esprit des pensées accablantes, des sollicitations pernicieuses, du découragement et du désespoir; elle nous rend meilleurs en augmentant nos connaissances, seuls biens qui nous soient personnels, car tous les autres sont sujets aux revers de la fortune; elle nous grandit enfin en nous faisant entrer dans l'intimité des plus grands esprits et en nous permettant de contempler l'humanité sous son jour le plus glorieux.

Mais, à défaut de ces avantages, le devoir le plus strict nous impose le perfectionnement intellectuel. Il y a vingt-trois siècles, un sage, que des millions d'hommes ont presque déifié, en faisait la condition nécessaire de l'harmonie universelle.

« La loi de la sagesse supérieure, disait Confucius, consiste à raviver le principe lumineux que nous avons reçu du ciel, à l'entretenir, et à placer sa destination définitive dans le souverain bien.

« Il faut d'abord connaître son but et prendre une résolution. L'esprit alors devient calme; il se possède; il peut réfléchir et asseoir un jugement sur l'essence des choses; c'est ainsi qu'il se met sur la voie de la perfection.

« Les principes des actions, déterminés et approfondis, élèvent au plus haut point les connaissances morales, qui seules peuvent rendre les intentions pures et sincères. Sous l'influence de la pureté et de la sincérité des intentions, l'âme se pénètre de probité et de droiture; l'homme est amélioré,

la famille bien dirigée, l'État bien administré, le monde en paix et en bonne harmonie.

« Les hommes parfaits connaissent la loi de leur être et les devoirs qui en dérivent ; ils peuvent par cela même connaître à fond la nature des autres hommes et leur enseigner leurs devoirs ; ils sont également en état de connaître à fond la nature des autres êtres vivants ou végétants, et de contribuer à leurs fonctions selon les exigences de leur organisation propre.

« Aidant ainsi les puissances d'en haut et d'en bas dans la transformation et l'entretien des êtres qu'ils conduisent à leur complet développement, ils constituent un troisième pouvoir entre la terre et le ciel. »

Cette doctrine, qui fait de l'homme un mandataire du ciel et donne le monde en tutelle à l'intelligence humaine, est généralement méconnue de la société occidentale. Nous sommes trop habitués à considérer la vie comme une épreuve, une calamité transitoire, ou simplement un vide à combler dans l'éternité. Emprisonnées entre un néant et une espérance, les foules restent inertes au milieu des tumultes qui les bouleversent : guerres, révolutions, élévations et chutes d'empires, fondations et destructions des nationalités, sont autant d'évolutions stériles qui se reproduisent à la façon des tours d'une vis sans fin dans les spires de son écrou. Les orages de mots, les pluies d'encre, les déluges de sang ne les ont encore dotées d'aucune constitution décisive.

Toute constitution demande des éléments stables, et les hommes sont inconsistants comme des brouillards ; pendant que les uns s'évaporent dans l'idéal où ils tendent à s'absorber, les autres se résolvent en flaques et cherchent à noyer leur individualité dans l'océan commun dont ils se croient issus : aspirations d'autant plus insensées, découragements d'autant plus injustes, que les uns pas plus que les autres n'ont jeté un regard calme sur l'existence qu'ils traversent et ne possèdent la notion, même superficielle, des ressources qu'elle peut leur offrir.

Avant de se laisser emporter par les chimères ou do s'abandonner

au désespoir, l'homme ferait bien d'acquérir une connaissance, sinon approfondie, au moins générale, du milieu dans lequel il est placé. Aucune science ne devrait lui être tout à fait étrangère; et, si exorbitante qu'elle paraisse, cette exigence n'a jamais été considérée comme une impossibilité par les esprits les plus éclairés.

Cet ouvrage a pour but de le démontrer: il n'est pas le fruit d'une présomption individuelle, il est le fruit du travail de plusieurs générations; aussi est-il sans nom d'auteur. Comment signer son nom après ceux des Bacon, des Ampère, des Humboldt? N'est-ce pas déjà une audace de se présenter, même sous le couvert de l'anonyme, comme le mandataire de ces esprits immortels?

Mais, dans la confusion d'idées où nous sommes, les scrupules ne sont plus permis. On habille la Science de tant d'oripeaux qu'il faut lui rendre sa glorieuse nudité; il faut lui créer un sanctuaire où ses fidèles puissent la contempler face à face : une et simple malgré sa complexité, vivante, les pieds appuyés sur la nature, le cœur palpitant dans le monde moral, la tête radieuse et éclairant l'univers intellectuel.

Les apôtres peuvent faiblir dans leur tentative; mais leur faiblesse même est un hommage à la grandeur de la doctrine. Ils appartiennent d'ailleurs à l'élite de l'humanité; leurs travaux se sont perpétués à travers les siècles. L'histoire de la Science n'est que l'histoire du progrès: là, en effet, pas de défaillances, pas d'hésitations, pas de recul, pas de cercles vicieux, mais des vérités absolues, éternelles, immuables, auxquelles s'ajoutent incessamment d'autres vérités. Quoique l'œuvre se soit accomplie d'abord à l'écart des masses, elle a toujours cherché à se vulgariser; ni l'ignorance des hommes, ni leurs passions, ni leur apathie, ne l'ont découragée dans sa marche envahissante; elle a tenté tous les moyens, timidement d'abord, et comme pour sonder le terrain; elle s'est enfin prononcée pour celui que nous employons aujourd'hui.

Ampère a été un des premiers à reconnaître que l'étude d'une science quelconque devait être précédée d'une intuition générale et immédiate de son objet; c'est-à-dire qu'il faut, avant tout, mettre sous les yeux de l'étudiant les aspects d'ensemble avant de le faire entrer dans l'analyse des lois, l'examen des détails et la recherche profonde des causes. C'est là ce qu'il a appelé le point de vue *autoptique* de la Science: ce que tout le monde peut voir du premier coup. L'esprit de l'homme, en effet, ne procède pas autrement; il passe du général au particulier, saisissant d'abord les traits principaux pour y rattacher plus tard les détails.

L'illustre académicien a fait plus : dans son *Essai sur la philosophie des sciences*, œuvre la plus considérable qu'ait enfantée le cerveau de l'homme, il a tracé une classification méthodique et naturelle de toutes les connaissances humaines. Ce travail, destiné aux savants, est passé inaperçu du public; mais il a opéré une révolution dans le monde intellectuel. Malheureusement, Ampère s'est borné à une nomenclature aride et remplie de néologismes que la mort l'a empêché de reprendre et de développer en sous-œuvre. Il attachait la plus grande importance à l'explication de cette nomenclature : « Celui, disait-il, qui, sans former le projet insensé de connaître toutes les sciences, voudrait cependant avoir de chacune une idée suffisante pour comprendre le but qu'elle se propose, les fondements sur lesquels elle s'appuie, le degré de perfection auquel elle est arrivée, les grandes questions qui restent à résoudre, et pouvoir ensuite, avec toutes ces notions préliminaires, se faire une idée juste des travaux actuels des savants dans chaque partie, des grandes découvertes qui ont illustré notre siècle, de celles qu'elles préparent, etc., c'est dans le cours ou dans l'ouvrage dont je parle que cet ami des sciences trouverait à satisfaire son double désir.

« Il pourrait ensuite, et sans études spéciales, s'intéresser également aux discussions qui partagent les diverses écoles en histoire naturelle, en médecine, en philosophie, en littérature, en politique, etc.; comprendre et apprécier jusqu'à un certain point ce qu'il entend dans une séance académique, ce

qu'il lit dans un journal ou dans un compte rendu des travaux d'une société savante; et, lorsqu'il aurait le bonheur de se trouver avec ces hommes qui ont jeté un si grand éclat dans les sciences, retirer plus de fruit de leurs conversations instructives et profondes.

« Enfin, les membres eux-mêmes de ces sociétés, quelquefois étrangers aux travaux de leurs confrères, se plairaient peut-être à trouver dans l'ouvrage dont je parle tout ce qui leur serait nécessaire pour écouter avec plus d'intérêt les savantes communications des membres, soit d'une même classe, soit surtout d'une classe différente. »

Nous ne pouvions déroger au programme d'Ampère; il est conçu dans un ordre tel, que la première science suffit à l'intelligence de la seconde, les deux premières à l'intelligence de la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la fin. Le squelette de notre exposé est donc le même que celui dont il voulait se servir; seulement nous lui avons donné une physionomie dont l'illustre académicien n'eût pas revêtu le sien. Les savants y perdront sans doute, mais nous atteindrons mieux le but que nous nous sommes proposé pour le public.

Nous n'avons pas voulu qu'il restât d'excuse à la paresse. Une instruction fort ordinaire, le désir de connaître accompagné d'une attention soutenue, un examen dépouillé de toute critique railleuse, permettront au lecteur de se faire une idée nette de l'ensemble des connaissances humaines, idée que ne lui donneront ni les Traités, ni les Encyclopédies, ni les Aides-mémoire publiés jusqu'à ce jour, quelque bons qu'ils soient. Les Traités sont volumineux et ne s'inspirent pas d'un esprit commun; isolés dans leur spécialité, ils peuvent être comparés aux parties détachées d'un mécanisme. Les Encyclopédies exagèrent encore ce défaut en débitant la science par petits articles disposés dans l'ordre alphabétique, c'est-à-dire sans méthode; on y trouve la définition de l'algèbre avant celle de l'arithmétique, et l'histoire de Napoléon y précède l'histoire de Sésostris. Les Aides-mémoire, enfin, ne peuvent servir qu'aux personnes versées depuis longtemps dans les sciences dont ils donnent les formules sans en donner l'explication.

Lors donc que le lecteur se sera familiarisé avec les grandes lois qui résultent de l'ensemble des sciences, quand il aura constaté la majestueuse simplicité des relations qui les unissent, il saura par une seconde étude, reprise en sous-œuvre, pénétrer plus avant dans l'intelligence de leur mécanisme. Grâce à cette méthode, l'esprit pourra se développer à la fois dans tous les sens, à la manière d'une sphère en voie d'accroissement régulier. Ce procédé n'interdit pas les échappées, mais il leur donne un point d'appui, il les circonscrit dans les bornes de chaque capacité, il prévient les exagérations et les folies des recherches spéciales poussées au delà de toute limite.

Si vingt années d'études sont un titre, nous les pouvons invoquer. C'est bien peu de chose en regard des travaux de nos devanciers. Mais l'œuvre était déjà préparée; il suffisait de combler quelques lacunes pour la mettre à exécution. Le début surtout demandait des recherches spéciales et exigeait l'énoncé d'axiomes qui ne sont encore qu'à l'état latent dans la Science; ces axiomes ressortent de toutes les études abstraites et surtout des théories modernes les plus élevées de la Mécanique rationnelle.

Nous réclamons la sympathie et le concours de toutes les personnes sincèrement dévouées au développement de l'instruction; assez de gens nous accuseront de présomption en nous voyant entreprendre une tâche dont l'accomplissement réclamera de nombreux et savants collaborateurs. Mais, sans le fossé dont on entoura quelques cabanes élevées au bord du Tibre, Rome n'aurait pas existé ; sans cet ouvrage, on attendrait encore une exposition simple, claire et méthodique de toutes les connaissances humaines.

Un avertissement au lecteur avant de finir : s'il est permis de lire des romans et des œuvres de littérature légère à tous les instants du jour, il n'en est pas de même pour tous les ouvrages de science, quelque effort que l'on ait fait pour les rendre attrayants L'étude ne peut avoir lieu qu'à tête reposée ; elle doit s'accomplir aux heures qui précèdent les repas et qui suivent le sommeil, quand on a l'estomac libre, les sens en repos, le cerveau dégagé de vapeurs et de soucis. Il faut alors s'installer commodément, se

recueillir, se rappeler tout ce que l'on sait déjà à propos du sujet dont on s'occupe. La lecture commence alors; on la fait avec lenteur, en s'attachant à ne passer aucune phrase sans l'avoir comprise, et en résumant, à la fin de chaque paragraphe, les idées que l'on vient de s'assimiler. Une infraction, même légère, à ces règles, force l'esprit à revenir en arrière: elle le fatigue, l'irrite, et ne tarde pas à le jeter dans le découragement.

Notons cependant qu'il ne faut pas trop creuser une idée, mais y réfléchir assez pour qu'elle subsiste dans l'esprit. Cette idée se développe ensuite d'elle-même, à mesure qu'on poursuit l'étude du groupe dans lequel elle est comprise. Grâce à l'observation de ces règles, on recueille de l'étude tout le fruit qu'on est en droit d'en espérer.

C'est au début de notre œuvre que ces conseils trouveront surtout leur application. Que le lecteur, avant de passer outre, se pénètre donc de ces belles paroles de Confucius :

« Si des personnes ne profitent pas d'abord de l'étude, ne gagnent pas à la conversation des hommes instruits, ne peuvent parvenir à la connaissance du bien, ne réussissent pas enfin à mettre leurs bonnes résolutions en pratique, qu'elles ne se découragent point; ce que d'autres font en une fois, elles le feront en dix, ce que d'autres font en cent fois, elles le feront en mille.

« Celui qui suit fermement cette règle de persévérance, tout ignorant qu'il soit, deviendra nécessairement instruit, tout faible qu'il soit, deviendra nécessairement fort. »

Pour donner une idée bien nette de l'unité harmonieuse des connaissances humaines, nous allons en esquisser les grandes *divisions*, en faire une *description sommaire*, en établir ensuite le ***plan raisonné*** et procéder enfin à l'*Exposition* proprement dite.

Ces quatre parties de notre ouvrage, chacune reprise en sous-œuvre par celle qui la suit, peuvent être considérées comme autant d'initiations successives à la Science générale que tout homme, au dix-neuvième siècle, est tenu de posséder.

PREMIÈRES DIVISIONS

La Science comprend trois grandes divisions, dans lesquelles on étudie successivement :

1° Tout ce qui est en dehors de l'homme et de ses semblables : LA NATURE;

2° Tout ce qui concerne l'HOMME en lui-même ;

3° Tout ce qui a trait à l'HUMANITÉ.

LA NATURE.

L'étude de la nature exige des connaissances préalables et rigoureuses sur les quantités, les formes et les mécanismes, — *Mathématiques;* et des procédés généraux d'expérimentation, — *Physique.*

La nature doit être examinée d'abord dans ses grands ensembles : le ciel, l'atmosphère, la terre à sa surface et dans ses profondeurs, — *Cosmologie;* — puis dans ses détails, c'est-à-dire dans les êtres qui la constituent : corps bruts, végétaux, animaux, — *Histoire naturelle.*

Viennent enfin les modifications que l'homme a fait subir à la nature en vue de son bien-être physique et indépendamment des relations sociales auxquelles ces modifications peuvent donner lieu, — *Technologie.*

L'HOMME.

L'homme se présente sous un triple aspect : physique, intellectuel, moral.

En tant qu'être physique, il a un corps à étudier, une santé à surveiller et à entretenir, — *Anthropologie.*

En tant qu'être intellectuel, il perçoit les sensations et les lois d'un monde

supérieur, monde de la pensée, qu'il faut étudier en lui-même, — *Noologie.*

En tant qu'être moral, il saisit les rapports de l'intelligence et des corps, et cherche à en réaliser l'harmonie, — *Psychologie.*

L'homme ne se contente pas de chercher le vrai dans la Noologie, le bien dans la Psychologie, il poursuit, en outre, la recherche du beau dans l'*Esthésiologie*, et de ces trois ordres d'étude résultent des aspirations vers l'absolu, c'est-à-dire vers la vérité, le bien et le beau suprêmes, — *Théognosie.*

L'HUMANITÉ.

L'Humanité est la collection de tous les hommes, non-seulement dans le présent, mais dans le passé et dans l'avenir.

Elle est reliée à travers le temps par la *Littérature.*

Son passé vit dans l'*Histoire.*

Son présent nous la montre divisée en sociétés qui ont leur économie, leurs lois, leurs rivalités, leurs tendances, — *Sociologie.*

Mais la sociologie n'étudie l'humanité que dans ses grands ensembles, et ne considère l'homme que comme être passif, assujetti aux mécanismes sociaux en qualité de citoyen. Il importe de connaître la part d'influence ou d'action que chacun de nous peut y exercer, — *Kyriologie.*

Enfin, l'avenir de l'humanité est tout entier dans la manière dont on élève les générations nouvelles, — *Éducation.*

TABLEAU DES ENSEMBLES

PRÉPARATIONS A L'ÉTUDE DE LA NATURE

NOTIONS FOURNIES PAR LE CALCUL

MATHÉMATIQUES.

Arithmologie, ou théorie générale des nombres ; elle comprend l'*arithmétique* et l'*algèbre*.

Géométrie, ou théorie générale des formes.

Mécanique, ou théorie générale des mouvements.

(Nous indiquons en note, au bas de chaque tableau, l'étymologie des titres qui y sont contenus.)

Mathématique. — Ce qui est bien su.

Atithmologie. — Ce qui a trait aux nombres.

Géométrie. — Mesure de la terre (ce mot a été étendu à toutes les mesures de grandeur et de formes).

Mécanique. — Ce qui a rapport au mouvement.

Toutes ces étymologies sont grecques ; nous signalons celles qui ont une autre source.

DESCRIPTION SOMMAIRE

Il est des notions rigoureuses que nous pouvons acquérir sans tenir compte de notre personnalité et de nos sensations ; ces notions font l'objet des sciences dites exactes, ou *mathématiques*.

Les mathématiciens, en effet, supposent l'être dénué d'organes, sans conscience de lui-même, et construisant toutes choses par le seul effort de la pensée.

Leur point de départ est l'idée d'*action*, dont le caractère est de persister dans le temps et dans l'espace, en donnant lieu à des durées, à des formes, à des mouvements et des équilibres ou des mécanismes de toute nature.

Les durées ne peuvent être déterminées que par les nombres dont la création, la composition et les fonctions font l'objet d'une série de connaissances qu'on appelle *arithmologiques*.

La détermination des formes se fait par l'examen des lignes, des surfaces et des volumes qui les constituent ; l'étude des procédés à employer pour obtenir des résultats rigoureux dans tous les cas possibles comprend la série de connaissances dites *géométriques*.

Enfin l'étude des mouvements, de leurs combinaisons, de leurs transformations, de leur équilibre, de leur jeu, etc., constitue la série de connaissances dites *mécaniques*.

PRÉPARATIONS A L'ÉTUDE DE LA NATURE

NOTIONS FOURNIES PAR LES SENS.

PHYSIQUE.

Optique, ou théorie de la lumière.

Atomistique, ou théorie générale de la matière et des corps pondérables.

Acoustique, ou théorie du son.

Thermologie, ou théorie de la chaleur.

Électro-magnétique, ou théorie générale de l'électricité.

Physique. — Ce qui a rapport à la nature. (Ce terme a été restreint aux phenomènes de la sensation externe.)

Optique. — Ce qui a rapport à la vue.

Atomistique. — Ce qui a rapport aux atomes, c'est-à-dire aux éléments pesants des corps.

Acoustique. — Ce qui a rapport à l'audition.

Thermologie. — Ce qui traite de la chaleur.

Électro-magnétique. — Ce qui a rapport à l'électricité et au magnétisme.

L'univers se traduit, pour le physicien, en sensations extérieures (phénomènes sensoriels), dont il importe d'étudier les lois et le mécanisme général, indépendamment des sentiments que ces phénomènes produisent en nous.

Le physicien ne voit donc pas la nature en idée comme le mathématicien ; il ne l'interprète pas avec son âme comme l'ignorant. Il éveille successivement chaque sens, étudie à part les phénomènes généraux que ce sens révèle, en établit les lois, les compare ensuite à celles des autres phénomènes, et conclut, avec le mathématicien, que toutes les manifestations sensorielles ne sont que des manières d'être, ou *modes*, de l'action.

Ces modes présentent deux caractères bien distincts : ils peuvent être pesés, ou bien ils sont impondérables. La matière est dans le premier cas ; la lumière, le son, la chaleur et l'électricité, dans le second.

L'étude de la lumière, presque exclusivement mathématique, est la meilleure préparation à l'étude générale des corps pondérables, dont toute la théorie repose sur la loi d'attraction ; viennent ensuite l'étude du son, de la chaleur et de l'électricité

ÉTUDE DE LA NATURE.

GRANDS ENSEMBLES DE L'UNIVERS.

COSMOLOGIE.

Astronomie, ou théorie du ciel.

Météorologie, ou théorie de l'atmosphère terrestre.

Géologie, ou théorie de la terre.

Cosmologie. — Ce qui traite de l'Univers en général.

Astronomie. — Lois des astres. (Il serait préférable d'employer le mot Astrologie, mais le sens qu'on attribue à ce mot n'a rien de scientifique.)

Météorologie. — Ce qui traite des phénomènes de l'air.

Géologie. — Ce qui traite de la Terre.

Nous n'avons encore vu la nature qu'en pensée, dans les sciences exactes, ou par échappées, au milieu des laboratoires; abordons-la maintenant en la dépouillant de ses enveloppes successives.

Imaginons que la science nous ait transporté à des éloignements infinis : — une petite lueur dans les ténèbres de l'espace renfermera tout ce que nous appelons l'Univers. — Approchons; la lueur grandit, devient un brouillard et se décompose en nuages blanchâtres, pâles fantômes dont les formes s'ébauchent dans une nuit crépusculaire : ce sont les nébuleuses, mères des mondes! La nôtre ressemble à un monstrueux serpent enroulé sur lui-même. Vue de plus près, elle se résout en des milliards d'étincelles que l'homme appelle des étoiles, et qui sont autant de soleils.

Ce petit point, dont la lumière tremblante scintille si faiblement au centre de la nébuleuse, est notre soleil. — Approchons encore : le point devient plus net, il grossit, il s'arrondit, il augmente d'éclat, il se détache des autres étoiles. Maintenant c'est un globe immense, enveloppé d'éclairs, qui se déplace dans un vide presque infini, en tournant sur lui-même avec majesté. Il est escorté dans sa marche par d'autres globes qui roulent obscurément, le long de courbes immenses, autour de l'astre central. Quelques-uns, soleils peut-être éteints, peut-être naissants, ont aussi leurs satellites; et celui-ci, qui pour tout cortége n'a qu'un astre difforme, sans doute à cause de sa petitesse, c'est la Terre!

Approchons toujours : ce qui n'était rien tout à l'heure devient colossal. C'est bien la Terre avec ses mers qui la noient plus d'à-moitié, ses continents et ses îles, la Terre recouverte de son atmosphère comme d'une enveloppe de cristal, parée de ses colorations variées que nous admirons pour la première fois. On dirait d'un fruit merveilleux, car il a son écorce et sa pulpe. L'écorce est faite de couches superposées par les siècles; la pulpe est de feu. Quel germe contient cette enveloppe ardente qui frémit comme une nappe de métal en fusion dans un moule? la Science est encore muette sur ce point.

ÉTUDE DE LA NATURE.

DÉTAILS RELATIFS A LA TERRE.

HISTOIRE NATURELLE.

STÉRÉOLOGIE, ou théorie de la matière et des corps étudiés dans leurs propriétés intimes Elle comprend la *Minéralogie* et la *Chimie inorganique*.

BOTANIQUE, ou théorie des végétaux. } Comprennent la *Chimie organique* et la *Physiologie*.
ZOOLOGIE, ou théorie des animaux. }

STÉRÉOLOGIE. — Ce qui traite des corps considérés en eux-mêmes.

BOTANIQUE. — Ce qui a rapport aux plantes.

ZOOLOGIE. — Ce qui traite des animaux.

MINÉRALOGIE. — Ce qui traite des corps que l'on tire des mines.

CHIMIE. — Ce qui consiste à brûler. (Étymologie arabe.)

PHYSIOLOGIE. — Ce qui traite de la nature. (Ce mot a été restreint aux fonctions des êtres organisés.)

De la nappe souterraine incandescente rayonnent des fluides embrasés qui se refroidissent en traversant l'écorce. Les uns se sont échappés dans l'atmosphère où ils nagent en liberté; les autres s'arrêtent à la surface où ils se résolvent en liquides; d'autres encore, arrêtés dans leur marche, se sont solidifiés.

Ces gaz, ces liquides, ces solides sont composés de myriades d'atomes, êtres minuscules et insaisissables, qui obéissent à des lois rigoureuses; ils ont leurs sympathies énergiquement accusées, ou plutôt leurs affinités; ils se répartissent en groupes qui, ici, restent purs de toute association, là se combinent dans des proportions définies et peu compliquées. Leur jeu est tout intérieur, et quand il se manifeste au dehors il déploie une énergie incroyable.

Est-ce à ces êtres minuscules qu'il faut attribuer le règne végétal? Sont-ils les architectes de ces constructions aériennes si légères, si gracieuses et si variées, qui se balancent à la surface du sol? L'édifice s'attache à la terre par des filaments déliés, couloirs microscopiques où s'engagent les atomes qui vont se transfigurer au soleil.

L'ascension commence: ceux-ci se détachent de la spirale et s'étalent en feuilles; ceux-là parviennent jusqu'aux derniers sommets où s'élabore le chef-d'œuvre; c'est un palais merveilleux qui s'entrouvre et montre ses parois intérieures tissées des couleurs les plus vives et les plus délicates; l'air s'emplit d'effluves parfumées, émanations subtiles de mystérieuses amours. Bientôt la fleur, fécondée, laisse tomber ses parures. Le fruit destiné à la perpétuer se détache à son tour, emportant des colonies d'architectes invisibles qui connaissent le secret des merveilles où ils se sont transfigurés et qu'ils sauront reproduire.

Quelques-unes de ces colonies ballottées par la tempête, désespérant de trouver une place sur le sol, ont-elles conçu une organisation nouvelle et pris parti de leur existence vagabonde? La science ne sait que peu de chose encore des mondes qui fourmillent dans l'infiniment petit. Quoi qu'il en soit, voici des êtres qui se déplacent d'eux-mêmes, se jouent dans les eaux, bondissent sur la terre et fendent les airs. Ce sont les animaux; leurs variétés sont infinies, leurs familles s'élèvent par degrés serrés dans la hiérarchie des fonctions; — Qui les dénombrera? qui dira seulement toutes les espèces, depuis l'infusoire jusqu'au lion, depuis le zoophyte jusqu'à l'homme?

PRÉPARATION A L'ÉTUDE DE L'HOMME.

LA NATURE MODIFIÉE PAR L'HOMME.

TECHNOLOGIE.

Production, ou théorie des procédés à l'aide desquels l'homme s'approprie les matières premières. Elle comprend l'exploitation des règnes minéral, végétal et animal.

Transformation, ou théorie des procédés à l'aide desquels l'homme modifie les matières premières qu'il a recueillies naturellement dans la production.

Industrie, ou théorie des procédés à l'aide desquels l'homme combine les matières primitives ou transformées.

Technologie. — Ce qui traite de l'industrie humaine (en dehors de toute relation sociale; l'industrie financière et commerciale est étudiée par l'Économie générale.)

L'Homme est la dernière manifestation naturelle de cette chaine d'êtres qu'il termine et qu'il semble résumer. A son apparition, la science hésite et balbutie. — Par quels côtés aborder une étude si complexe ? — L'enchaînement des connaissances nous est ici d'un grand secours, et nous ferons pour l'Homme ce que nous avons fait pour l'Univers ; nous le dépouillerons de ses enveloppes.

L'enveloppe extérieure de l'Homme est le milieu qu'il s'est créé dans la nature en appropriant la matière à son usage. Il a fouillé la terre pour en tirer des matériaux ; il a fait son choix dans les végétaux en favorisant certaines espèces à l'exclusion des autres ; il a asservi, dompté, utilisé, dispersé ou détruit les animaux.

Tant d'éléments empruntés à la matière brute ou organisée ont été pétris, façonnés, transformés par l'industrie humaine.

L'Homme s'est construit de la sorte des demeures confortables, des moyens de transport et des machines puissantes, qui contribuent à l'accroissement de son bien-être physique.

ÉTUDE DE L'HOMME.

L'HOMME PHYSIQUE.

ANTHROPOLOGIE.

Physiologie de l'homme, ou théorie de l'organisation et des fonctions normales du corps humain.

Médecine, ou théorie des souffrances de l'homme physique et de leur traitement.

Hygiène, ou théorie de l'existence physique bien entendue.

Anthropologie. — Ce qui traite de l'homme considéré comme être matériel.

Hygiène. — Ce qui a rapport à la santé.

Mais la nature n'est que vaincue; elle n'est pas soumise; de son sein sortent des vengeurs; la terre a ses exhalaisons pestilentielles, les végétaux ont leurs poisons, les animaux leurs morsures; nos armes, nos machines mêmes se retournent contre nous; chacune de nos conquêtes cache une rébellion et l'ennemi s'embusque jusque dans les milieux que nous nous sommes constitués.

Comment échapper à tant de dangers pour la plupart invisibles? En recherchant quelles sont les fonctions normales de notre être et les perturbations qui peuvent les altérer. Pour cela, il faut dépouiller la seconde enveloppe de l'homme, qui est le corps; l'étudier dans son organisation tant interne qu'externe: la soumettre à l'action successive ou simultanée des agents naturels et artificiels, constater les effets produits, reconnaître ainsi l'origine et le caractère des altérations; surveiller la marche des maladies et demander à la nature les forces qui doivent les combattre et en triompher.

De toutes ces connaissances résulte une science finale, qui est l'Hygiène, ou théorie des mesures propres à maintenir la santé.

ÉTUDE DE L'HOMME.

L'HOMME DANS SES ASPIRATIONS AU VRAI.

NOOLOGIE.

Idéologie, ou théorie générale des idées.

Logique, ou théorie générale des pensées et de leurs enchainements.

Philosophie, ou théorie générale de tous les efforts tentés par l'homme pour parvenir à la connaissance de la vérité.

Noologie. — Ce qui traite de l'intelligence.

Idéologie. — Ce qui traite des idées.

Logique. — Ce qui a rapport à l'enchainement des pensées.

Philosophie. — Amour de la sagesse.

L'homme est en possession de ses conquêtes, il sait en jouir; il en connait les ressources et les dangers. Que lui manque-t-il encore? — La conscience profonde de ce qu'il est et de ce qu'il deviendra. La vie humaine ne persiste pas éternellement : est-ce le néant, est-ce une existence nouvelle qui nous attendent?

Ici tout devient mystérieux ; le *moi* seul peut agir :

Je cherche la solitude et le silence ; je clos mes sens. Plus de lumière, plus de couleurs ; le bruit du dehors fait place à un bourdonnement intérieur qui va lui-même s'apaiser ; mon corps immobile semble se détacher des autres corps et perdre, avec la sensation du contact, le sentiment de son existence. — Quelque chose vit-il encore en moi? — Oui, la pensée.

Des êtres sans corps m'adressent des paroles que je comprends sans les entendre, auxquelles je réponds sans formuler de mots. Ces êtres sont les *idées* ; ils m'égaient ou m'attristent, m'irritent ou me calment, se succèdent, s'associent et se dispersent sans avoir effleuré même un seul de mes sens. Je puis avec eux passer en revue tout ce que je connais de la nature sans qu'aucun des objets qu'ils suscitent à mon esprit soit présent à l'examen.

Comment nous reconnaître dans ce monde insaisissable dont le monde matériel n'est qu'une imparfaite traduction?

Il faut explorer tous les faits intellectuels, les décomposer, les ramener à leurs éléments les plus simples, qui sont les idées. Nous arrivons ainsi à constater que toutes les idées en elles-mêmes sont vraies et qu'elles ne deviennent absurdes que quand nous les confondons dans des accouplements incompatibles.

L'accouplement des idées constitue la pensée, qui est, en elle-même, logique ou absurde. L'enchaînement des pensées donne naissance à des jugements dont les conclusions sont rigoureuses et aboutissent, soit à une négation, soit à une affirmation. Les méthodes à suivre pour déterminer ces conclusions font l'objet de la logique.

Enfin on reconnaîtra qu'il est impossible d'être suffisamment éclairé sur le monde intellectuel sans consulter toutes les interprétations qu'en ont données jusqu'à nous, les grands philosophes de l'Humanité.

ETUDE DE L'HOMME.

L'HOMME DANS SES ASPIRATIONS VERS LE BIEN.

PSYCHOLOGIE.

Ontologie, ou théorie des êtres considérés en dehors de leurs manifestations matérielles.

Thélésiologie, ou théorie de la puissance, des effets et de l'exercice de la volonté.

Éthique, ou théorie des passions, de leur gouvernement et des fins auxquelles nous devons tendre.

Psychologie. — Ce qui traite de l'âme.
Ontologie. — Ce qui traite de l'être en lui-même.
Thélésiologie. — Ce qui traite de la volonté.
Éthique. — Ce qui a rapport aux mœurs, ou Morale.

Les connaissances noologiques, si curieuses dans leur abstraction, deviennent bien autrement intéressantes quand nous les appliquons à l'étude des êtres en eux-mêmes.

Les êtres nous apparaissent alors comme des manifestations plus ou moins durables, plus ou moins changeantes d'actions qui échappent aux sens et qui pourtant ont une réalité cachée, rigoureuse et permanente, l'*âme*. Pourquoi la graine garde-t-elle, à travers le temps, la conscience de la forme végétale qu'elle doit produire? Pourquoi l'animal voit-il ses atomes se dissiper et se renouveler de fond en comble sans perdre son individualité? Pourquoi l'homme lui-même conserve-t-il le souvenir des choses qui l'ont frappé et qu'il ne retrouvera peut-être jamais? Ces questions et bien d'autres encore constituent l'Ontologie, ou connaissance des êtres, indépendamment de ce que les sens nous en ont révélé.

Nous constaterons bientôt que les âmes exercent les unes sur les autres des influences occultes, influences plus ou moins consenties et contre lesquelles nous pouvons réagir en vertu d'une force particulière, qui est la volonté. Quelles sont les puissances de la volonté? Quel en est l'exercice? A quelles conséquences son emploi nous conduit-il? C'est ce qu'il appartient à la Thélésiologie de nous apprendre.

De ces investigations et des connaissances qui en découlent, nous déduisons des lois auxquelles nous nous soumettons spontanément. Nous avons des passions que nous pouvons abolir, transformer ou même développer. Les corps organisés ont des fonctions rigoureuses dont il est impossible de modifier le jeu sans porter atteinte à l'économie générale; les âmes ont également leur constitution propre dont l'harmonie est troublée quand elle ne s'accorde pas avec l'harmonie universelle.— Comment l'harmonie de l'être individuel peut-elle concourir à l'harmonie suprême? En quoi peut-elle y conserver son originalité? En quoi doit-elle l'abdiquer? — Telles sont les questions qui constituent la série des connaissances morales, indispensables au bonheur de chaque individu.

ÉTUDE DE L'HOMME.

L'HOMME DANS SES ASPIRATIONS VERS LE BEAU.

ESTHÉSIOLOGIE.

Esthétique, ou théorie générale du beau.

Terpnographie, ou description des chefs-d'œuvre de l'art.

Technesthétique, ou théorie des procédés employés dans les beaux arts.

Esthésiologie. — Ce qui traite du sentiment, en ce qui concerne le beau.
Esthétique. — Ce qui a rapport au sentiment du beau.
Terpnographie. — Description des choses qui nous plaisent.
Technesthétique. — Ce qui, dans l'industrie, se rapporte au sentiment du beau.

L'âme, illuminée par ses révélations intellectuelles, agitée par ses joies et ses souffrances intimes, éprouve le besoin de manifester ses impressions et de les reproduire à son gré. L'oiseau chante, le tigre se complaît dans la beauté de ses allures, l'homme exprime ses harmonies et ses visions intérieures. Mais il ne se borne pas à la mélodie, comme l'oiseau, et au sentiment d'une beauté unique, comme le tigre; il accorde les sons, il varie les formes, il trouve même des harmonies nouvelles et des beautés inconnues; il façonne la matière à sa poésie et la rend dépositaire des merveilles visibles ou invisibles qui lui sont apparues, ne fût-ce que pendant un instant.

Quoique l'homme insensible aux arts ne trouve beau que ce qui lui plaît, il y a cependant une théorie du beau qui s'inspire du vrai et du bon, qui doit consulter l'impression à produire et poursuivre la netteté dans les conceptions, l'harmonie dans les ensembles, la grâce dans les détails.

L'étude de ce que l'humanité nous a laissé de chefs-d'œuvre conclut en faveur de cette théorie; elle nous éclaire, en outre, sur la mesure de nos forces et nous révèle notre originalité.

Mais il ne suffit pas à l'artiste de se connaître et de connaître ses prédécesseurs, il faut qu'il sache mettre l'exécution à la hauteur de son génie et possède toutes les ressources de l'industrie esthétique.

ÉTUDE DE L'HOMME.

L'HOMME DANS SES ASPIRATIONS VERS L'ABSOLU.

THÉOGNOSIE.

CROYANCES NATURELLES.

CROYANCES MORALES.

RECHERCHE DES FINS.

THÉOGNOSIE. — Connaissances relatives à Dieu.

A ce point de son développement, l'âme, tourmentée par ses aspirations inassouvies vers le vrai, le bon et le beau, constate avec découragement la distance qui la sépare de la perfection.

Tel le voyageur, quand il gravit une montagne, voit, à chaque plateau, de nouveaux horizons s'épanouir autour de lui ; il monte encore, il veut jouir du spectacle suprême, et ce qu'il croyait l'infini se noie sans cesse dans de nouveaux infinis ; il se hâte, il s'efforce, il parvient, haletant, à la dernière cime; sa curiosité doit être satisfaite? — Non; car au delà du cercle immense qu'embrasse sa vue, s'ébauchent les brumes mystérieuses d'autres horizons qu'il ne verra pas.

Le génie, en élevant l'homme, l'isole, comme pour mieux lui faire sentir sa petitesse. Notre intelligence a beau planer sur l'Univers, quelque chose en quoi notre intelligence se dissout, comme une bulle de gaz dans l'atmosphère, plane sur tout. Newton pèse les mondes dans sa main puissante, sa pensée, sans être éblouie des millions de soleils qui roulent dans l'immensité, sait déterminer la loi qui les régit; aussi délicate que vaste, elle découvre dans l'infiniment petit les lois subtiles de la décomposition lumineuse ; et, pourtant, l'homme qu'elle inspire s'incline chaque fois qu'il entend prononcer le mot *Dieu !*

Faiblesse d'un grand esprit, dira-t-on. — Mais cette faiblesse même signale un problème immense devant lequel la raison chancelle, et qu'il faut nécessairement énoncer ici, puisqu'il a été abordé par les plus grandes intelligences de l'humanité.

Les croyances, envisagées au point de vue individuel, ont trois sources : l'aspiration au bonheur physique, l'aspiration au bonheur moral, et les tendances à la perpétuation de l'individualité au delà de la tombe.

PRÉPARATION A L'ÉTUDE DE L'HUMANITÉ

NOTIONS FOURNIES PAR LE LANGAGE.

LITTÉRATURE.

La parole.

L'écriture.

Les langues.

Les beaux-arts, qui traduisent l'homme à lui-même, le traduisent aussi à ses semblables ; mais les moyens de communication qu'ils nous fournissent ne sont pas assez prompts.

Le langage intervient alors. Il n'est, au fond, que le résultat d'une convention sociale. La Psychologie nous apprend que la pensée, vivement conçue, rayonne de l'âme et s'impose autour d'elle ; mais il arrive presque toujours que l'âme à laquelle elle s'adresse est comme noyée dans les idées que lui apportent ses impressions internes et externes de toute nature.

Lorsque nous voulons appeler l'attention d'un homme sur une idée quelconque, il faut donc accompagner cette idée d'un signal. Ce signal s'adresse à l'oreille dans la parole, aux yeux dans l'écriture.

Dans le langage parlé, chaque idée doit avoir sa combinaison particulière de sons, ou, si l'on aime mieux, sa fanfare correspondante.

La parole étant considérée comme la fanfare de l'idée, l'écriture sera la notation de cette fanfaro. Elle a, sur la parole, l'avantage de transmettre nos idées à distance et de les conserver. Elle nous permet en outre de nous exprimer plus nettement, avec plus de nuances, d'une manière plus complète et plus délicate. Aussi l'écriture est-elle dépositaire de la science et de la poésie humaines ; elle apporte le langage des morts aux vivants, et des vivants à ceux qui n'existent pas encore. Homère nous charme comme il charmait ses contemporains, comme nos poëtes charmeront leurs arrière-neveux. Il semble que l'art d'écrire nous ait mis en possession d'une existence éternelle et commune à toute l'Humanité.

Malheureusement, la conscience que nous avons de cette existence humanitaire est confuse, à cause de la multiplicité des langues, qui nous parquent dans des sociétés particulières. L'étude des langues la rend plus nette par traduction des chefs-d'œuvre, et la Philologie tend à la constituer de toutes pièces en élaborant une grammaire universelle qui nous donne la clef de tous les idiomes en usage dans l'Humanité.

ÉTUDE DE L'HUMANITÉ DANS SES ENSEMBLES.

L'HUMANITÉ DANS LE PASSÉ.

HISTOIRE.

ARCHÉOLOGIE, ou théorie des origines historiques.

HISTOIRE DES DÉCOUVERTES.

HISTOIRE proprement dite.

ARCHÉOLOGIE. — Ce qui traite des choses anciennes. (Il faut comprendre dans cette science la Paléographie et le Blason.)

L'histoire de l'Humanité ne semble commencer qu'à l'apparition de l'Écriture ; jusque-là tout est confus, incohérent, mystérieux. Les produits primitifs de l'industrie humaine jettent seuls quelques lueurs dans les ténèbres ; lueurs indécises qu'il appartient aux archéologues de rendre plus nettes.

Mais, avec la tradition écrite, tout s'illumine ; nous voyons les groupes se former, se confondre, se dissoudre, se régénérer. Nous suivons leurs progrès, leur grandeur et leur décadence, leur répartition sur la surface du globe, leurs luttes réciproques, leur économie et leurs agitations intérieures. Les peuples passés envahissent notre intelligence et nous préparent ainsi au rôle qui nous attend dans la société. Sans leurs enseignements, combien d'épreuves nous faudrait-il subir avant de devenir citoyens?

L'étude de l'Histoire nous séduit d'abord par les fables dont l'origine de l'humanité est comme enveloppée. L'enfance des sociétés est toujours mythologique, c'est-à dire pleine de légendes extraordinaires où des génies bienfaisants et malfaisants, des divinités, tantôt poétiques et mystérieuses, tantôt terribles et sanguinaires, jouent le principal rôle.

Bientôt l'Histoire se dégage de ces brouillards pour éclairer l'Humanité sous son véritable jour; les faits alors deviennent tellement nombreux et serrés que l'esprit s'en épouvante; il ne peut arriver à les connaître que par leurs ensembles; en déterminant chacune des étapes de l'Humanité dans sa marche progressive. C'est là ce qu'il faut entendre par l'Histoire des découvertes, car chaque enfantement nouveau du genre humain modifie les aspects des sociétés et signale les phases successives de la croissance de l'Humanité.

On peut aborder alors l'étude des faits en eux-mêmes et pénétrer dans la législation, la vie civile et la vie politique de chaque peuple en particulier.

ÉTUDE DE L'HUMANITÉ DANS SES ENSEMBLES.

L'HUMANITÉ DANS LE PRÉSENT.

SOCIOLOGIE.

Économie générale, ou théorie des fonctions de l'Humanité physique.

Armée et police, ou théorie de la discipline sociale obligatoire.

Législation, ou théorie de la discipline sociale consentie.

Politique, ou théorie de la solidarité sociale.

Religions, ou théorie des fins humanitaires.

Utopies, ou théorie des organisations artificielles de l'Humanité.

Sociologie. — Ce qui traite de la société.

Économie. — Lois domestiques. Ce mot a été étendu à l'organisation de la cité, sous le titre d'*Économie politique*, et à celle de la société, sous le titre d'*Économie sociale*.

Utopie. — Ce qui n'est appliqué en aucun lieu.

L'Histoire nous a fait connaître la répartition actuelle de l'Humanité sur le globe ; elle a soulevé successivement, sans les étudier en elles-mêmes, toutes les questions auxquelles se rattache la prospérité des sociétés. La Sociologie étudie ces questions indépendamment des faits qui les accompagnent.

L'Économie générale est la partie de la Sociologie qui traite de la prospérité physique des sociétés ; elle est à l'étude de l'Humanité ce que l'Anthropologie est à l'étude de l'homme : elle ne se préoccupe pas des individus en eux-mêmes, mais de leurs ressources physiques et du mécanisme de leur répartition sociale : circulation, consommation et reproduction.

Les relations sociales proprement dites sont — ou imposées, — ou consenties. Dans le premier cas, elles sont purement disciplinaires et appliquées par l'armée et par la police. Dans le second, elles résultent d'un contrat réciproque qui est la Loi.

Les hommes réunis en grands ensembles, se reconnaissent solidaires, d'abord vis-à-vis d'une patrie commune dont ils défendent les intérêts et sauvegardent la dignité, ensuite vis-à-vis d'une religion quelconque dont la mission supérieure est de confondre les hommes, les groupes et les États dans une solidarité plus élevée qui s'étend à l'Humanité entière, considérée comme fonction d'une organisation qui la domine.

Si l'homme, comme on vient de le voir, est soumis à la fois à la nature, aux lois économiques, à la discipline sociale et à la religion, que deviennent son individualité, son initiative, en un mot, cette autorité personnelle dont il est si jaloux ? La Sociologie ne répond rien à ce sujet. Il appartient à un autre ensemble de connaissances de nous éclairer sur ce point. Comme cet ensemble de connaissances n'a pas encore de titre et qu'il a trait à l'autorité que chaque individu peut ou doit exercer dans la société, nous l'appellerons *Kyriologie* du grec *Kyrios*, maître. C'est le seul néologisme que nous nous soyons permis dans l'énumération de l'ensemble des sciences.

ÉTUDE DE L'HUMANITÉ DANS SES ÉLÉMENTS.

L'HUMANITÉ DANS LE PRÉSENT.

KYRIOLOGIE.

LE CÉLIBAT, ou théorie de l'initiative individuelle.

LA FAMILLE, ou théorie du mariage et de la paternité.

LE GROUPE, ou théorie des fonctions professionnelles.

LA COMMUNE, ou théorie des fonctions administratives et judiciaires.

L'ÉTAT, ou théorie des fonctions gouvernementales.

L'HUMANITÉ, ou théorie des fonctions sacerdotales.

KYRIOLOGIE. — Ce qui traite de l'autorité individuelle.

L'ensemble des célibataires peut être considéré comme une réserve où puisent l'industrie, l'armée, la police, l'administration, les gouvernements et les religions. Le rôle que l'homme joue dans ces grandes fonctions doit être connu de tous ceux qui veulent provoquer leur fonction sociale au lieu de l'attendre, et vivre conformément à leurs aptitudes.

L'homme marié revêt la fonction de chef de maison, et à ce titre doit connaître l'économie domestique, l'art de faire régner l'harmonie dans son intérieur, et, s'il est père, celui d'élever ses enfants.

L'homme engagé dans des fonctions de groupe a des valeurs de toute nature à gérer, soit en qualité de propriétaire, soit qu'il exerce une profession, soit enfin qu'il ait commission de diriger ou de surveiller une association quelconque.

Dans la commune, qui est une association des citoyens directement soumise à l'autorité gouvernementale, les fonctions sont : — consultatives, et comportent un mandat des administrés ; — exécutives, et comportent un mandat du gouvernement. Dans ce dernier cas, on dit qu'elles embrassent la magistrature civile et judiciaire.

Il en est de même dans l'État où les fonctions de la commune sont généralisées à la société entière, et constituent soit un conseil et un contrôle sociaux, soit une magistrature supérieure dont la personnification suprême est le gouvernant.

Mais, dans la hiérarchie sociale, les fonctions sont d'autant moins nombreuses que la société est mieux ordonnée ; l'immense majorité des hommes s'en trouve nécessairement exclue. Où exercera-t-elle son autorité ? Dans un sacerdoce quelconque, et, sous le titre de sacerdoce, il faut comprendre toute fonction inspirée directement par l'amour de l'Humanité. C'est à cette initiative des individus dans la société que nous devons l'assistance publique et mutuelle, les congrès scientifiques, les académies, et toutes les institutions publiques ou privées destinées à accroître le bien-être physique, intellectuel et moral de l'Humanité.

ÉTUDE DE L'HUMANITÉ DANS SES ÉLÉMENTS.

L'HUMANITÉ DANS L'AVENIR.

ÉDUCATION.

Pédiographie, ou description de tous les systèmes d'Éducation.

Idioristique, ou théorie des aptitudes.

Mathésionomie, ou théorie de l'Instruction.

Théorie de l'éducation.

Pédiographie. — Description de l'éducation.
Idioristique. — Étude de ce qui est propre à chaque individu.
Mathésionomie. — Lois de l'enseignement.

L'avenir de l'Humanité est tout entier dans l'Éducation, car les générations nouvelles sont chargées de perpétuer les sociétés qui leur donnent naissance.

« Nous avons ici à étudier d'abord tous les moyens qui ont été employés ou qui le sont encore pour l'instruction et l'éducation des enfants, des jeunes gens et même, en certains cas, des hommes faits...

« Dans l'Éducation, il est un élément qui ne se révèle point à l'observation immédiate, qu'on ne peut découvrir qu'à force de recherches. C'est le caractère de l'élève, ses goûts, ses passions, les divers degrés d'aptitude qu'il a pour les différents genres d'instruction, etc. La détermination des qualités propres à ceux dont on dirige l'éducation et les moyens de parvenir à cette détermination ont fourni le sujet de considérations d'une haute importance dans plusieurs ouvrages relatifs à l'éducation ; mais il resterait peut-être à y consacrer un ouvrage spécial qui aurait vraisemblablement une grande influence sur l'Éducation publique et privée...

« Il faut ensuite comparer tous les objets d'instruction possibles, tous les groupes de vérités qui constituent les sciences, et, d'après leurs rapports de similitude, de connexion et de subordination, définir et classer chaque groupe, ainsi que j'ai essayé de le faire dans cet ouvrage (*Essai sur la philosophie des Sciences*) et, pour chaque science, reconnaître le point où elle est arrivée, prévoir les progrès qu'on peut espérer et déterminer quelles méthodes doivent être suivies, soit pour l'enseignement, soit dans la recherche de nouvelles vérités...

« Reste enfin à examiner les effets des divers genres d'éducation et toutes les circonstances qui peuvent en modifier les résultats ; quels sont, par exemple, les avantages et les inconvénients respectifs de l'instruction publique et privée, de l'éducation sévère ou trop indulgente ? Faut-il laisser les enfants libres dans le choix des études qui leur plaisent, ou faut-il leur imposer chaque jour une tâche et user de contrainte pour les obliger à la remplir. Quels sont, en un mot, les moyens les plus propres à former le caractère de l'élève, à l'armer contre le malheur et les passions, et enfin, à faire de lui un homme à la fois éclairé et vertueux (1). »

(1) Ampère, *Essai sur la philosophie des sciences.*

Tels sont les principaux ensembles de la science échelonnés dans l'ordre de la complication progressive des connaissances humaines.

On peut remarquer que chaque science jette un nouveau jour sur celles qui la précèdent, qu'elle prend elle-même un nouvel aspect dans celles qui la suivent, et que, par conséquent, pour bien posséder un ensemble quelconque de connaissances, il faut avoir une notion de tous les autres.

Nous allons maintenant, dans notre plan raisonné, indiquer sommairement :

Les principales constatations de nos connaissances, le caractère de leurs objets, les modifications ou *modes* des faits étudiés, la méthode, l'histoire et la critique particulières à chaque science.

PLAN RAISONNÉ

DES

CONNAISSANCES HUMAINES

SCIENCES EXACTES OU MATHÉMATIQUES.

LE TEMPS, L'ESPACE ET L'ACTION.

I

BUT DE LA SCIENCE. — UNITÉ DE SON POINT DE DÉPART.

La Science a pour but de nous faire connaître toutes choses.

Les choses ne peuvent être connues que par l'*action* directe ou indirecte qu'elles exercent sur nous.

L'idée d'*action* est inséparable de l'idée de *temps* et de l'idée d'*espace*, car nous ne pouvons concevoir une action qui n'aurait aucune durée, et qui ne se produirait nulle part.

L'idée d'action est l'idée unique d'où l'on doit déduire toutes les autres.

II

CONCEPTION GÉNÉRALE ET COMPLÈTE DU TEMPS, DE L'ESPACE ET DE L'ACTION.

Les idées que nous pouvons nous faire du temps, de l'espace et de l'action sont complètes, car la réflexion nous oblige à reconnaître que :

1° Le *temps* est éternel, c'est-à-dire qu'il n'a ni commencement ni fin;

2° L'*espace* est illimité, c'est-à-dire qu'il n'est pas de portion d'espace si grande qu'elle ne puisse être enveloppée dans des portions d'espace de plus en plus grandes, ni de portion d'espace si petite qu'elle ne puisse être l'enveloppe de portions d'espace de plus en plus petites.

3° L'*action* est à la fois éternelle et illimitée, puisqu'elle se produit dans l'éternité des temps et dans l'infini des espaces.

III

DU TEMPS

1° DE LA DURÉE.

Nous n'arrivons pas du premier coup à concevoir le temps comme éternel; nous lui supposons d'abord un commencement et une fin.

Le temps, ainsi conçu, prend le nom de *durée*.

Il y a des êtres, les éphémères, qui ne vivent qu'un jour. Pour eux, le temps paraît commencer à l'aurore et finir au crépuscule; mais, s'ils étaient doués de raison, ils sauraient que leur naissance et leur mort ne sont que les deux termes d'une division du temps appelée *jour*, et que les jours qui ont précédé et suivront la durée de leur existence sont incalculables.

L'homme peut vivre un siècle ; mais il sait que d'autres hommes ont vécu avant lui, et d'autres hommes avant ceux-là. Il sait que le temps est indépendant de son existence, que la somme qui lui en est départie est infiniment petite, s'il la met en regard de celle de l'humanité. Tous les hommes peuvent cesser d'être, sans que, pour cela, les siècles cessent de se succéder. Nous pouvons également imaginer une époque où il n'y avait pas d'hommes, mais nous serions déraisonnables si nous voulions conclure qu'avant cette époque, et parce que des êtres comme nous n'étaient pas là pour les compter, les siècles ne se soient pas précédés à l'infini.

Notre supposition d'un temps dont on détermine le commencement et la fin, loin de nier l'éternité, contribue donc à la rendre plus évidente.

2° DES NOMBRES. — ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE.

Nous avons comparé des durées disproportionnées; mais, entre chacune d'elles, nous pouvons en imaginer d'intermédiaires. Les durées de la fleur

et de l'oiseau, par exemple, sont comprises entre la durée de l'éphémère et celle de l'homme.

En y réfléchissant un peu, nous remarquons que chaque durée, comprise dans une durée quelconque, peut contenir elle-même d'autres durées en quantité infinie, parce que chaque espèce d'êtres a sa durée propre et distincte de toutes les autres.

Si nous pouvions distinguer toutes les durées possibles, nous aurions évidemment un premier moyen de distinguer les choses qui leur correspondent.

Ce problème, qui parait absurde à première vue, a cependant été résolu par la Science, car elle a créé une méthode à l'aide de laquelle on peut déterminer une durée quelconque, d'une façon tellement exacte que l'esprit le plus difficile doit s'en déclarer satisfait.

Cette méthode est celle des *nombres*.

Le nombre n'est au fond que l'expression abstraite de la durée, car il faut entendre essentiellement par nombres les noms et les signes spéciaux qui indiquent les intervalles de chacune de nos constatations : *deux*, *trois*, *vingt*, *mille*, doivent être entendus comme s'il s'agissait de *deux*, *trois*, *vingt*, *mille durées*, pendant lesquelles notre esprit passe d'un objet à un autre.

Chacun sait que les nombres peuvent être variés à l'infini, en grandeur comme en petitesse, sans qu'un seul d'entre eux puisse être confondu avec aucun des autres. On voit déjà que toutes les durées peuvent être exprimées en nombres.

Enfin, les nombres peuvent s'obtenir successivement, un à un, ou simultanément en les combinant par groupes. Les conséquences de ces compositions successives ou simultanées font l'objet de l'*Arithmétique*, ou science des nombres.

Lorsqu'on cesse de considérer les nombres individuellement pour les considérer au point de vue des fonctions qu'ils doivent remplir dans le calcul, on les trouve alors engagés dans des lois d'ensemble qui constituent l'*Algèbre*, ou science des équations.

IV

DE L'ESPACE.

1° DES VOLUMES.

Quand, au lieu de considérer l'espace comme infini, nous le supposons limité de toutes parts, il prend le nom de *volume*.

Lorsqu'un rayon de soleil pénètre à travers la fente d'un volet, dans un

appartement sombre, il trace dans l'espace une bande lumineuse où fourmillent des myriades de points brillants, si petits qu'on renonce à calculer ce qu'il en faudrait pour constituer un corps semblable à une goutte d'eau. En regard d'une de ces molécules de poussière, la goutte d'eau devient une immensité.

Mais cette goutte d'eau, monstrueuse si nous la comparons à l'infiniment petit, devient elle-même un rien à côté de l'Océan, et nous concevons une autre immensité.

L'Océan, à son tour, avec le globe qui le porte, se résume en un point imperceptible dans l'ensemble des astres qui peuplent les cieux; enfin cet ensemble lui-même n'est qu'une molécule de poussière lumineuse au sein d'immensités qui s'effacent les unes dans les autres.

Il n'est donc pas de volume si grand qui ne soit enveloppé dans un volume plus grand, ni de volume si petit qui n'enveloppe un volume plus petit.

Notre supposition de l'espace limité, loin de nier l'espace infini, contribue à le rendre plus évident.

2° DES FORMES — GÉOMÉTRIE SIMPLE.

Les volumes, comme les durées, sont en nombre infini; il importe également de les distinguer les uns des autres.

Cette distinction s'établit d'abord à l'aide des *formes*.

On appelle *forme* le contour d'un volume dont on connaît exactement toutes les limites. Nous confondons généralement, mais à tort, l'idée de volume avec l'idée de corps: les volumes d'une pierre et d'un arbre ne sont pas la pierre ni l'arbre, mais seulement la portion d'espace occupée par ces corps : cette portion d'espace est encore présente à l'esprit quand le corps a disparu Nous pouvons, de même, concevoir des formes dont nous n'avons jamais vu les corps, et ces formes sont réelles pour notre intelligence.

Les formes peuvent être variées à l'infini; cependant la Science est parvenue à les distinguer les unes des autres à l'aide de surfaces et de lignes. Les lois de ces variations sont établies par la *Géométrie*, ou science des formes.

3° DES GRANDEURS. — GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

On pourrait croire qu'il suffit de distinguer toutes les formes pour distinguer tous les volumes; il n'en est rien cependant, car des formes semblables peuvent différer en grandeur.

La forme d'une bille, par exemple, est exactement semblable à celle d'un boulet et à celle du soleil ; ces trois corps ont la même forme, dont le type général est la sphère.

Mais ces trois formes n'ont pas les mêmes proportions. A la distinction des volumes par leurs formes, il faut donc ajouter la distinction des formes par leurs grandeurs.

Les grandeurs se déterminent par les nombres de durées égales qu'un mouvement régulier mettrait à les parcourir.

L'intervention des nombres dans l'étude des formes est du ressort de la *Géométrie analytique.* On a l'habitude d'introduire les lois élémentaires de ces interventions dans les traités de *Géométrie simple;* mais ce n'est que pour préparer l'esprit aux procédés de l'analyse géométrique.

V

DE L'ACTION.

1° DES MODES.

L'idée d'*action* doit s'appliquer à tout ce qui existe. Elle est indépendante en effet des idées de mouvement ou de repos. Une pierre a de l'action sur nos sens, bien qu'elle paraisse dans l'état d'immobilité le plus complet ; et, pourtant, en affirmant son existence, elle agit d'une façon plus ou moins directe sur nous.

L'action se produit dans l'éternité et dans l'infini ; mais nous ne lui concevons d'abord qu'une durée et uno forme quelconques.

L'action ainsi considérée prend le nom de *mode,* ou manière d'agir.

Un éclair brille : sa durée est infiniment courte et sa forme peu saisissable; mais l'action qui le détermine est permanente. L'électricité, qui a donné naissance au phénomène, est aussi ancienne que le monde, et si l'on voulait en rechercher l'origine dans le temps et dans l'espace, il faudrait renoncer à la trouver, car on remonterait, de causes en causes, à l'infini.

L'action qui s'est manifestée dans l'éclair persiste également après son *mode.* L'électricité d'un éclair ne se perd pas plus que l'eau d'une goutte de pluie; on peut l'emmagasiner, elle ne s'anéantit pas ; ses éléments constitutifs se dispersent comme les soldats d'une armée licenciée, qui rentrent dans leurs foyers. Nous ne tarderons pas à reconnaitre que, s'il fallait suivre cette électricité à travers tous ses *modes,* on en poursuivrait les transformations à l'infini.

L'idée de *mode*, ou d'action relative, n'est pas plus contradictoire de l'idée d'action éternelle et illimitée que celle de la durée et du volume ne le sont de l'éternité et de l'infini. L'action relative se confond dans l'action absolue quand on tient compte de toutes les variations qu'elle subit.

2° DES DIFFÉRENTS MODES DE L'ACTION.

Ces variations sont nombreuses, mais elles rentrent dans les trois *modes* connus sous les noms de *mouvement*, de *force* et de *corps*.

Dans un bateau à vapeur, par exemple, la chaleur dégagée par le foyer transforme l'eau de la chaudière en vapeur; cette vapeur agit sur un piston qu'elle chasse en ligne droite de bas en haut; le piston fait mouvoir une tige qui oscille sur son point d'attache et dont l'extrémité décrit une courbe circulaire au centre de laquelle l'axe des roues est mis en mouvement; sous l'impulsion des roues, enfin, le bâtiment s'avance en ligne droite.

Le jeu du piston est un *mouvement* vertical; celui de la tige est un *mouvement* à la fois oscillatoire et circulaire; celui des roues est un *mouvement* circulaire; celui du bâtiment est un *mouvement* horizontal.

La chaleur est la *force* qui détermine ces mouvements.

Le piston, la tige, la roue, le bâtiment, sont des *corps* qui obéissent à la force et sont régis par les mouvements.

3° DU MOUVEMENT. — CINÉMATIQUE.

Quand, dans une durée plus ou moins longue, les éléments d'une forme quelconque se déplacent, il y a *mouvement*.

Le mouvement peut être étudié indépendamment de la force qui le sollicite et des corps qu'il met en jeu. Les forces et les corps peuvent en effet changer sans faire varier les mouvements.

Dans l'exemple qui vient d'être cité, il est facile de constater qu'une force différente de celle qui produit la vapeur, agissant sur des corps d'autre nature que ceux du mécanisme, n'entraîne pas de modification dans les mouvements. Les bras des hommes, un mécanisme en bois au lieu d'un mécanisme en fer, pourraient fonctionner dans les mêmes conditions, et produire les mêmes résultats.

L'étude des mouvements, considérés indépendamment des forces qui les sollicitent et des corps qu'ils dirigent, fait l'objet d'une science appelée *Cinématique*.

La Cinématique a pour but de déterminer les durées et les formes des mouvements, ce qui ne pourrait se faire d'une manière complète sans la connaissance préalable des sciences que nous avons déjà mentionnées, car les mouvements peuvent affecter toutes les durées et toutes les formes possibles.

La Cinématique détermine également les lois par lesquelles un mouvement d'une certaine durée et d'une certaine forme peut se transformer en un mouvement d'une autre forme et d'une autre durée quelconques.

4° DES FORCES. — STATIQUE.

On entend par *force* tout mode d'action capable de déterminer un mouvement quelconque.

La même force peut produire les effets les plus variés, et en apparence les plus contradictoires. C'est ainsi que la pesanteur maintient un pan de muraille vertical, et détermine la chute d'un pan de muraille incliné.

Toute force normale tend à placer les corps dans les conditions les plus stables et les plus régulières de leur milieu.

Pour connaître une force, il faut déterminer, séparément d'abord, puis simultanément, sa durée, sa forme et son mouvement.

Une force peut neutraliser une ou plusieurs autres forces. C'est ainsi que deux forces égales et contraires se neutralisent réciproquement. Quoique l'effet produit soit nul, les deux forces subsistent sans altération ; il suffit en effet de modifier l'une d'elles pour qu'aussitôt l'autre cède ou l'emporte, et que le mouvement se produise.

La Science attache la plus grande importance à l'étude de la neutralisation des forces qui fait l'objet de la *Statique*.

La Statique, considérée à son point de vue le plus général, a pour but de déterminer comment on peut soustraire un objet quelconque à l'action des forces qui le sollicitent. Quand elle est parvenue à ce résultat, elle peut disposer de cet objet à son gré, car elle a vaincu toutes les résistances capables d'atténuer la puissance dont elle veut se servir.

C'est ainsi qu'une pierre de taille, soulevée de terre par un mécanisme quelconque et suspendue à une chaîne, peut être facilement déplacée par la main d'un seul homme. La force naturelle de la pesanteur, qui soudait en quelque sorte cette pierre au sol, a été neutralisée par la force artificielle qui la tient en suspension.

5° COMPOSITION DES FORCES ET DES MOUVEMENTS. — DYNAMIQUE.

D'après ce qui vient d'être dit, on comprendra facilement la nécessité d'une nouvelle science ayant pour but d'étudier les puissances qui mettent en jeu un mécanisme quelconque, quand il a été préalablement réduit à l'état d'indépendance statique ; cette science porte le nom de *Dynamique.*

La Cinématique a pour but de déterminer les mouvements indépendamment des forces ; la Statique a pour but de déterminer les forces indépendamment des mouvements ; la Dynamique a pour but de déterminer les lois des différentes combinaisons des forces avec les mouvements.

Ces trois études constituent une science générale connue sous le nom de *Mécanique rationnelle.*

6° DE L'INERTIE. — DE LA MATIÈRE ET DES CORPS. — MÉCANIQUE MOLÉCULAIRE.

On entend par *inertie* un mode d'action dans lequel aucun phénomène de mouvement propre ne tombe sous nos sens.

L'idée d'inertie n'entraîne pas l'idée d'*immobilité*, car une chose inerte obéit indifféremment à toutes les forces qui la sollicitent. Une balle lancée par un fusil parcourt un chemin considérable avec une extrême rapidité, sans cesser pour cela d'être inerte ; il suffit que l'origine du mouvement ne soit pas dans la chose mue.

La Science a depuis longtemps substitué l'idée d'inertie à l'idée d'*immobilité*, car cette dernière, prise dans un sens rigoureux, est absurde. Il n'y a rien qui ne puisse être soumis au mouvement dans un temps quelconque. On ne connaît d'ailleurs aucune chose qui ne soit en activité, soit par elle-même, soit sous l'influence de forces extérieures et communes au milieu qui l'entoure.

Les manifestations de l'inertie prennent le nom de *corps*, et constituent ce qu'on appelle la *matière ;* la matière d'ailleurs n'est qu'un mode particulier de l'action.

Dans toute molécule des corps il y a des forces et des mouvements propres. L'étude des lois de ces phénomènes constitue une science dont les éléments encore épars peuvent former un traité de *Mécanique moléculaire*.

VI

MÉTHODE.

La Science repose donc rigoureusement sur la conception de l'action considérée à la fois comme éternelle et illimitée à travers ses variations.

Chacune des variations de l'action se manifeste par des nombres, sous une forme et avec un mode quelconques.

De là trois sciences de premier ordre :

La science des nombres, qui comprend l'*arithmétique* et l'*algèbre*.

La science des formes, qui comprend la *géométrie simple* et la *géométrie analytique*.

La science des modes de l'action (science de la *Mécanique* envisagée à son point de vue le plus général), qui comprend la *cinématique*, la *statique*, la *dynamique* et la *mécanique moléculaire* (1).

VII

HISTOIRE.

Les mathématiques ont été constituées en science dès les temps les plus reculés; mais elles étaient particulièrement en honneur chez les Grecs.

Pythagore faisait reposer toutes choses sur les nombres ; Platon étendit cette manière de voir aux *formes abstraites*, étymologie grecque du mot *idée*.

L'école de Platon et les Néo-Platoniciens étudièrent les propriétés des sections coniques. Ce travail, accompli par simple curiosité, permit, quinze siècles plus tard, de déterminer la nature des courbes décrites par les planètes autour du soleil.

Les mathématiques sommeillèrent ensuite pendant plus de mille ans et ne reprirent vigueur qu'avec la civilisation arabe, à laquelle il faut faire remonter l'origine de l'algèbre, mais la date de leurs plus rapides progrès est celle de la Renaissance, qu'on peut considérer comme le berceau de la science moderne.

Elles jouèrent dès lors un grand rôle dans la philosophie, rôle qu'elles semblent avoir momentanément abdiqué. Descartes, Pascal, Spinosa, Malebranche, Leibnitz, d'Alembert, furent de grands mathématiciens.

VIII

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Les sciences exactes sont les plus rebutantes au premier abord, mais il suffit que le lecteur en ait une idée pour saisir la déduction et l'enchaînement des connaissances humaines. Quand il aura parcouru le cercle entier de ces connaissances, il appréciera l'importance de ces études préliminaires,

(1) Ampère. *Essai sur la philosophie des sciences.*

en dehors desquelles on ne peut asseoir aucune appréciation exacte des faits et des lois de toutes les autres sciences.

Le point sur lequel il importe d'insister, même pour les personnes qui ont déjà fait quelques études scientifiques, c'est l'idée de l'action universelle et absolue, affectant toutes les variations, même celles qui semblent tout d'abord étrangères à l'action.

La majorité des hommes qui, dans l'antiquité, niait l'éternité, au moyen âge, l'illimité, se refuse aujourd'hui à concevoir la persistance absolue de l'action dans le temps et dans l'espace, parce qu'il lui faudrait renoncer à l'idée du repos absolu ; elle s'en tient toujours à la vieille théorie de l'antagonisme, issue d'un vice héréditaire de jugement qui consiste à s'abstenir, faute d'un examen radical. Il n'y a pas plus de principe de repos en opposition avec le principe d'action qu'il n'y a de principes de froid, de ténèbres, de néant, en opposition avec les principes de chaleur, de lumière, d'être. Deux principes antagonistes ne peuvent subsister en face de la raison ; ou l'un d'eux l'emporte sur l'autre et le réduit à néant, ou ils sont d'égale valeur et s'annulent réciproquement, si toutefois, ce qui est le cas le plus général, la raison ne s'est pas annulée d'elle-même par avance.

L'idée d'inertie ne correspond qu'à l'idée d'une lenteur extrême de l'action, encore cette idée est-elle relative. Nous savons quelle est la vitesse de l'oiseau ; cette vitesse est nulle en présence de la rapidité de l'éclair. Si l'éclair se personnifiait dans un être pensant, cet être pensant serait-il admis à conclure que rien ne se meut sur la terre en dehors de lui ? L'observateur qui, dans le cours de son existence, ne constaterait aucune modification dans une roche de sédiment, serait-il admis à nier le fait incontestable du passage de cette roche par différents états ?

On a vu que la mécanique n'a pu concevoir l'inertie que comme une neutralisation de forces, c'est-à-dire comme une action latente, car l'action même n'y est pas annulée ; elle se manifeste aux observateurs patients et exercés. Les corps les plus inertes, les minéraux, se développent par voie d'agrégation, comme les végétaux par voie d'assimilation, et les animaux par voie d'absorption. Les trois règnes de la nature présentent donc une activité incessante. Pendant que des milliards d'êtres croissent, végètent, se meuvent, la masse commune qu'ils constituent, la Terre, les emporte avec un tournoiement vertigineux dans une courbe immense dont le soleil est le centre. Le soleil et son cortége de planètes se déplacent eux-mêmes dans les abîmes de l'infini sidéral. Que l'ensemble de tant de mouvements soit circonscrit dans un espace aussi volumineux qu'on le voudra, nous serons toujours en droit de concevoir cet espace en présence d'un être infiniment plus grand, doué comme nous de raison ; et cet être ne percevra notre uni-

vers que comme un point immobile, semblable à l'un des fragments microscopiques de cette matière qui nous paraît inerte.

Il y a assurément des mondes énormes pour lesquels notre univers n'est qu'un grain de poussière lumineux, comme il peut y avoir des mondes imperceptibles dans chaque grain de poussière que nous foulons aux pieds. L'être infiniment grand que nous supposons en présence de notre ciel devient nécessairement un être moyen au milieu des phénomènes qui lui sont proportionnés. Il devient infiniment petit quand nous considérons son monde comme noyé dans une autre immensité. C'est ainsi que l'homme lui-même est infiniment grand en présence de l'infiniment petit, infiniment petit en présence de l'infiniment grand, et qu'il est un être moyen dans son milieu. Si les lois de ce milieu sont établies d'une manière absolue, indépendamment des phénomènes qui les confirment, elles peuvent s'appliquer à tous les ordres d'infini.

En présence de ces conclusions rigoureuses, irréfutables de la raison, il faut abandonner nos idées banales sur les éléments matériels simples. Ces éléments n'existent nulle part, et le géant qui déclarerait notre univers élément matériel simple du sien, ne serait pas moins déraisonnable que l'homme quand il veut trouver dans une molécule matérielle, si petite qu'elle soit, un des éléments simples du globe terrestre.

Il faut donc conclure que, l'infiniment petit n'ayant pas de limites, la matière n'a pas d'éléments matériels simples, et qu'elle n'est autre chose qu'un mode particulier de l'action restreinte à des formes persistantes et rigoureuses.

Nous classerons donc tous les phénomènes de résistance dans le mode d'action auquel on a donné le nom de *matière*. On doit entendre ici par *résistance* la propriété d'un certain ensemble de mouvements à persister dans un système, sans se laisser transformer par un autre système de mouvements. Cette idée n'est pas neuve dans la science ; un de nos physiciens les plus illustres l'a formulée au début même d'un de ses principaux ouvrages : « On conçoit la *résistance*, dit-il, et on l'appelle *matière* (1). »

Est-ce à dire que l'existence de la matière soit purement phénoménale ? Oui, si l'on veut dégager l'idée de matière de l'idée d'action ; non, si l'on considère la matière comme un des modes de l'action. Quand nous disons que la matière est réelle, ce n'est pas d'une réalité de forme que nous voulons parler, c'est d'une réalité de fond, inhérente à toutes les manifestations phénoménales du mouvement. Elle exerce en effet sur nous des actions identiques à celles que nous exerçons sur nous-mêmes ; la traiter d'illusion

(1) Pouillet, *Traité de physique*.

serait nous traiter de fantômes; nier son existence équivaudrait à nier la nôtre. Aussi, lorsque nous nous considérons comme une manifestation irréfutable de l'action, nous devons accorder la même créance à la matière ; et, dans cette créance, le consentement banal des sens doit faire place à un consentement supérieur de l'intelligence, c'est-à-dire à une certitude absolue. Quelles que soient les existences que l'on conçoive, il n'en est pas une où on puisse supposer que les phénomènes classés ici-bas sous le nom de matériels soient absents, parce qu'il faudrait supposer que cette existence est en dehors de l'action.

Descartes avait entrevu la vérité quand il s'écriait : « Donnez-moi de l'étendue et du mouvement, je referai le monde ! » L'étendue était de trop ; Spinosa la conçut comme une modalité du mouvement, et ramena ainsi toutes les constructions philosophiques à la seule vraie conception primordiale. Malheureusement l'étude des sciences mathématiques, au commencement du XVII[e] siècle n'était pas assez avancée pour le soustraire à l'écueil du panthéisme ; il fit rayonner le monde d'une seule action initiale, permanente, absolue, sans savoir que des durées, des étendues et des actions peuvent se développer à l'infini, tout en restant enfermées dans des limites finies, et qu'il y a, comme on l'a fait remarquer, « des éternités d'ordres éternels, des infinités d'ordres infinis les uns par rapport aux autres (1). »

IX

LACUNE DANS LES SCIENCES EXACTES.

Mais, sans se laisser entraîner aux digressions philosophiques, qu'il suffise d'avoir établi le principe d'action comme base de tous les phénomènes matériels On peut maintenant concevoir la possibilité d'une théorie de l'action, réelle, rigoureuse et complète qui soit à la hauteur des théories du temps et de l'espace. Ce qu'on entend aujourd'hui par *Mécanique* est une science incomplète livrée presque entièrement aux expérimentations.

C'est de l'attention seule, plutôt que de la raison, que les mécaniciens cherchent à s'inspirer ; heureusement les découvertes physiques, malgré l'opposition des meilleurs expérimentateurs aux théories préconçues, sont fatalement envahies par la théorie mathématique qui les condense et les féconde.

Tout en constatant une lacune capitale dans le développement des connaissances humaines, l'esprit conçoit donc la certitude de la combler. La science

(1) Émile Lamé, *Magasin de librairie*, avril 1860. — *Du rôle des sciences à notre époque.*

des modes de l'action n'est pas à constituer de toutes pièces ; toutes les vérifications mathématiques introduites dans les faits d'expérimentation sont déjà autant de paragraphes de la nouvelle mécanique ; il suffit de les distraire de leur objet spécial pour les approprier à leur destination.

A ces garanties d'une constitution possible de la véritable mécanique, il faut ajouter celles qui résultent du perfectionnement des sciences du temps et de l'espace ; car, en déterminant toutes les durées et toutes les formes possibles, ces sciences déterminent par avance toutes les durées et toutes les formes de l'action qui tombe sous nos sens. Il reste à préciser les lois des variations du mouvement ; or, ces lois relèvent plutôt de la raison que de l'expérience. L'expérience est limitée et par conséquent incapable de constituer une théorie supérieure ; elle peut bien suivre les différentes phases d'une variation, quand ces phases n'ont de durées ni trop longues ni trop brèves, de formes ni trop amples ni trop menues, quand les successions des phénomènes ne sont ni trop lentes ni trop précipitées ; elle peut consulter la tradition pour noter les déplacements des étoiles, recourir au microscope pour signaler l'existence des monstres infusoires ; mais ces moyens ont eux-mêmes leurs limites : l'infiniment petit et l'infiniment grand leur échappent. L'esprit seul, qui, de la simple perception de la durée et des formes s'est élevé à la conception de l'éternel et de l'infini, l'esprit seul peut embrasser la conception absolue de l'action, en déterminer les lois, en prévoir tous les accidents possibles d'une manière définitive.

X

DU ROLE DES SCIENCES EXACTES.

Quand on est arrivé à concevoir l'action comme la réalité même des choses, on conçoit du même coup l'importance des sciences exactes. Ces sciences élèvent à un si haut degré l'intelligence humaine qu'elles font tomber tous les voiles de l'inconnu. Elles ont en effet permis à Képler d'établir les lois de notre système solaire, à Laplace d'enchaîner tous les mouvements célestes dans des formules rigoureuses, à Leverrier d'annoncer l'existence d'un monde quatre cents fois plus gros que la terre, et que personne n'avait jamais vu. Si elles donnent à notre raison une portée presque divine, en lui permettant de poursuivre, de mesurer et de peser des globes immenses dans les espaces infinis, elles constituent, dans un ordre de connaissances plus immédiates, les seules bases et les seules vérifications de tout progrès.

Le caractère essentiel de leur rôle s'affirmera de lui-même à mesure que

nous poursuivrons notre entreprise. Aussi le lecteur consacrera-t-il à leur exposition une attention et des efforts qu'il ne déploierait pas ici.

Nous allons passer maintenant à l'exposition des sciences qui ont trait aux choses sensibles. Qu'il nous soit permis de faire une réserve : Les modes d'action qui tombent sous les sens ne se révèlent à nous qu'en vertu d'une éducation particulière de nos organes. Ils sont donc nécessairement restreints au degré d'activité de ces organes eux-mêmes. Ainsi, des formes que nous ne pouvons saisir, parce que leur révélation sensible se succède à de trop rares intervalles, peuvent être saisies par des êtres dont les facultés sont plus lentes; des formes trop menues ou trop déliées pour nous peuvent se révéler nettement à des êtres plus délicats. Notre monde physique n'est donc pas absolu, et ce que nous en connaissons par l'expérience est peu de chose à côté de ce que nous révèle la spéculation des choses abstraites. Tout en nous élevant du connu à l'inconnu, n'oublions pas que l'ensemble des phénomènes perçus par nos sens appartient à un milieu relatif. Or, comme il peut y avoir autant de milieux que de variétés dans l'éducation des organes, il faut songer que les mondes sont infinis, qu'ils se pénètrent et sont comme emboîtés les uns dans les autres.

SCIENCES PHYSIQUES.

SENSATIONS, CONTACTS ET TRANSMISSIONS.

I

CONSTATATIONS GÉNÉRALES.

On appelle faits de la sensation externe ou faits sensoriels, tous les faits dont nous pouvons avoir connaissance par l'intermédiaire des sens.

Les sens sont des appareils destinés à percevoir certains modes de l'action à l'exclusion des autres.

Notre œil n'est pas influencé par le son, notre oreille par la lumière, notre toucher par la lumière et par le son, etc.

Chaque sens, en outre, est affecté dans une moyenne très-limitée que certains appareils artificiels peuvent élargir, mais en dehors de laquelle il n'accuse plus rien.

Faisons vibrer doucement une tige de fer. Cette tige, dans son balancement, chasse l'air à droite et à gauche et y détermine de petites vagues, mais tout est silencieux. — Faisons vibrer plus fort : voici que notre oreille accuse les ondulations de l'air par un bourdonnement grave ; — de plus en plus fort : — le son s'élève et parcourt tous les tons de la gamme, devient aigu, très-aigu, suraigu ; — multiplions les vibrations, nous ne discernons plus rien.

On peut généraliser le nom de gamme à la moyenne dans laquelle toutes nos impressions sensorielles sont limitées.

La sensation n'est donc qu'une perception fort incomplète du monde extérieur; ajoutons qu'elle nous abuse souvent. — Faisons mouvoir un charbon ardent dans l'obscurité ; — nous voyons une trace lumineuse persister aux points où le charbon a passé, mais où il n'est plus. — Écoutons un roulement de tambour ; — notre oreille entend un grondement continu et ne perçoit plus les coups de baguette successifs auxquels il doit naissance. — Touchons légèrement une roue à dents tournée avec rapidité ; — notre doigt ne perçoit

plus qu'un contact uniforme et n'accuse en rien les frôlements successifs de chaque dent. Ces exemples pourraient se multiplier à l'infini.

Gardons-nous pourtant de considérer la sensation comme une illusion; elle est une réalité qu'il faut interpréter avec le contrôle de la raison. C'est là ce en quoi consiste toute la physique. Sans roue, pas de contact; sans tambour, pas de son; sans feu, pas de lumière.

Ces préliminaires établis, voyons quels sont nos sens et à quels modes d'action ils servent d'interprètes.

Les sens sont au nombre de cinq :

La *vue*, qui nous manifeste la lumière.

L'*ouïe*, qui nous manifeste le son.

L'*odorat* ou *flair*, qui nous manifeste les odeurs.

Le *toucher* ou *tact*, qui nous manifeste les résistances ou les corps.

Le *goût*, qui nous manifeste les saveurs.

Outre ces modes de l'action, il en est d'autres qui peuvent affecter deux ou plusieurs sens à la fois : telle la chaleur, quand elle est lumineuse; telle l'électricité, quand elle secoue nos muscles et nous éblouit.

Lumière. La lumière, dans son ensemble, est blanche; elle se colore en se décomposant; elle devient alors successivement rouge, orangée, jaune, verte, bleue, indigo, violette; au delà du violet elle cesse de nous affecter, et nous disons qu'il fait *noir*.

D'une couleur à l'autre, il y a un nombre infini de gradations qu'on appelle *nuances;* c'est ainsi que le rouge vif, vermillon, se décompose successivement en pourpre, en carmin, en rose, etc.

Sons. Les sons comprennent tous les bruits, continus ou discontinus, prolongés ou secs. Ils ont une *intensité*, une *hauteur* et un *timbre*.

Les sons d'une trompette sont plus *intenses* que ceux de la *flûte;* ils ont, comme la flûte, des notes ou *hauteurs* variées; enfin, quand on entend la même note donnée par la trompette et la flûte, cette note emprunte à chacun des instruments un caractère particulier, qui est le *timbre*.

Odeurs. Les odeurs sont des émanations subtiles qui proviennent des corps et nous les révèlent à distance.

Résistances ou corps. Lorsque nous éprouvons la sensation de la résistance, nous disons qu'elle provient d'un corps.

Les corps sont plus ou moins résistants; ceux que nous pouvons pénétrer dans tous les sens sont appelés *fluides*, les autres *solides*. L'air et l'eau sont des fluides; la pierre et le fer sont des solides.

Saveurs. Chaque corps renferme des émanations intimes qui se révèlent quand on les broie ou les dissout; on les appelle saveurs.

Chaleur. Quand les corps sont graduellement chauffés, ils se dilatent; les solides se désorganisent, bouillonnent, et enfin deviennent fluides.

Electricité. L'électricité se dégage de tous les mouvements des corps; elle existe au fond de tous les phénomènes sensoriels.

La sensation est donc affectée par différents modes, qui sont : la *lumière*, les *corps*, le *son*, les *odeurs et les saveurs*, la *chaleur*, l'*électricité*.

Chaque fois qu'un de ces modes cesse de nous affecter, nous constatons successivement les *ténèbres*, le *vide*, le *silence*, l'*insipidité*, le *froid*, l'*inertie*.

II

DE LA LUMIÈRE. — OPTIQUE.

1° CARACTÈRES GÉNÉRAUX.

La lumière est le mode d'action le plus général et le plus subtil que nous percevions par l'intermédiaire des sens. Il se produit dans les milieux les plus vastes et à des distances infinies.

Pour comprendre le mode d'action de la lumière, il faut supposer que l'univers est plongé dans un fluide insaisissable composé de particules extrêmement fines, en suspension les unes à côté des autres.

Ce fluide est appelé *éther lumineux*, ou simplement *éther*.

Qu'un mouvement intense se produise en un point de l'espace, aussitôt, et tout autour de ce point, il se manifeste un fourmillement des particules éthérées; chacune d'elle s'ébranle comme pour faire le tour du théâtre du mouvement, revient sur elle-même, repart encore, et oscille de la sorte avec une incroyable rapidité.

L'ébranlement commence par la couche de particules qui entoure immédiatement le foyer; il gagne de proche en proche les couches voisines, et s'y propage dans tous les sens avec une vitesse en ligne droite de plus de trois cent mille kilomètres par seconde.

Ce sont les oscillations de l'éther qui affectent l'œil et produisent la sensation lumineuse quand elles ont atteint une certaine intensité.

Les caractères de la lumière sont de rayonner, de se réfléchir et de se réfracter.

La lumière part en ligne droite de tous les points de sa source, c'est-à-dire qu'elle rayonne.

Quand un rayon rencontre un corps, il est en partie renvoyé ou *réfléchi* par la surface de ce corps, en partie absorbé dans l'intérieur du corps.

Dans sa pénétration à travers le corps, il se propage toujours en ligne

droite, mais après avoir fait un coude avec sa direction primitive; on dit alors que le rayon est *réfracté.*

2° MODES.

La lumière, réfléchie ou réfractée, nous manifeste des modes différents, qui sont l'affaiblissement ou le renforcement de son intensité, la coloration et la polarisation.

Un rayon lumineux pâlit toujours quand il est réfléchi ou réfracté; mais si l'on fait converger plusieurs rayons réfléchis ou réfractés sur un même point, on y obtient un foyer de lumière intense. C'est ainsi qu'une boule de verre remplie d'eau, interposée entre une lampe et un objet quelconque, projette une vive lumière sur cet objet.

La lumière blanche se colore presque toujours quand elle est réfractée. Elle prend des teintes différentes, suivant la qualité et l'épaisseur des milieux qu'elle traverse.

Presque tous les corps nous renvoient la lumière après l'avoir diversement colorée.

Dans certaines conditions de réflexion ou de réfraction, la lumière paraît se supprimer ou dévier. On dit alors que la lumière est *polarisée.*

3° MÉTHODE.

Il a été proposé plusieurs méthodes pour l'étude des faits lumineux : la plus répandue est la suivante :

On étudie isolément tous les phénomènes relatifs à la réflexion de la lumière dans la *catoptrique*.

La *dioptrique* étudie tous les phénomènes de réfraction.

Mais comme les phénomènes de réflexion et de réfraction sont souvent engagés les uns dans les autres, on a proposé d'appeler *catadioptrique* la partie de l'optique qui traite simultanément des effets de la lumière réfléchie et réfractée.

Cette méthode, comme presque toutes les méthodes relatives aux sciences d'observation est arbitraire, et ne conduit que d'une manière très-vague à la découverte des inconnues : chaque physicien d'ailleurs a sa méthode particulière, inspirée par les idées qu'il s'est faites de la constitution de l'Univers.

III

DE LA RÉSISTANCE, DE LA MATIÈRE ET DES CORPS.

1° CARACTÈRES GÉNÉRAUX.

Tout ce qui nous résiste s'appelle *matière*.

La matière est solide, liquide ou gazeuse. Dans ces deux derniers cas on dit qu'elle est fluide.

Les fluides gazeux, ou simplement les *gaz*, ne nous font éprouver la sensation de résistance que quand ils sont agités. L'air, qui est le plus répandu de tous les fluides, ne devient sensible que sous forme de vent.

Les fluides liquides, ou simplement les *liquides*, nous résistent au contraire à l'état inerte, mais cette résistance est molle, et nous pouvons la vaincre également dans toutes les directions. L'eau, le plus répandu de tous les liquides, s'accuse par le simple contact, mais se laisse pénétrer dans tous les sens.

Il n'en est plus de même des *solides*, comme la pierre et le fer, qui ne se laissent pénétrer qu'avec effort et résistent toujours énergiquement.

Les solides, les liquides et les gaz ont une constitution commune ; ils se composent de particules, appelées *atomes*, en suspension les unes à côté des autres dans l'infiniment petit, comme les astres dans l'infiniment grand.

Les ensembles divers formés par les atomes prennent le nom de *corps*.

2° MODES. — ATOMISTIQUE.

Tout corps est pondérable, c'est-à-dire qu'il peut être pesé.

Dans les corps, les atomes paraissent garder les mêmes positions les uns par rapport aux autres, mais les distances qui les séparent s'allongent et se raccourcissent tour à tour. Le mouvement se produit à la fois dans toute la masse, ce qui fait que les corps enflent et diminuent sans perdre de leur poids.

L'*attraction* est le caractère essentiel de l'atome. C'est de l'attraction que dérivent toutes les propriétés physiques des corps ; aussi est-il nécessaire de nous en faire une idée.

Tous les atomes sont également attractifs, c'est-à-dire qu'ils s'attirent les uns les autres avec la même intensité. L'attraction est d'autant plus forte que les atomes sont plus rapprochés ; elle confondrait les atomes les uns dans les autres, si ceux-ci n'étaient doués chacun d'un mouvement particulier,

qui restreint le rapprochement à une certaine limite et s'oppose au contact.

C'est en vertu de cette attraction universelle et de la réaction produite par le mouvement propre à chaque atome que se constituent les molécules ou masses élémentaires des corps.

Les molécules sont plus ou moins attractives, selon qu'elles contiennent un plus ou moins grand nombre d'atomes; leurs groupements constituent les corps qui sont plus ou moins condensés.

La quantité d'atomes que contient un corps est accusée par son poids, qui indique le nombre des atomes, ou sa *pesanteur* qui n'est pas autre chose que l'attraction exercée par la masse totale de la terre sur les corps voisins de sa surface.

Le degré de condensation des atomes d'un corps est accusé par la *densité* de ce corps.

La détermination des pesanteurs et des densités est le point de départ do la théorie générale de la matière.

La matière tend constamment à un équilibre que viennent troubler tour à tour le son, la chaleur et l'électricité.

IV

DU SON. — ACOUSTIQUE.

1° CARACTÈRES GÉNÉRAUX.

Tout son est produit par la vibration des molécules d'un corps. Cetto vibration détermine des ondulations dans le milieu où elle se produit.

L'image la plus exacte que nous puissions nous faire des ondulations sonores est celle que produit la chute d'une pierre sur la surface d'une eau tranquille. Il faut concevoir seulement que ces ondulations sont bien outrement rapides, et qu'elles ne s'effectuent pas seulement dans un même plan, mais dans le milieu tout entier. Dans les ondulations sonores, les molécules atomiques oscillent d'avant en arrière par rapport à leur foyer, dans les ondulations lumineuses, les molécules éthérées oscillent de haut en bas.

Le son ne se propage que dans des milieux résistants. Dans un espace vide d'air, une sonnerie d'horloge en activité ne produit aucun bruit.

Le son se réfléchit comme la lumière; on dit alors qu'il est *répercuté* et fait *écho*.

2° MODES DU SON.

Si l'on tend d'une main l'extrémité d'un fil de soie dont les dents compriment l'extrémité opposée, et, si de l'autre main on fait vibrer le fil, on pro-

duit un son dont l'intensité décroît rapidement, mais dont la hauteur et le timbre sont constants. Il suffit pour cela, que le fil reste tendu avec la même force.

Si l'on détend un peu le fil, on remarquera que le son est moins haut ; en continuant à détendre, le son devient de plus en plus grave, jusqu'à ce qu'il s'évanouisse.

Si l'on tend le fil avec plus d'énergie, le son devient de plus en plus aigu.

La vibration de la moitié du fil tendue avec la même force que le fil entier, produira le son aigu qu'aurait donné le fil entier tendu avec une force double.

Ces expériences établissent que la hauteur du son dépend de la multiplicité des vibrations, car un fil court vibre plus rapidement qu'un fil long soumis à la même tension, et un fil long vibre d'autant plus rapidement qu'il est plus tendu.

Elles établissent que l'intensité du son provient de la largeur ou *amplitude* des vibrations.

Enfin une dernière expérience nous apprendra que le timbre dépend de la qualité du corps employé. Dans toutes nos épreuves sur le fil de soie, le timbre est resté le même ; on le modifiera en changeant le fil de soie contre un fil d'archal ou de toute autre nature.

Les expériences que nous venons de faire sont reproduites et multipliées dans l'acoustique avec des instruments bien autrement précis. On peut les vérifier par le calcul.

V

ODEURS ET SAVEURS.

Le physicien n'a pas de connaissances scientifiqués sur les odeurs et sur les saveurs. Il n'y a donc aucune théorie à ce sujet.

VI

DE LA CHALEUR.

1° CARACTÈRES GÉNÉRAUX.

Si l'attraction est un mode d'action en vertu duquel les atomes s'attirent et se groupent, la chaleur est un mode d'action en vertu duquel ils se repoussent et se dispersent.

La chaleur et l'attraction constituent les sous-modes d'un mode plus

général, qui paraît être l'électricité, car l'électricité se dégage chaque fois que l'équilibre des forces attractives et répulsives est troublé.

La chaleur résulte des vibrations imprimées, par le mouvement intime des atomes, au milieu dans lequel les corps sont plongés.

Partout où il y a choc, pression, frottement, traction, mouvement de quelque nature que ce soit, il y a production de chaleur.

Tous les corps possèdent une certaine quantité de chaleur qui leur est propre et permet à la rigueur de les distinguer les uns des autres. Dans un milieu soumis pendant longtemps à la même température, du marbre sera sensiblement moins chaud que du bois.

En général, la chaleur est plus élevée dans les corps légers que dans les corps lourds.

La chaleur se propage dans le même milieu et de la même façon que la lumière : elle rayonne et se réfléchit comme elle.

2° MODES.

Il y a donc une chaleur *latente* ou cachée dans les corps, et une chaleur extérieure ou *température*.

La chaleur latente est accusée par des expériences délicates ; la température est accusée par un instrument qu'on appelle *thermomètre* (mesureur de la chaleur).

Soumettons de la glace à l'action du feu. La glace se résoudra en eau, mais l'eau provenant de cette fusion restera quelque temps à la même température et absorbera une certaine quantité de chaleur qui ne sera pas rendue sensible par le thermomètre. Après ce temps d'arrêt, si le feu reste toujours le même, la température de l'eau s'élèvera régulièrement jusqu'à une certaine limite, où elle stationnera de nouveau, avant de se transformer en vapeur.

Ces temps d'arrêt attestent que l'eau a comme emmagasiné une certaine quantité de chaleur à son point de fusion et une autre quantité de chaleur à son point d'ébullition.

Tout solide soumis, comme la glace, à l'action d'une chaleur intense, se dilate, se désorganise et passe à l'état fluide. — Nous disons à l'état *fluide*, car certains corps, le charbon, par exemple, passent de l'état solide à l'état gazeux, sans s'arrêter à l'état liquide.

Tous les solides peuvent donc être considérés comme des fluides refroidis et rendus opaques.

Dans les transformations que la chaleur fait subir aux corps, elle n'anéantit aucune de leurs molécules pondérables.

Toute chaleur, qu'elle soit latente ou accusée par le thermomètre, sensible ou insensible, se traduit par de l'électricité.

VII

DE L'ÉLECTRICITÉ.

Le rôle général de l'électricité paraît être de présider à l'équilibre des mouvements et de les répartir soit entre les atomes, soit entre les molécules, soit entre les corps. Elle ne se manifeste que quand cet équilibre est troublé.

L'électricité doit donc paraître tour à tour attractive et répulsive. C'est un fait qu'il est facile de vérifier.

Prenons un verre ordinaire, frottons-le énergiquement avec de la laine et approchons-le des corps légers que notre respiration suffit à remuer ; nous verrons ces corps s'élancer soudainement à la surface du verre, où ils resteront fixés. — Tout n'est pas fini ; au bout de quelques instants, les corps soudainement attirés vont être soudainement repoussés. On dirait qu'ils se sont imprégnés du mouvement dont les molécules extérieures du verre avaient été surchargées et le rapportent à la masse commune, la Terre, qui est un immense réservoir d'électricité.

L'électricité peut s'accumuler ; elle devient alors lumineuse et produit des effets terribles, dont les plus connus sont ceux de la foudre.

Certains corps ont la propriété d'être constamment électriques ; mais celui qui manifeste cette propriété avec la plus grande énergie est l'aimant (magnès), d'où l'on a fait le mot *magnétique*. Ampère a montré que les phénomènes magnétiques n'étaient que des phénomènes d'électricité ; il a construit, en effet, des aimants artificiels très-puissants avec de simples courants électriques.

On a, en général, donné le nom d'électricité *dynamique* (agissante) aux phénomènes où l'électricité agit magnétiquement, et celui d'électricité *statique* à tous les autres phénomènes de l'électricité ; mais cette division, très-vague d'ailleurs, est arbitraire comme celle qu'on a essayé d'établir entre l'électricité positive et l'électricité négative, l'électricité attractive et l'électricité répulsive.

L'électricité a modifié complètement les théories générales de la physique en lui apportant des instruments d'une délicatesse exquise ou d'une puissance extraordinaire ; elle tend à envahir la physique entière, et il ne serait pas étonnant qu'elle arrivât un jour à lui donner son nom.

VIII

MÉTHODE DE LA PHYSIQUE.

D'après ce que nous venons de dire, la lumière, la chaleur et l'électricité sont des modes d'action qui se manifestent dans un même milieu, milieu immense, invisible, impondérable, qui baigne et pénètre toute la matière.

L'attraction et le son attestent des modes d'action qui se localisent dans ce milieu, c'est-à-dire qui sont restreints à des espaces limités.

Si, comme on l'a toujours fait, nous appliquons le nom d'atome à toute particule élémentaire douée d'attraction, nous constaterons que tous les phénomènes physiques ne sont pas de l'empire atomistique; car, à l'exception de la matière et des corps, c'est-à-dire des phénomènes qui obéissent à la loi d'attraction, tous les autres phénomènes obéissent à des lois d'influence.

On croyait généralement, au commencement de ce siècle, que tous les phénomènes physiques relevaient de l'empire atomistique. La lumière et la chaleur étaient considérées comme un crachat continu de particules brillante ou chaudes qui ne différaient des particules matérielles que parce qu'elles étaient impondérables.

Cette croyance a dû s'évanouir devant la contradiction des faits, des expériences et des calculs. Elle a néanmoins laissé sa méthode à tous les traités de physique. Les corps constitués des molécules les plus condensées d'atomes formaient les solides; puis, à un degré de condensation moindre, les liquides; à un degré de condensation moindre encore, les gaz; enfin, quand la condensation devenait presque nulle, on tombait dans les fluides impondérables, où figuraient la chaleur, la lumière et l'électricité.

De là quatre séries d'études :

1° Les corps ou solides proprement dits : masses, poids, densités;

2° Les liquides, leur équilibre et leur mécanisme (hydrostatique, hydrodynamique);

3° Les gaz et les vapeurs;

4° Les fluides impondérables : lumière, chaleur, électricité.

L'acoustique dérogeait déjà à la théorie générale; bientôt ce fut le tour de la chaleur, puis de la lumière, et enfin de l'électricité.

Les physiciens prirent alors le parti de poursuivre leurs expériences en dehors de tout classement préalable des faits. Mais si cette abstention est regardée comme profitable aux progrès de la science, elle est préjudiciable à l'enseignement.

La méthode à laquelle nous nous attachons, d'ailleurs, n'est pas particulière aux sciences physiques ; elle est généralisée à une exposition d'ensemble ; aussi ne prétend-elle provoquer ou subir aucune discussion.

Les sciences physiques se rattachent directement aux mathématiques par l'*optique*, qu'on peut appeler une géométrie lumineuse.

Vient alors la théorie de la matière et de tous les phénomènes physiques et généraux de l'attraction, théorie que nous appellerons *atomistique*, parce qu'elle repose entièrement sur l'idée élémentaire d'atome. (Nous lui aurions donné le nom d'*atomique*, si cette qualification n'était réservée à une théorie particulière de la *chimie*.)

L'*acoustique* nous apprend que la matière possède à son tour un mode d'action par influence, ou moléculaire, qui lui est propre.

La théorie de la chaleur, *thermologie*, nous ramène à l'étude des phénomènes qui s'accomplissent dans le grand milieu éthéré, et que traduisent les atomes dans le monde matériel.

Enfin, la théorie de l'électricité et du magnétisme, *électro-magnétique*, résume tous les phénomènes qui s'accomplissent, soit dans le domaine de l'éther, soit dans le domaine de la matière.

IX

APPLICATIONS DES SCIENCES PRÉCÉDENTES.

Nous n'avons d'autres applications à signaler ici que celles des mathématiques. Le calcul est, en effet, le contrôle continuel des expériences physiques, et il y intervient si souvent qu'on a été presque toujours porté à croire que la physique n'était qu'une application des mathématiques.

Cette manière de voir est fausse, comme l'a fort bien démontré un philosophe positiviste (1). Ce philosophe appelait *matérialiste* tout savant pour qui les autres sciences ne sont qu'une application de la science particulière qu'il professe.

La physique se rend indépendante des mathématiques en étudiant des phénomènes sensibles et changeants, tandis que les mathématiques n'étudient que des rapports idéaux et rigoureux. Aussi constate-t-on toujours une différence entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience. L'ingéniosité, absolument exclue du calcul, devient nécessaire dans l'expérimentation.

(1) Auguste Comte.

X

HISTOIRE SOMMAIRE.

Les anciens croyaient que la nature était composée de quatre éléments : la terre, l'eau, l'air et le feu, doués chacun de propriétés spéciales. Ils disaient que ces quatre éléments remplissaient tout l'espace, de manière à n'y pas souffrir de lacunes, parce que « la nature a horreur du vide. »

Cette théorie, dont on s'est moqué sans vouloir l'approfondir, n'était pas plus étrange au fond que celle des atomes universels. Les anciens n'entendaient pas les choses aussi naïvement qu'on veut bien le prétendre ; pour eux, la terre se composait de tous les solides, l'eau de tous les liquides, l'air de tous les gaz, le feu de tous les phénomènes impondérables.

Les anciens connaissaient les lois de l'hydraulique et savaient déterminer la densité des corps.

Mais l'ingéniosité jouait le principal rôle dans l'observation, et la physique n'empruntait aucune rigueur au contrôle du calcul. C'est encore à la Renaissance qu'il faut rapporter la constitution des sciences physiques par le contrôle mathématique.

XI

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Les sciences physiques ont porté et portent encore le nom général de *philosophie naturelle*, qui semble, au premier abord, plus exact que le nom de *physique ;* mais ces deux appellations sont trop générales, et elles ont besoin d'une définition particulière.

Les physiciens n'étudient pas la nature dans les choses ou les êtres qui la constituent, mais simplement dans ses modes sensoriels généraux, en dehors des sentiments que ces modes éveillent en nous.

Les physiciens ne peuvent pas être traités de matérialistes, parce qu'ils excluent l'âme de leurs études ; l'intelligence y joue le plus grand rôle et y manifeste sa supériorité sur la sensation. Ils concluent avec les mathématiciens à l'unité d'un principe suprême, qui est l'action.

Les ignorants se sont toujours révoltés contre la nature, parce qu'elle obéit à des lois qui n'émanent point de l'homme et qui le dominent dans tout ce qu'il a de matériel ; de là cette horreur que tous les demi-savants

ont professée pour la matière; mais il faut se garder de ces mutineries enfantines et savoir dégager sa personnalité, non-seulement de l'étude des choses, mais encore, et surtout, de l'étude de l'homme et de l'Humanité. Nous n'acquérons de connaissances réelles qu'à cette condition.

L'intelligence est impersonnelle. De même qu'elle exclut toute conscience du *moi* dans les mathématiques, elle exclut de la physique tout sens qui est *notre*. De là cet emploi constant d'instruments que le physicien cherche à substituer à ses sens et qui constitue, en dehors du calcul, toutes les certitudes sensorielles.

SCIENCES COSMOLOGIQUES

LE CIEL, L'ATMOSPHÈRE, LA TERRE.

I

PRÉLIMINAIRES.

Il faut entendre par *Cosmologie* tout ce qui a trait aux ensembles de l'univers physique.

Ces ensembles se répartissent en trois grands milieux :

Le Ciel, où l'homme ne peut rien constater qu'avec la vue;

L'Atmosphère, où il se meut;

La Terre, qui lui sert de base.

Les connaissances relatives au Ciel constituent l'*Astronomie*, où le calcul et l'optique suffisent à la détermination de tous les phénomènes.

Il n'en est plus de même quand nous entrons dans l'Atmosphère, où nous nous trouvons en présence des faits de la *Météorologie;* le calcul s'efface peu à peu derrière les procédés de la physique et disparaît presque complètement dans l'étude de la Terre ou *Géologie*.

Le ciel est l'image de la pensée ; calme et lumineux dans ses profondeurs, régulier dans ses fonctions, illimité, insondable, mais toujours limpide dans son immensité. L'atmosphère, image de notre âme, inquiète, changeante, multiforme, gronde avec l'orage, pleure avec le vent, s'assombrit et se rassérène, s'échauffe, se glace, frappe, caresse, s'irrite, s'apaise pour s'agiter encore avec une mobilité dont les causes sont aussi peu connues que celles des passions humaines. La Terre, aux entrailles plastiques, au cœur ardent, source de notre chair et de notre vie, nous sert d'aliment et d'appui ; tou-

jours vierge, toujours grosse de trésors cachés, réceptacle sacré des êtres qui ne sont pas encore, dépôt pieux des restes et des œuvres de ceux qui ne sont plus.

II

LE CIEL. — ASTRONOMIE.

1° CARACTÈRES GÉNÉRAUX.

Le ciel peut être considéré comme formé de trois grandes sphères emboîtées les unes dans les autres, et qui sont, par ordre de grandeur décroissante :

La sphère *sidérale*, ou des étoiles, ou du ciel dit *fixe* parce que nous ne pouvons constater aucune modification dans ses aspects ;

La sphère *planétaire* ou *solaire*, dans laquelle trône notre soleil et se meuvent les astres qui se déplacent sur le fond du ciel fixe ;

La sphère *lunaire*, où se meut la lune, et dont la Terre est le centre.

Pour l'ignorant, ces trois sphères paraissent tourner autour de la Terre en vingt-quatre heures.

C'est une illusion analogue à celle d'un batelier qui, s'abandonnant au fil de l'eau, s'imaginerait immobile et verrait marcher les rives ; ou, plutôt, d'un ciron qui, fixé sur un globe tournant, croirait que le paysage se déplace autour de lui.

Le ciel sidéral se compose d'amas d'étoiles, soleils lointains, dont les groupes affectent, sous le nom de *nébuleuses*, des formes pour la plupart semblables à des œufs ou à des anneaux. La nôtre, dont nous paraissons occuper le centre, est connue sous le nom de *voie lactée*, ou *chemin de Saint-Jacques ;* toujours visible la nuit, quand le ciel est pur, elle nous apparaît comme une immense ceinture lumineuse échancrée à ses attaches.

Le ciel planétaire a pour centre notre soleil. C'est autour de celui-ci que se meuvent, à peu près dans un même plan, qu'on nomme *écliptique*, des globes obscurs appelés *planètes*, au nombre desquels figure la Terre. La plupart des planètes sont escortées par des lunes ou *satellites*, globes également obscurs et beaucoup plus petits, qui jouent, à l'égard de chaque planète, le même rôle que celles-ci à l'égard du soleil.

Le ciel lunaire ne renferme qu'un seul astre, notre unique satellite. Celui-là tourne réellement autour de nous, non pas en vingt-quatre heures, mais en vingt-sept jours. La lune ne nous laisse voir qu'une de ses moitiés et toujours la même, comme un domestique qui tournerait autour de son maître en lui dissimulant soigneusement l'aspect de son dos.

2° MODES CÉLESTES.

Il n'y a pas de modes dans le ciel sidéral ; il est si lointain qu'il échappe au calcul et ne se dévoile que sous l'objectif des télescopes. L'astronomie, en ce qui le concerne, se borne à constater ses aspects, à dresser les catalogues de ses étoiles, à évaluer d'une manière indécise leur prodigieux éloignement et à discuter les traditions ou les apparences qui témoignent de quelques variations fugitives dans sa constitution.

Le ciel sidéral nous présente, en réalité, le spectacle de la plus grande immobilité qu'il soit permis à l'homme de constater dans la nature ; immobilité superficielle, car elle noie dans les profondeurs de l'infini des mouvements dont la grandeur et la rapidité épouvantent notre imagination. Ces mouvements ne se laissent constater que dans la sphère solaire, à cause de sa proximité ; encore cette sphère s'étend-elle à des centaines de millions de lieues.

Le ciel planétaire nous apprend que chaque étoile règne sur un cortége de mondes roulant le long de sillons courbes avec des vitesses vertigineuses. Ces mondes, les planètes, vus de l'un d'eux, qui est la Terre, présentent, indépendamment de leur rotation apparente de chaque jour, des déplacements sensibles sur le fond du ciel fixe. Les uns paraissent se balancer à droite et à gauche du Soleil en variant d'éclat, ce sont les planètes inférieures comprises entre la Terre et le Soleil ; les autres semblent avancer en traçant d'immenses zigzags, ce sont les planètes supérieures qui ne sont pas comprises entre la Terre et le Soleil. Toutes, en réalité, tournent autour de l'astre central comme autant de masses enfermées dans des frondes invisibles et gigantesques manœuvrées par la force solaire. C'est dans la sphère planétaire que l'on constate les premières dérogations à l'uniformité des mouvements célestes. Des astres étranges, apparitions gigantesques et bizarres, les *comètes*, viennent, par intervalles d'une régularité douteuse, sillonner cette sphère, comme pour rappeler à l'homme que le ciel n'est pas régi par un mécanisme aveugle et que le calcul n'y a pas tout prévu.

Les variations constatées dans l'enveloppe lunaire résultent des mouve-

ments et des phases (apparences diverses) de la lune, des mouvements particuliers à la Terre, et des apparitions d'étoiles filantes, de petite dimension, mais en quantité innombrable, qui pénètrent souvent notre atmosphère et s'y enflamment. Nous connaissons les effets que ces étoiles produisent. Sortes de fusées perdues, elles s'abattent quelquefois sur la Terre et prennent alors le nom d'*aérolithes*, *bolides*, *météorites* ou *pierres météoriques*.

III

L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE.

1° PRÉLIMINAIRES.

L'atmosphère est une couche gazeuse qui enveloppe la Terre, tourne avec elle et ne paraît pas s'élever au delà du soixantième de la hauteur totale de notre globe (250 kilomètres environ). On l'évaluait naguère à moins du deux centième (70 kilomètres); mais des observations récentes ont reculé cette dernière évaluation. Elle ne reposait, d'ailleurs, que sur un calcul de probabilités.

Il est à présumer que l'atmosphère n'a pas de surface extérieure exactement limitée. Quant à sa surface intérieure, elle est nettement tranchée par la surface de la terre et des eaux, qu'il faut déterminer dans ses grands ensembles. Cette étude préalable est d'autant plus importante, que la mer et les continents jouent un grand rôle dans les phénomènes météorologiques.

L'atmosphère, à l'état calme, doit être étudiée comme un grand corps. La physique nous renseigne sur sa pesanteur et les variétés de ses densités, mais non sur sa forme, que Laplace imaginait être celle d'une enveloppe lenticulaire, dans laquelle notre globe solide se trouve enfermé, et dont l'arête serait parallèle à l'équateur.

2° MODES MÉTÉOROLOGIQUES.

Nous savons déjà que les eaux, la terre, les étoiles filantes figurent comme acteurs sur le théâtre de l'atmosphère; la lune, le soleil et le mouvement planétaire y jouent également leur rôle.

Examinons d'abord l'effet produit sur l'atmosphère par le mouvement de la Terre considérée comme astre. Notre globe, en tournant sur lui-même en vingt-quatre heures, rétrécit l'atmosphère aux pôles et la renfle à l'équateur. Il présente, en outre, successivement, tous les points de sa surface aux rayons du soleil; de là une nouvelle déformation de l'atmosphère, qui,

dilatée à la fois par la chaleur et l'attraction solaire, s'élève vers l'astre central en prenant la forme d'un œuf, dont notre globe, reculé dans le gros bout, serait le jaune, et dont le petit bout regarderait constamment le soleil.

La lune, de son côté, si elle n'agit pas par sa chaleur, agit plus puissamment par son attraction. Elle altère, à son tour, la forme ovale, en déterminant un renflement considérable sur tous les points qui la regardent. Ce renflement se confond tantôt avec le renflement solaire, tantôt s'en écarte, tantôt le contrebalance, suivant les différentes positions de notre satellite par rapport à nous et à l'astre central. — Qu'arrive-t-il de là? — Le poids de l'air qui comprimait les eaux étant soulevé, les eaux obéissent elles-mêmes plus facilement à l'attraction lunaire, et, pendant que la Terre tourne, élèvent successivement leur niveau vers la lune. Leur renflement augmente ou diminue suivant que l'attraction de la lune se confond avec l'attraction du soleil ou s'en écarte. Telle est l'origine du phénomène des *marées*, phénomène qui ne se traduit sur l'Océan qu'après avoir été traduit par les couches supérieures de l'air.

A leur tour, les étoiles filantes viennent compliquer ces perturbations périodiques par leur apparition à peu près irrégulière. Si elles laissent des traces lumineuses de leur passage, elles laissent aussi des courants qui, d'après des observations récentes, détermineraient toujours de grandes perturbations atmosphériques.

Voilà le rôle des acteurs célestes; voici celui des acteurs terrestres : — La surface solide du globe s'échauffe beaucoup plus rapidement que la surface liquide; de là des dilatations inégales dans les couches atmosphériques et, par conséquent, des vides où les couches, plus condensées, s'étalent en formant de grands courants aériens, qu'on appelle vents.

La surface liquide, en s'échauffant à son tour, se vaporise et trouble l'air de brouillards ou nuages que les vents chassent avec eux. Ces brouillards servent d'écran au soleil et l'empêchent ainsi de chauffer les mêmes points du sol d'une manière continue. De là des irrégularités dans les dilatations et dans les courants qui en résultent.

Mais ces irrégularités des vents ont leurs exceptions, car des courants réguliers s'établissent de l'équateur aux pôles, en raison de l'inégalité permanente des températures; il s'en établit aussi entre des continents et des océans trop étendus pour être affectés par l'interposition des vapeurs. Ce sont ces courants que l'on désigne sous le nom d'*alisés*, *moussons*, *brises*.

Tous ces mouvements donnent lieu à une production permanente d'électricité. Ce dernier acteur enveloppe constamment notre globe de son mysté-

rieux souffle, le bat de sa foudre et le couronne de ses aurores boréales ; mais ce sont là des coups de théâtre. Le rôle habituel de l'électricité est de veiller, génie bienfaisant, sur les oscillations de la petite aiguille qui frissonne dans la boussole du navigateur.

Les phénomènes météoriques proprement dits résultent de ces différents modes et comprennent les marées, les vents, les vapeurs, les aurores boréales, les éclairs, le tonnerre, les pluies, les neiges, les trombes, etc.

IV

LA TERRE. — GÉOLOGIE.

1° CARACTÈRES GÉNÉRAUX.

Nous avons comparé la Terre à un fruit ; ce fruit serait une orange très-lisse de peau et très-mince d'écorce, car les aspérités formées à la surface du sol par les plus hautes montagnes seraient incapables d'affecter notre toucher si le globe était réduit à la proportion d'une orange ; l'écorce elle-même n'y figurerait guère que comme une pellicule. La plupart des géologues admettent que tout l'intérieur du globe est incandescent, mais il n'y a là qu'une hypothèse gratuite. Il est incontestable qu'une couche de feu succède aux couches solides ; seulement, il est permis de douter que cette couche ait une grande épaisseur.

On est partagé sur la cause de cette incandescence intérieure. Élie de Beaumont, Arago, Humboldt, supposent que la Terre est un soleil encroûté ; Ampère et plusieurs autres supposent que la chaleur intérieure résulte d'actions chimiques et d'une pression extraordinaire ; dans cette hypothèse, la Terre pourrait être considérée tout aussi bien comme un soleil qui s'allume que comme un soleil qui s'éteint.

Sans nous préoccuper de ces hypothèses, qui n'importent guère à la géologie proprement dite, nous allons traverser l'écorce terrestre de l'extérieur à l'intérieur.

Cette écorce se compose d'une quantité infinie de couches dont les grands ensembles sont :

1° Les terrains de dernière formation, supérieurs ou quaternaires ;
2° Les terrains tertiaires ;
3° Les terrains secondaires ;
4° Les terrains de transition ;
5° Les terrains inférieurs ou primitifs.

Terrains quaternaires. — Ce sont ceux qui se trouvent à la surface du globe ; on les appelle aussi terrains d'alluvion (dépôts limoneux ou cimentés par l'humidité). Nous les voyons se former tous les jours. Ici ce sont des couches de sable et de limon déposées par les fleuves, des dunes accumulées par la mer, des lits de terre végétale formés par les débris des plantes, etc. — Ils comprennent également les couches dont la formation est déjà ancienne, mais qui n'ont pas été recouvertes par la mer, car tous les autres terrains, aujourd'hui à sec, ont eu leur existence maritime.

Terrains tertiaires. — Ces terrains ont séjourné sous les eaux qui y ont déposé des quantités considérables de coquillages. On les divise en terrains *Subapennins* ou terrains de la *Bresse*, dans lesquels, à côté de coquilles maritimes, on retrouve les débris d'animaux encore existants ; — en terrains de *Mollasse* ; — enfin, en terrains *Parisiens*, où l'argile (terre glaise, terre à briques, terre à poteries) domine.

Il ne faut pas considérer les noms de localités donnés aux terrains comme particuliers à ces localités. Le terrain parisien peut se retrouver sur plusieurs points de la terre, mais c'est autour de Paris qu'il a été le mieux constaté.

Terrains secondaires, où dominent la *craie*, les *grès*, les systèmes des *oolithes* et du *lias*, compris sous le nom général de *terrain Jurassique*, parce que la composition en est bien caractérisée dans le Jura. — Les oolithes (œufs en pierre) sont des granulations calcaires qui forment comme d'immenses couches d'œufs de poisson pétrifiés. En réalité, ce sont les restes de petits coquillages d'une espèce encore vivante aujourd'hui. — On appelle *lias* des couches dont les éléments, d'abord émiettables, se sont liés pour former des corps compactes : grès, pierres de taille, calcaires ou pierres à chaux, etc.

Sous le terrain jurassique gît le *terrain du Trias* qui comprend : — des *marnes* (mélanges de calcaire et d'argile) *irisées*, c'est-à-dire colorées de diverses nuances ; — le *calcaire conchylien* (de conque ou grande coquille) ainsi nommé à cause des coquillages de toute espèce qu'il renferme ; — le *grès bigarré*, composé de couches alternatives de grès et d'argile.

Sous le Trias, reposent les *terrains Pénéens*, composés : — de *grès vosgien* ; — de *calcaire pénéen*, généralement reconnaissable à la terre de magnésie qu'il contient ; — enfin, de *grès rouge*.

Sous les terrains Pénéens, les *terrains Houillers*, où figurent des couches de charbon de terre formées des débris d'une végétation extraordinaire, carbonisés par fermentation.

Terrains de transition. — Ils se composent de trois grandes séries de couches :

Le *terrain Dévonien* (comté de Devon, en Angleterre) ou *terrain de transition supérieur*, composé de vieux grès rouge, de schistes, d'anthracite (charbon de terre dur comme de la pierre).

Le *terrain Silurien* (ancien royaume des Silures, en Angleterre) ou *terrain de transition moyen*, comprenant des schistes, des micas et des talcs (corps qui se divisent par feuillets). C'est du terrain silurien que proviennent les ardoises.

Le *terrain Cumbrien* (coutrée d'Angleterre) ou *terrain de transition inférieur*, composé de schistes et de micas entremêlés.

Terrains inférieurs, primitifs ou granitiques. — Ces terrains n'ont pas de couches superposées ; ils sont tout d'une venue, comme des masses en fusion qui se seraient refroidies. Ils comprennent : les granits, les porphyres, la basalte, qui apparaissent par coulées et constituent le revêtement de la mer de feu souterraine.

Voici l'énumération renversée de tous ces terrains, en partant de la base, et par ordre d'ancienneté :

Terrains primitifs ou de fusion.	Granits. Porphyres. Basaltes. Laves.
Terrains de transition ou lamelleox.	Schistes micacés. Schistes, micas, talcs et ardoises. Vieux grès, schistes, anthracite.
Terrains secondaires ou des grès.	Houilles, vieux grès rouge. Nouveau grès rouge, grès vosgien. Grès bigarré, calcaire conchylien, marnes irisées. Grès, marnes et calcaires du lias. Oolithes, coraux. Grès vert, craie verte, craie tuffeau. Craie marneuse, craie blanche.
Terrains tertiaires ou de dernière submersion.	Argile pétrissable, gypses. Meulières, grès de Fontainebleau. Dépôts maritimes.
Terrains quaternaires.	Couches superficielles, encore non immergées.

Il ne faut pas imaginer toutes ces couches, que les géologues appellent indistinctement *roches*, superposées régulièrement et partout les unes sur les autres, c'est-à-dire *stratifiées*, comme des feuilles réunies en cahier. Elles sont toujours incomplètes. Ici le granit est à nu; là il est recouvert d'un peu de terre végétale; plus loin il est caché par des schistes, des grès, de la craie et du sable, etc.

En outre, les différentes couches de l'écorce sont renversées ou présentent des courbes, des solutions de continuité produites par les affaissements, des entailles perpendiculaires où les couches superficielles ont pénétré jusqu'aux plus grandes profondeurs.

2° MODES GÉOLOGIQUES.

Les roches se modifient et se forment tous les jours, mais leurs transformations nécessitent des siècles. On peut considérer le grès comme du sable soumis à une compression extraordinaire; or, pour que cette compression se produise, il faut que la couche de sable soit enterrée et pressée sous des couches nouvelles.

Les variations des roches ont deux séries de causes : les influences météorologiques et les actions géologiques proprement dites.

Les forces ordinaires sont du ressort de la météorologie. La pluie charrie les terres sous forme de limon pour surélever les rivages que la mer elle-même pétrit avec les débris extraits de son sein; les alternatives d'humidité, de chaleur et de gelée délitent les rochers par minces feuilles que le soleil réduit en poussières, et que le vent emporte avec les particules enlevées aux sables et aux terres végétales.

Les forces extraordinaires et purement géologiques sont celles des volcans, des tremblements de terre, des mouvements d'exhaussement et d'abaissement imprimés à des pays tout entiers, mouvements qui porteraient à faire croire que les continents flottent sur les eaux. Ce phénomène est sensible sur plusieurs points du globe et particulièrement en Suède, où la masse totale semble osciller, et s'enfonce pour se relever alternativement; il est attesté, d'ailleurs, par les traces de séjournement sous l'Océan de presque toutes les terres aujourd'hui à sec. Nous avons déjà dit que la France a eu, avant l'apparition de l'homme, plusieurs existences maritimes; on pourrait en dire autant de tout le reste du globe, à l'exception de quelques cimes très-élevées qui paraissent n'avoir pas été entièrement immergées sous les eaux.

V

MÉTHODE COSMOLOGIQUE.

A l'exception du célèbre ouvrage de Humboldt, *le Cosmos*, nous n'avons pas de traité qui embrasse l'ensemble des connaissances cosmologiques; il faut passer isolément en revue les ouvrages qui s'occupent tour à tour d'Astronomie, de Météorologie et de Géologie.

La méthode généralement suivie pour classer l'ensemble des phénomènes célestes consiste à présenter ces phénomènes d'abord dans leur apparence illusoire. On décrit le ciel comme s'il tournait autour de la Terre; puis, par une sorte de renversement, on démontre que ces apparences sont les mêmes quand on imagine la Terre en mouvement et le ciel immobile.

Cette méthode se ressent des peines que les astronomes ont eues à constituer la science du ciel; elle a l'avantage de nous faire assister à leurs découvertes successives; mais, au fond, elle est plutôt une discussion qu'une méthode L'esprit de l'homme possède un essor suffisant pour planer dans l'immensité des espaces; et si l'infiniment grand nous épouvante, nous avons toujours l'imagination assez élastique pour réduire le ciel aux proportions qui nous conviennent.

La Météorologie, qui sert de transition naturelle entre l'Astronomie et la Géologie, est une science récente dont le domaine a été envahi par ses aînées. Nous lui restituerons ce qui lui appartient : la *chronométrie* ou mesure du temps, la *géodésie* ou mesure de la terre, et la *théorie des marées* auxquelles nous ajouterons la *géographie physique* proprement dite.

Les alternatives de lumière et d'ombre particulières à la Terre sont assurément des phénomènes météorologiques, et quoiqu'elles aient été esquissées à grands traits par l'Astronomie dans l'étude des phases planétaires, elles prennent un tout autre caractère quand l'homme en déduit ses mesures du temps. La géodésie elle-même n'est qu'une application de l'Astronomie à notre monde; elle sert de préface à la géographie physique. Quant à la théorie des marées, quoiqu'elle figure dans tous les ouvrages qui traitent spécialement des phénomènes célestes, elle est essentiellement une théorie météorologique.

On constatera que tous les phénomènes précédents sont ceux de la lumière et de l'attraction relatifs à la Terre, il reste encore à étudier les phénomènes

de la chaleur et de l'électricité, car ceux du son ne jouent dans l'atmosphère qu'un rôle insignifiant.

La chaleur et l'électricité terrestres constituent deux sphères idéales dans lesquelles notre globe est comme emboîté, mais qui n'ont pas les mêmes axes et les mêmes pôles que la sphère réelle; de là des climats et des zones physiques différents des climats et des zones géodésiques.

Ce n'est qu'après l'étude de ces généralités qu'il est possible d'aborder l'étude des météores proprement dits.

La Géologie, enfin, en nous apprenant la constitution générale des couches terrestres, complète nos connaissances cosmologiques, et nous prépare à l'étude particulière des corps considérés en eux-mêmes; c'est-à-dire à la première des sciences naturelles, qui est la stéréologie.

VI

APPLICATIONS.

Nous avons déjà dit que l'Astronomie n'était, en réalité, qu'une mécanique lumineuse; et c'est à ce titre qu'Ampère l'avait classée dans les sciences exactes, sans tenir compte des procédés et des instruments de l'optique qui y jouent pourtant un si grand rôle.

La Chronométrie et la Géodésie, qui servent d'introduction à la Météorologie, présentent également un caractère mathématique. Mais les procédés des sciences exactes commencent à disparaître derrière les procédés des sciences physiques, dans les études qui suivent. Le calcul, qui s'est renforcé de l'observation, se complique enfin de la recherche des choses qui ont été et qui ne sont plus, comme il arrive dans la Géologie, lorsqu'il s'agit d'établir les transformations successives de notre globe.

VII

HISTOIRE.

1° HISTOIRE PROPREMENT DITE.

Si les vérités mathématiques sont indépendantes du temps, et si les phénomènes physiques doivent être considérés comme invariables depuis que l'Univers existe, il n'en est plus de même pour les phénomènes cosmolo-

6

giques, car ils présentent des variations, lentes il est vrai puisqu'elles sont séculaires, mais incontestables.

La Cosmologie a donc une histoire propre, indépendante de l'histoire de ses progrès scientifiques. Cette histoire, peu apparente dans l'Astronomie, se dégage dans la Météorologie, et devient très-accusée dans la Géologie, où la formation successive des couches de l'écorce terrestre atteste de révolutions successives.

Nous ne pouvons entrer ici dans l'indication des grands faits de cette histoire, mais nous la signalons pour faire ressortir le caractère qui distingue les études cosmologiques de la physique et des mathématiques.

2° HISTOIRE DE LA SCIENCE.

On est fondé à croire que l'école de Pythagore connaissait, il y a deux mille quatre cents ans, la rotation de la Terre sur elle-même et sa gravitation autour du soleil. Ces données provenaient, dit-on, de l'Égypte, où les prêtres paraissent avoir été fort versés dans l'astronomie; mais elles répugnaient au vulgaire. Les anciens ne pouvaient admettre que la lune, le soleil, les planètes et le ciel entier fussent autre chose que des luminaires et des décors faits spécialement pour l'homme. Ils comptèrent néanmoins, les Grecs surtout, de grands astronomes, parmi lesquels il faut citer tout particulièrement Hipparque et Apollonius de Perge. L'Égyptien Ptolémée, au deuxième siècle de notre ère, résuma toutes les connaissances astronomiques de l'antiquité, dans un livre connu sous le titre d'*Almageste*.

Pendant treize cents ans, le monde crut que l'astronomie avait dit son dernier mot, lorsqu'au seizième siècle, Copernic ressuscita la doctrine de l'école de Pythagore et en essaya la démonstration. Quelque temps après lui, Képler découvrit les véritables mouvements de la Terre et des planètes; Descartes tenta d'en établir les lois, mais il appartenait à Newton de réduire toutes les hypothèses à une conception aussi simple que grandiose, l'*attraction*, qui jeta des lumières plus vives encore dans le domaine de la Physique que dans celui de l'Astronomie. Au commencement de ce siècle, Laplace constitua de toutes pièces la *Mécanique céleste*, ouvrage si remarquable que les enthousiastes allèrent jusqu'à dire qu'il supprimait Dieu.

La Géodésie, ou mesure de la terre, remonte à une antiquité très-reculée. M. Jomard a prouvé que les Égyptiens avaient mesuré l'arc du méridien de leur pays, et adopté un mètre tiré comme le nôtre de la circonférence du globe. La grande pyramide est bâtie sur les dimensions de ce mètre et pré-

sente un trop grand nombre d'applications géodésiques, pour que l'on puisse les regarder comme des effets du hasard.

On peut en dire autant de la mesure du temps et de la constitution de notre calendrier réformé par Jules César et remanié pour la dernière fois par le pape Grégoire XIII, à la fin du seizième siècle.

La constitution de la Géographie physique est plus récente, puisqu'elle a nécessité non-seulement la découverte de l'Amérique, mais aussi des voyages multipliés de circumnavigation autour du globe. Elle est pourtant complète dans ses ensembles depuis plus de deux cents ans.

L'étude des météores proprement dits est toute moderne.

La Géologie paraît avoir été cultivée dès la plus haute antiquité. En dehors des traditions religieuses, qui placent sous le sol terrestre un séjour de feu, on retrouve dans plusieurs ouvrages anciens, et particulièrement dans la géographie de Strabon, des vues très-nettes sur les grands soulèvements du globe.

Mais l'Empire romain, qui fut si favorable au développement de toutes nos connaissances sociologiques, jeta comme un voile de ténèbres sur toutes les connaissances scientifiques proprement dites. Il faut aller jusqu'à la Renaissance avant de retrouver trace des études géologiques. On s'émut alors de la découverte des coquilles marines dans des sols qui paraissaient n'avoir jamais séjourné sous les eaux ; les uns voulaient y voir une attestation du déluge, les autres une mystification, les troisièmes, plus perspicaces, avancèrent hardiment que les continents pouvaient bien s'enfoncer et sortir tour à tour de la mer. Mais la théorie ne fut constituée de toutes pièces qu'à la fin du dernier siècle, à la suite d'une discussion très-vive entre les *Neptuniens* et les *Plutoniens*. Les premiers soutenaient qu'il fallait attribuer à l'action de l'eau tous les phénomènes géologiques; les seconds, qui attribuaient à l'action du feu les plus importants de ces phénomènes, n'eurent pas de peine à confondre leurs adversaires, et c'est leur doctrine qui a été le point de départ des beaux travaux accomplis par les géologues modernes.

VIII

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Presque toutes les découvertes cosmologiques ont suscité des querelles religieuses auxquelles le public a pris part sans trop savoir, au fond, de quoi il s'agissait. La constitution de l'astronomie moderne est scellée, dit-on, du martyre de Galilée, qui se vit condamné par une assemblée de

casuistes catholiques à déclarer que la Terre ne tournait pas. « Et pourtant, elle se meut ! » murmurait Galilée en prononçant à haute voix sa rétractation. Mais l'on ne dit pas que Galilée prétendait introduire dans le dogme catholique la doctrine de Copernic et lui donner la sanction de l'Église.

Le même fait s'est reproduit dans les derniers temps, à propos des découvertes géologiques que l'on considérait comme une négation de la Bible. Moïse a trouvé des défenseurs aussi maladroits que ses accusateurs ; pendant que ceux-ci érigeaient en vérités des hypothèses géologiques, ceux-là torturaient le sens de la Bible pour démontrer que Moïse avait établi d'avance ces prétendues vérités. En réalité, la cosmologie a été comme un champ de bataille où les adversaires des deux partis ont ramassé, sans y trop regarder, les projectiles qui leur tombaient sous la main ; mais ni la science, ni la foi, n'ont été engagées dans ces échauffourées ; elles ont, au contraire, désavoué ces champions brouillons et batailleurs dont il a été dit, avec tant d'à-propos : *Mundum tradidit eorum disputationi* : « Ce monde a été abandonné à leurs querelles. »

Aujourd'hui, personne ne songe à ranimer le débat. Les études cosmologiques jettent, il est vrai, de vives lumières dans les ténèbres de l'entendement humain ; mais, si elles reculent nos horizons, elles ne donnent pas de solution au problème, toujours mystérieux, de notre origine et de nos destinées.

Ce que l'astronomie peut nous faire imaginer de plus vaste, c'est que le ciel entier constitue un des éléments d'un monde dont la grandeur épouvante la pensée. — Mais quel est ce monde ? Quel est cet élément même ? Est-ce la molécule d'un corps inerte ou organisé ? Faut-il concevoir notre nébuleuse comme un atome minéral, comme une cellule végétale, ou comme un globule de sang ? — Ici toute science est muette ; ici sont les bornes d'investigations que le métaphysicien et le poëte seuls peuvent dépasser, mais avec prudence. Et, quand notre esprit aura entassé les mondes sur les mondes, enveloppé notre univers d'univers sans nombre, il ne s'en noiera pas moins dans une immensité nouvelle que l'action suprême baignera toujours, en étendant sa sphère vers d'autres infinis.

Qu'importe ! La moyenne dans laquelle sont enfermées nos investigations scientifiques est de taille à nous satisfaire ; nous percevons dans l'infiniment grand une ébauche d'un monde colossal ; nous sommes en état de constater dans l'infiniment petit d'autres mondes dont nous devinons le fourmillement sous l'immobilité apparente de la matière ; la perception de l'immensité nous éclaire sur la constitution de la molécule. En faut-il davantage pour assurer à l'intelligence humaine la plénitude de son rayonnement dans le milieu où elle agit ?

SCIENCES NATURELLES.

MINÉRAUX, VÉGÉTAUX, ANIMAUX.

I

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Les sciences cosmologiques nous ont montré l'Univers dans ses ensembles, les sciences naturelles vont nous en faire étudier les détails et nous montrer l'*Action* dans ses modes individuels et relatifs.

Tout ce qui constitue la Terre peut se répartir en trois grands règnes : le règne minéral, le règne végétal et le règne animal.

Contrairement aux méthodes en usage, nous comprendrons la Chimie dans les sciences naturelles, et nous considérerons la partie inorganique de la chimie comme une Physiologie minérale.

II

CE QU'IL FAUT ENTENDRE PAR PHYSIOLOGIE.

On étend le nom de *Physiologie* à toutes les connaissances que nous pouvons posséder sur les fonctions naturelles.

Toute fonction est un mode d'action régi par une force générale qui fait concourir plusieurs modes à un jeu d'ensemble. Dans un mécanisme d'horloge, par exemple, où les fonctions sont artificielles, les poids ont la fonction de mouvoir, le balancier celle de régulariser le mouvement imprimé par les poids, les roues celle de le distribuer, les aiguilles celle de l'indiquer.

Supprimons une de ces fonctions, ajoutons une fonction nouvelle, la machine se détraque ou se transforme, mais l'horloge disparaît.

L'univers, envisagé dans ses ensembles cosmologiques, peut être considéré comme fonction d'un être infiniment grand dont l'ensemble nous échappe. Nous ne connaissons cette fonction que dans ses détails, nous ne la voyons pas dans son ensemble, son caractère même nous est inconnu; nous ignorons absolument dans quelles relations elle se trouve avec d'autres fonctions, aussi ne pouvons-nous dire que nous avons fait de la physiologie dans les sciences cosmologiques.

Cherchons donc un autre milieu qui puisse nous donner une idée de la Physiologie. Nous avons tous une idée générale de l'Humanité; nous savons qu'elle se répartit en races, que ces races se composent de sociétés, et que ces sociétés ont pour éléments des hommes qui se transfigurent et agissent différemment, selon les milieux où ils se trouvent engagés.

Comparons, mais n'identifions pas, la nature à l'Humanité, en restreignant la nature à ses phénomènes matériels, c'est-à-dire à tous les phénomènes compris dans le grand empire de l'attraction.

La matière sera, comme l'Humanité physique, composée d'individus élémentaires, les atomes, êtres indivisibles qui se répartissent par races. — Comparons donc le règne minéral à la race nègre, le règne végétal à la race de couleur, le règne animal à la race blanche.

Chaque race, dans l'Humanité, se décompose en sociétés, ayant chacune son existence propre et son organisation particulière, organisation plus ou moins compliquée, suivant les races et le degré de civilisation.

Chaque règne, dans la nature, se décompose en corps ayant chacun son existence propre et son mécanisme particulier, mécanisme plus ou moins complexe, selon les règnes et la délicatesse de l'organisation.

Dans les sociétés nègres, les fonctions sont à peu près nulles; il y a des groupements variés d'hommes, il est vrai, mais tous ces groupements sont élémentaires et ne s'élèvent guère au delà de la tribu. Les tribus ne se fondent les unes dans les autres que par deux, par trois, par quatre, rarement davantage.

Dans les corps minéraux, les fonctions sont à peu près nulles; il y a des groupements variés d'atomes, il est vrai, mais tous ces groupements sont élémentaires et ne s'élèvent guère au delà de la molécule. Les molécules ne se combinent les unes avec les autres que par deux, par trois, par quatre, jamais davantage.

Si maintenant nous appelons *Économie* le jeu des fonctions sociales, et

Physiologie, le jeu des fonctions naturelles, il n'y aura que peu d'Économie à étudier dans la race nègre, et peu de Physiologie dans le règne minéral.

Dans les sociétés de couleur, par exemple, les sociétés asiatiques, qu'il est convenu, à tort ou à raison, de regarder comme stationnaires et exclusives, il y a un gouvernement, une industrie, une armée, une littérature, une religion. Voilà des milieux qui fonctionnent en transfigurant les groupes et les hommes qui les constituent. Il y a donc une étude à faire de chacune de ces fonctions, dans son jeu intérieur et extérieur ; de là une *Économie sociale.*

Dans les végétaux, qui sont stationnaires et exclusifs, il y a une répartition des groupes d'atomes sous l'influence d'un système d'ensemble propre à chaque plante ; ici ces groupes constituent des feuilles, des racines, des canaux dont la fonction générale est d'alimenter la plante ; là ils élèvent des revêtements et des défenses (écorces, épines, poils); plus loin, ils expriment l'âme particulière au végétal par des fleurs et des parfums ; ils préparent enfin, dans le fruit, la perpétuation de l'économie générale dont ils sont solidaires. Voilà des fonctions végétales bien caractérisées qui agissent en transfigurant les molécules et les atomes qui les constituent. Il y a donc une étude à faire de chacune de ces fonctions dans son jeu intérieur et extérieur; de là une *Physiologie végétale.*

Dans les sociétés blanches, où l'activité déborde, où des nations presqu'entières, quittent parfois leur sol pour aller vivre et agir ailleurs, il y a une analogie avec les êtres animés de la nature. — Mais nous ne poursuivrons pas la comparaison, car les ressemblances deviennent trop subtiles ; nous nous contenterons de dire que les fonctions sont de part et d'autre plus nombreuses, plus compliquées et plus délicates ; qu'elles transfigurent leurs éléments d'une manière plus variée et qu'elles échappent, la plupart du temps, à cause de leur mobilité, aux investigations scientifiques.

III

CHIMIE.

1° CARACTÈRES CHIMIQUES.

La physique nous a appris que les corps étaient composés de molécules et les molécules d'atomes ; qu'il fallait entendre par *atome* tout élément simple et pondérable, c'est-à-dire, attractif des corps, et qu'en dehors de l'empire de l'attraction, dans lequel il faut comprendre toute la matière, il y a un

empire d'influence dans lequel on classe tous les phénomènes impondérables agissant, soit par voie de propagation ou de transmission, soit par voie de répulsion. La plupart des effets produits par ces derniers phénomènes sont appelés, par les chimistes, *catalytiques* ou *de dissolution*, ce qui ne nous apprend rien, sinon que ces effets n'ont pas pour causes des agents matériels.

Les molécules sont simples ou composées ; mais il faut entendre par molécules simples celles qu'on n'a encore pu décomposer et qui se retrouvent dans tous les corps.

Les corps formés par les molécules simples de même espèce se divisent en *métalloïdes* et en *métaux*.

Les métalloïdes comprennent trois corps qui sont toujours gazeux : l'oxygène, l'hydrogène et l'azote ; et des corps pâteux, granulés, émiettables ou peu consistants, dont les principaux sont le soufre, le chlore, l'iode, le phosphore, l'arsenic et le carbone ou charbon pur.

Les métaux comprennent un corps ordinairement à l'état liquide : le mercure ou vif argent ; et des corps compacts et résistants, doués d'un éclat particulier (éclat métallique), dont les principaux sont : le potassium, base de la potasse; le sodium, base de la soude; le calcium, base de la chaux ; le fer, le chrome, le cobalt, le zinc, l'étain, le plomb, le cuivre, l'argent, l'or et le platine.

C'est avec les corps simples que se forment tous les autres corps appelés composés. Ces corps sont des mélanges, des dissolutions ou des combinaisons des molécules simples les unes dans les autres.

L'air est un mélange d'oxygène et d'azote.

L'eau douce est une combinaison d'oxygène et d'hydrogène.

L'eau de mer est une dissolution de sels dans l'eau douce.

Les *mélanges*, quand ils ont lieu entre les molécules de métaux fondus, prennent le nom général d'*alliages*, et en particulier celui d'*amalgames*, lorsqu'ils contiennent du mercure.

2° MODES CHIMIQUES.

Les *combinaisons* transfigurent toujours les molécules et sont toujours accompagnées de phénomènes d'influence : lumière, chaleur ou électricité. Les corps qui résultent des combinaisons changent de propriétés pour en acquérir de nouvelles, et les garder tant qu'ils ne reviennent pas à leur état primitif ou n'entrent pas dans une autre combinaison.

Les volumes et les poids des molécules se groupent en proportions nettes et constantes. Les combinaisons, dans le régne minéral, ne comprennent jamais plus de quatre espèces de molécules simples; encore faut-il, pour arriver à ce dernier résultat, combiner préalablement les molécules deux à deux avant de les réunir en groupes.

L'oxygène se combine avec tous les corps simples; l'hydrogène avec le plus grand nombre; les autres métalloïdes sont assez sociables; mais les métaux ne se commettent jamais qu'avec un petit nombre d'espèces; quelques praticiens affirment même qu'ils se dissolvent, mais ne se combinent jamais.

Les éléments d'un composé sont dans une union plus ou moins intime, aussi chaque molécule simple obéit-elle à des entraînements plus ou moins vifs, qu'on appelle *affinités*.

Ces affinités se manifestent par une décomposition, lorsqu'il y a lieu à une combinaison nouvelle. La molécule abandonne alors son composé pour s'unir aux molécules vers lesquelles elle se sent plus violemment entraînée.

Là est le grand secret de la chimie, car, pour dégager un corps simple de sa combinaison avec un autre corps et le mettre en liberté, il faut présenter à cet autre corps un compagnon pour lequel il ait plus d'affinité. Si les milieux, ou *menstrues*, sont convenables, la combinaison s'opère immédiatement et le corps à dégager se trouve libre : on dit alors qu'il est *à l'état naissant.*

Tout corps à l'état naissant est plus apte à former des combinaisons nouvelles.

Telles sont les lois les plus générales et les plus saisissables de la chimie minérale ou inorganique.

IV

STÉRÉOLOGIE.

L'ensemble des connaissances que nous possédons sur la chimie inorganique nous conduit à étudier tous les corps, non pas seulement au point de vue des lois générales et intimes qui régissent leurs associations, mais aussi au point de vue des caractères que ces associations présentent.

On considère alors les corps comme individus, et on cherche à déterminer les lois auxquelles ils obéissent. Les corps bruts, ainsi étudiés, constituent la *Minéralogie* proprement dite. Mais quand cette science est réunie à la

chimie minérale et comprend l'ensemble de toutes les connaissances que nous pouvons posséder sur tous les individus du règne inorganique, on fait de la *Stéréologie*.

Le nombre des individus du règne inorganique est prodigieux, mais quand on classe les espèces entre elles, on ne tarde pas à s'apercevoir qu'elles se réduisent à un demi-millier de types.

Les caractères des minéraux sont géométriques ou *cristallographiques, physiques* et *chimiques*.

Le caractère cristallographique d'un minéral est déterminé par les formes particulières que présentent les fragments de ce minéral quand on le brise. Ces formes rappellent celles des cristaux taillés et polis de différentes façons. Elles peuvent toutes se ramener à six volumes types, tous angulaires et déterminés dans les Traités les plus élémentaires de géométrie.

Les caractères physiques des minéraux se rapportent aux différents modes matériels, lumineux, chauds et électriques qu'ils peuvent présenter, soit à l'extérieur, soit à l'intérieur.

Les caractères chimiques des minéraux résultent des épreuves et des manipulations auxquelles le chimiste les soumet.

Tous les minéraux grossissent par voie d'agrégation, c'est-à-dire que des molécules de même nature viennent s'ajouter à la surface extérieure en se conformant à des lois architecturales bien définies. Lorsqu'on dissout la plupart de ces minéraux, ils se cristallisent en revenant à leur état primitif, et on peut suivre, dans beaucoup de cas, le curieux phénomène de l'arrangement de leurs molécules.

V

BOTANIQUE.

1° ANATOMIE VÉGÉTALE.

Quand un enfant fait sortir d'un tuyau, trempé dans de l'eau de savon, ces globules brillants et légers qui flottent au gré de la brise, se colorent des plus vives nuances et s'évanouissent soudainement, il ne se doute pas que des globules analogues, mais infiniment plus petits et bien autrement persistants, constituent les seuls éléments primitifs de la matière végétale.

On peut également comparer l'architecture végétale à un enchevêtrement d'aérostats microscopiques enchaînés les uns aux autres et formant un édifice dont la base est attachée au sol.

Ces aérostats microscopiques portent, dans l'anatomie végétale, le nom de *cellules*.

Les cellules organiques se dépriment et prennent différentes formes : elles sont remplies de gaz qui se colorent à la lumière ; elles se couvrent enfin de revêtements plus ou moins résistants.

Quelquefois elles communiquent bout à bout ; d'autres fois elles sont séparées par un espace vide, qu'on appelle *méat intercellulaire*.

Les cellules constituent trois grandes catégories de tissus : les tissus séveux, qui conduisent la sève et la ramènent ; les tissus aériens, qui emprisonnent les gaz de l'atmosphère ; les tissus fibreux, qui constituent la charpente solide de l'édifice végétal.

2° PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE.

Les végétaux sont généralement composés de deux parties : la racine et la tige, dont le développement se fait en sens inverse. La racine s'enfonce dans le sol, du dehors au dedans, tandis que la tige s'élève du dedans au dehors.

Quelques végétaux ne sortent pas du sol ; on peut les considérer comme n'ayant que des racines.

Les végétaux complets étendent leurs racines dans la terre, sur un rayon aussi grand que leurs branches dans l'atmosphère.

Les végétaux s'alimentent des sucs terrestres et des gaz de l'atmosphère ; la nutrition par les gaz est improprement appelée *respiration*. Ils ont une circulation de matières plastiques destinées à leur développement, comme chez les animaux ; mais c'est la terre qui sert de cœur aux plantes, comme elle leur sert d'estomac.

Les végétaux se reproduisent ; la fonction de reproduction se manifeste en même temps que l'épanouissement des fleurs. Les fleurs sont le berceau de petits végétaux rudimentaires, embryons de deux sexes, qui se trouvent tantôt réunis dans le même réceptacle, tantôt répartis dans des réceptacles différents. Quelquefois un végétal tout entier ne produit que des embryons mâles, *étamines*, et c'est sur un autre végétal de la même espèce que se trouvent les embryons femelles, *pistils*.

La fécondation se fait par le dégagement de la poussière, *pollen*, qui provient de l'étamine, se dépose sur le *pistil*, s'y attache et semble y vider des légions invisibles destinées à préparer le fruit.

3° TAXONOMIE VÉGÉTALE.

Les végétaux sont en quantité innombrable ; aussi est-il nécessaire de les

classer. Mais le classement est d'autant plus difficile, qu'il faut tenir compte de la forme, des caractères, des modes, de la complexité des fonctions, et que toutes ces connaissances ne sont encore ni bien nettes, ni bien complètes.

Les classifications ont deux buts : l'un d'appliquer immédiatement un nom à un végétal quelconque, quand on l'a sous les yeux ; l'autre, de répartir les plantes suivant leur constitution et leurs analogies de tout genre.

La classification la plus répandue actuellement est celle de Lindley. Les végétaux y sont rangés par grandes *classes* et *sous-classes* qui se subdivisent elles-mêmes en *alliances* ; les alliances se répartissent en *familles* ; les familles en *espèces*, et les espèces en *individus*.

Les classes sont au nombre de sept ; les deux premières n'ont pas de fleurs et n'accusent, par conséquent, pas de sexes :

1° Plantes *Thallogènes*, algues, champignons et lichens.
2° — *Acrogènes*, mousses et fougères.
3° — *Rhizogènes*, végétaux parasites et généralement rampants, peu connus, familles en petit nombre.
4° — *Endogènes*, palmiers, narcisses, joncs, graminées, asperges, etc. (classe la plus importante après celle des *exogènes*).
5° — *Dictyogènes*, igname (racine alimentaire d'Amérique), peu connus, familles en petit nombre.
6° — *Gymnogènes*, pins, sapins, genévriers, mélèzes, etc.
7° — *Exogènes* (classe la plus considérable), orties, pavots, buis, saules, chênes, châtaigniers, figuiers, roses, myrtes, etc.

VI

ZOOLOGIE.

1° ANATOMIE ANIMALE.

La matière animale est, comme la matière végétale, composée de cellules pénétrées et baignées par des fluides de tout genre. La masse fluide l'emporte de beaucoup sur la masse solide. Un cadavre pesant 60 kilogrammes a pu, desséché dans un four, être réduit à 6 kilogrammes.

Les cellules forment différents tissus dont les principaux sont :

Le tissu *cellulaire* proprement dit, qui renferme la graisse.

Le tissu *musculaire* qui constitue la chair, les muscles et les tendons.

Le tissu *osseux*, qui constitue les os et la charpente solide.

Le tissu *nerveux*, qui constitue les nerfs, vulgairement confondus avec les

muscles et les tendons, parce qu'il s'y trouve toujours engagé, mais dont la composition est la même que celle de la cervelle.

Quand on soumet de la matière organique (végétale ou animale) à l'analyse chimique, on reconnaît qu'elle est presqu'exclusivement constituée de quatre corps simples : l'oxygène, l'hydrogène, le carbone et l'azote.

Le carbone domine dans les végétaux ; l'azote dans les animaux.

Mais la différence capitale, entre les végétaux et les animaux, résulte de la faculté qu'ont ces derniers de se mouvoir en tout ou en partie, et de posséder un estomac, c'est-à-dire un magasin d'alimentation intérieur.

2° PHYSIOLOGIE ANIMALE.

La physiologie animale est bien plus complexe que la physiologie végétale. Elle a, de plus que celle-ci, des fonctions de relation, des appareils de sensation, et des organes pour manifester ces sensations.

L'aliment, chez les animaux, est absorbé par l'estomac où il se transforme en sang qu'on a justement appelé une chair liquide. La chair elle-même se transforme en muscles, en os et en nerfs. C'est aux nerfs, qui ont subi la plus longue et la plus complète élaboration, qu'appartiennent tous les phénomènes de direction dans l'animal ; ils remplissent les fonctions supérieures et spontanées de la sensibilité, de l'intelligence, de la volonté et du mouvement.

3° TAXONOMIE ANIMALE.

Le règne animal a été divisé en quatre grands *embranchements*, qui se subdivisent en *classes ;* les classes en *ordres ;* les ordres en *familles ;* les familles en *genres ;* les genres en *espèces ;* les espèces en *individus.*

Les quatre grands embranchements sont :

1° Les *zoophytes* (animaux-plantes), dont certaines espèces forment le corail et nos éponges domestiques.

2° Les *mollusques* (animaux mous), avec ou sans coquilles ; huîtres, escargots, limaçons, etc.

3° Les *articulés* ou *annelés* (animaux qui se composent d'anneaux ou de pièces enclavées les unes dans les autres), insectes, vers.

4° Les *vertébrés* (ayant une échine osseuse), qui comprennent les poissons, les amphibiens (êtres à double vie, moitié aquatiques, moitié terrestres), les reptiles, les oiseaux et les mammifères (animaux à mamelles).

VII

MÉTHODE GÉNÉRALE.

Nous dérogeons à tous les usages en classant la *Chimie* dans les sciences naturelles; on la présente toujours, Ampère lui-même, comme une science physique. Au fond, pourtant, elle n'est qu'une anatomie de détails, minérale, végétale ou animale, une préface fondamentale de toute physiologie. Cette science ne peut être sérieusement poursuivie que quand l'étude des ensembles de la nature a fait place à l'étude des êtres en eux-mêmes, c'est-à-dire des individus. Il importe donc d'établir successivement, dans les sciences naturelles, les caractères mathématiques, physiques et cosmologiques des corps, avant de pénétrer dans leur intimité même et de rechercher, comme fait le chimiste, la manière dont se comportent leurs éléments constitutifs.

Les caractères chimiques une fois connus, on peut aborder la *Physiologie*, qui se manifeste déjà dans le règne minéral, lorsqu'elle étudie les fonctions des corps bruts dans leurs cristallisations, leurs modes d'accroissement et leur existence moléculaire.

A la physiologie, succède la *Taxonomie*, ou classification des individus en familles, en groupes, en ordres, etc.

La Taxonomie elle-même n'est qu'une introduction à l'ensemble de connaissances vulgairement appelé *Histoire naturelle*, qui étudie les êtres dans leurs milieux naturels, interroge leurs caractères individuels, leurs mœurs, leur degré d'intelligence, etc.

L'Histoire naturelle comprend elle-même la *géographie minéralogique*, la *géographie botanique*, ou *Flore*, la *géographie zoologique*, ou *Faune*, qui est toujours accompagnée d'une *Ethographie zoologique*, ou description des mœurs des animaux.

VIII

APPLICATIONS.

Les mathématiques interviennent directement encore dans les sciences naturelles, lorsqu'il s'agit de déterminer les caractères cristallographiques des minéraux, c'est-à-dire de mesurer les angles décrits par les cristaux, et

d'établir la théorie géométrique des groupements moléculaires. Ampère a proposé de classer cette dernière théorie à la fin de la géométrie même, sous le titre de *géométrie moléculaire;* mais il est évident que la partie de la géométrie qui préside aux différentes combinaisons des volumes entre eux, et sur laquelle nous ne possédons que fort peu de connaissances, étend son domaine bien au delà de la cristallographie.

La physique joue le plus grand rôle dans les sciences naturelles; elle intervient à chaque instant, soit avec ses instruments, soit avec ses procédés, dans l'étude des êtres. La chimie, la physiologie, la minéralogie ont, tout spécialement, recours à ses constatations; elle s'efface néanmoins un peu derrière les sciences qu'elle vient de constituer, lorsque nous abordons la Botanique et la Zoologie.

La cosmologie, enfin, n'intervient que pour nous indiquer les différents théâtres dans lesquels s'accomplissent les phénomènes naturels.

IX

HISTOIRE.

1° CHIMIE. — CRISTALLOGRAPHIE.

La Chimie n'était, dans l'antiquité, qu'une collection de recettes, ou, pour mieux dire, une sorte de cuisine des minéraux. En dehors des procédés industriels, les anciens n'y voyaient qu'un moyen de sorcellerie.

Au moyen âge, la chimie, sous le titre d'*alchimie*, prit un caractère mystérieux. Les alchimistes recherchaient avec ardeur le grand œuvre, c'est-à-dire la *pierre philosophale*, qui devait investir l'homme d'une sorte de divinité, changer tous les métaux en or, et constituer la base d'un élixir propre à guérir toutes les maladies.

Paracelse, au seizième siècle, comprit et fit comprendre, un des premiers, qu'en attendant la découverte du fameux élixir, on pouvait appliquer isolément les connaissances de l'alchimie dans le traitement des maladies. A peine fut-on engagé dans cette étude de détails, véritable domaine de la chimie, que les découvertes s'accumulèrent.

Stahl, au commencement du dix-huitième siècle, essaya d'établir une théorie dans laquelle figureraient tous les faits chimiques. Cette théorie, quoique fausse, fit faire de rapides progrès à la science, et donna naissance à une discussion d'où devait sortir la *Chimie.*

C'est à Lavoisier, 1770, qu'échut la gloire d'établir la chimie sur ses

véritables bases. L'Anglais Dalton, les Français Proust, Fourcroy, Guyton de Morvau, Berthollet, Gay-Lussac et le Prussien Berzélius, prirent la part la plus importante à la constitution do la théorie moderne, en établissant les principales lois sur lesquelles elle repose.

2° PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — BOTANIQUE.

La Physiologie végétale remonte au Suédois Linnée à qui l'on doit la découverte des caractères sexuels des végétaux et une classification botanique fondée sur ces caractères. Le littérateur allemand Goëthe fut un des premiers à émettre l'idée que les différents tissus végétaux pouvaient être considérés comme une simple transformation d'un élément unique : la cellule. Depuis ce moment, grâce à l'observation, aux microscopes, aux progrès de de la chimie, la physiologie végétale a fait les plus grands progrès.

Le premier qui essaya de fixer les caractères à l'aide desquels on peut établir une classification des plantes, fut Gessner, de Zurich (XVI[e] siècle). A la fin du dix-septième siècle, le Français Tournefort classa plus de dix mille espèces de plantes. Peu de temps après, Linnée publia sa découverte et sa classification qui, reprise en sous-œuvre par Adanson, puis par les Jussieu et Brongniart, aboutit à la Taxonomie actuelle de Lindley.

3° PHYSIOLOGIE ANIMALE. — HISTOIRE NATURELLE.

La Physiologie animale remonte à la Renaissance. Mais sa découverte la plus importante fut celle de la circulation du sang, due à l'Anglais Guillaume Harvey (XVII[e] siècle). L'étude de la composition du sang conduisit à la connaissance de toutes les fonctions matérielles des animaux. Celle de l'électricité animale, par Galvani, dirigea l'attention des expérimentateurs sur la constitution du système nerveux. Nous devons à un de nos contemporains, trop modeste peut-être, une découverte physiologique dont l'importance égale celle d'Harvey. Nous voulons parler do la circulation nerveuse, ou plutôt des mouvements circulatoires décrits par l'impression nerveuse, car on admet généralement aujourd'hui des courants invisibles et rapides comme origine des mouvements circulatoires de l'économie animale. Ces courants, que la matière nerveuse ne traduit par aucun déplacement sensible de ses molécules, entraînent les globules sanguins par des pulsations régulières. Mais, pendant que le courant invisible accomplit sa circulation complète, les molécules matérielles ne se déplacent que dans une faible partie de leur trajet.

Les observations zoologiques remontent à la plus haute antiquité. Elles



furent réunies, par Aristote, dans un recueil des connaissances humaines qui domina la science pendant plus de deux mille ans.

Les Romains n'ajoutèrent que peu de choses à ces connaissances, mais ils attribuèrent aux animaux des vertus et des puissances sur lesquelles le moyen âge renchérit encore. Par réaction, Descartes nia que les animaux eussent une âme et à plus forte raison une intelligence. Les naturalistes modernes, moins crédules que les anciens, mais moins injustes que Descartes, ont reconnu aux bêtes l'âme passionnelle et la dose d'intelligence qu'exige leur rôle dans la nature.

4° HISTOIRE PROPREMENT DITE. — PALÉONTOLOGIE.

Nous devons à Cuvier l'histoire des animaux qui ne sont plus. Cette histoire, connue sous le nom de *Paléontologie*, n'est, au fond, qu'une application de l'Anatomie aux débris des êtres *fossiles*, c'est-à-dire ensevelis dans les couches géologiques. Elle a été étendue aux végétaux et même aux minéraux; mais, influencée jusqu'à ce jour, par les hypothèses cosmologiques, elle n'est encore qu'ébauchée. Nous en indiquerons néanmoins les principaux traits.

X

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Il n'y a aucun inconvénient, dans la chimie, à considérer l'atome comme un être complet, agissant spontanément et conscient de notions rudimentaires. Cette manière de voir, hardiment présentée par le dernier chef de l'école saint-simonienne (1), est celle d'un grand nombre de savants et de philosophes. Mais le naturaliste doit être plus réservé quand il s'agit d'attribuer à l'atome un caractère organisateur qui lui permette de présider à une fonction physiologique, car les modes d'action par influence jouent un bien plus grand rôle dans les fonctions organiques que les modes d'action du règne atomique qui constitue la matière.

La fonction paraît étrangère à l'atome, et la meilleure raison qu'on en puisse donner, c'est qu'on ne voit pas de minéraux, de végétaux et d'animaux se constituer de toutes pièces sans germes et sans menstrues préalables. La grande discussion qui, de nos jours, fait retentir les échos des Instituts, à propos de la génération spontanée, n'a jeté aucune lumière satisfaisante sur ce point, et roule aujourd'hui sur des observations reculées dans les sphères microscopiques, au delà des limites où peut s'exercer un contrôle sérieux.

(1) Enfantin. — *La Vie éternelle.*

Cette réserve est d'autant plus importante à établir que, sans elle, il nous serait impossible d'aborder avec impartialité l'étude des différents systèmes de philosophie. Elle arrête d'ailleurs l'essor trop prompt de l'imagination qui, procédant par analogies, serait portée à assimiler l'atome à l'homme et à lui conférer par suite toutes les facultés de l'âme.

La propriété essentielle de l'atome est l'indestructibilité, c'est-à-dire sa persistance à affirmer constamment la loi d'attraction; solide, liquide ou volatil, il accuse toujours son poids dans la balance physique. Aucune puissance matérielle ne peut l'anéantir.

Mais on ne doit pas attribuer à l'atome d'autre caractère que celui de poursuivre un équilibre qu'il ne réalise jamais avec une rigueur mathématique. Ses transfigurations paraissent provenir de modes d'action qui lui sont extérieurs; l'affinité même qui le fait déroger à la loi d'attraction ne paraît être que la trace d'un mouvement électrique.

La physiologie, à mesure qu'elle progresse, semble affirmer de plus en plus que les molécules constituent l'instrument de l'être et non l'être en lui-même. Les molécules sont entraînées dans les fonctions, s'y transfigurent, en sont rejetées, se renouvellent de fond en comble sans que l'individualité de l'animal souffre de la perte de ses atomes primitifs, ou soit modifiée par l'acquisition d'atomes nouveaux; aucun pâturage ne transforme l'agneau en chèvre; aucune viande ne change le loup en tigre; aucune boisson ne fera une femme d'un homme. Les familles sont tellement distinctes qu'elles ne se confondent même pas par voie de reproduction. Un pommier sur lequel on a greffé des pêches ne reproduira jamais un pommier-pêcher, mais un simple pommier qui retombe de lui-même à l'état de sauvageon.

Toutes les modifications sont enfermées dans la famille, et quand elles présentent de trop grands écarts entre les individus accouplés, l'être auquel ceux-ci donnent naissance perd la faculté de se reproduire.

De là cet insuccès constant des tentatives qui ont eu pour but la transmutation des métaux, la constitution d'un développement continu des êtres de la nature et de leur classification rigoureuse, conçue sur cette donnée qu'ils sont les étapes successives d'un ensemble de molécules passant d'un état rudimentaire à une organisation perfectionnée.

Il suffit de constater ces faits pour concevoir l'idée d'une force cachée, persistante, qui met en jeu et transfigure les molécules sans leur être soumise. Cette force a été justement appelée *substance* par les philosophes, parce que, *sub stat*, elle persiste sous la manifestation de l'être, comme un mécanisme idéal existe rigoureusement dans la pensée d'un inventeur avant même que l'ébauche en ait été crayonnée.

SCIENCES TECHNOLOGIQUES.

PRODUCTION. — TRANSFORMATION. — INDUSTRIE.

I

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

On entend généralement par Technologie l'étude des procédés qui constituent la théorie des arts et métiers. On y confond souvent le commerce; on en retranche l'agriculture et l'exploitation des mines. Nous entendons par Technologie tous les moyens que les industries minérale, agricole, manufacturière, constructive, envisagées en elles-mêmes, peuvent employer pour obtenir des produits matériels, indépendamment du prix qu'on y attache et des échanges auxquels ils donnent lieu. Ces dernières questions ressortent du domaine de l'Économie générale.

Les sciences technologiques peuvent se diviser en trois grandes séries de connaissances relatives à :

1° La PRODUCTION pure, où l'homme prend ou fait préparer à la nature toutes les matières dont il a besoin.

2° La TRANSFORMATION, où l'homme, par des procédés physiques ou chimiques, met les matières en état d'utilisation immédiate, c'est-à-dire transforme les matières naturelles en matières ouvrables.

3° L'INDUSTRIE, où l'homme dispose les matières premières et les assemble de différentes manières pour en former, soit des instruments, soit des produits plus compliqués, soit des constructions proprement dites, soit des machines.

II

PRODUCTION.

1° EXTRACTION.

La Production comprend elle-même deux séries de connaissances : l'Extraction et la Culture.

L'extraction est minérale, végétale, et animale.

L'extraction minérale embrasse tous les corps inorganiques que l'on recueille à la surface de la Terre ou que l'on extrait de l'intérieur, soit du sol, soit des eaux, par des fouilles, des excavations, des mines, des sondages de tout genre. Le sel nous offre un exemple de différents genres d'extraction ; on le recueille quelquefois à la surface de la terre, mais le plus souvent des eaux de la mer que l'on fait évaporer, et des mines de sel gemme où il se trouve en blocs.

L'extraction végétale consiste dans la cueillette des fruits, des fleurs et des plantes de tout genre qui viennent à l'état naturel.

L'extraction animale a trait aux pêches et aux chasses de tout genre, aux engrais accumulés en certains lieux par les animaux, comme le guano; à leurs débris précieux : os, ivoire, ambre, coraux, éponges, etc.

2° CULTURE.

La culture se divise elle-même en deux parties qui sont : l'*Agriculture* et l'*Élève des animaux*.

L'Agriculture comprend différentes études qui sont :

1° La connaissance des sols propres aux différentes espèces de plantes, étudiés d'abord au point de vue de leur composition, puis de leurs caractères physiques et cosmologiques.

2° La connaissance des substances fertilisantes, soit minérales, soit végétales, soit animales : engrais, fumiers, composts, etc.

3° Les travaux mécaniques à faire subir aux terres : défrichements, dessèchements, terrassements, arrosage, etc.

4° Les labours, les ensemencements, les transplantations, etc.

5° Les abris et le traitement des plantes pendant leur développement.

6° Les récoltes.

L'Élève des animaux, ou *zoopédie*, comprend :

1° La connaissance des abris et des aménagements propres aux animaux.

2° L'Élevage proprement dit, qui comprend l'hygiène, le dressage et la multiplication des animaux.

Il faut ajouter à la culture naturelle la *culture artificielle*, qui a pour but de produire des plantes et des animaux qu'on ne trouve pas à l'état naturel. Cette série de connaissances sert de transition à la TRANSFORMATION proprement dite.

III

TRANSFORMATION.

1° MANIPULATIONS CHIMIQUES.

La Transformation comprend tous les procédés à l'aide desquels on met en état de servir, soit à la fabrication, soit à la construction proprement dite, les matières fournies par la production, quand elles ne sont pas en état de fabrication immédiate.

La Transformation se divise elle-même en deux parties :

La *manipulation chimique*, comprenant tous les changements de caractère qu'on peut faire subir aux matières naturelles.

La *préparation mécanique*, comprenant tous les changements de forme qu'on peut faire subir aux matières fournies par la production et les manipulations chimiques.

La manipulation chimique s'exerce sur les produits d'origine inorganique et organique. Dans le premier cas, elle comprend tous les procédés à l'aide desquels on transforme les produits extraits du règne minéral. Dans le second, tous ceux qui proviennent des règnes végétal et animal; mais il arrive souvent que ces procédés sont confondus dans la préparation de certains produits.

2° PRÉPARATIONS MÉCANIQUES.

Les manipulations mécaniques constituent une partie des procédés à l'aide desquels on transforme les matières naturelles ou manipulées par les voies chimiques. Les forges qui préparent les métaux, les scieries qui débitent les bois, les tanneries qui préparent les peaux, présentent des exemples de manipulation mécanique exercée sur les produits des trois règnes.

IV

INDUSTRIE PROPREMENT DITE.

L'industrie proprement dite prend les matières naturelles ou transformées, comprises sous le nom général de *matières premières*, pour les amener à leur fin dernière, qui est une utilisation immédiate.

Elle comprend tous les procédés relatifs à la nourriture, aux tissus, aux meubles, aux industries de différentes natures, aux constructions de tout genre et aux machines.

Elle se divise en huit séries de connaissances relatives à :

1° *Alimentation* (comestibles et boissons de tout genre).

2° *Préservation immédiate* (vêtements, tentures, étoffes, etc.).

3° *Mobilier* (meubles et outils de tout genre).

4° *Aménagement* (chauffage, éclairage, ventilation, etc.).

5° *Arts divers* (tableaux, livres, instruments de musique, jeux, etc.).

6° *Préservation extérieure* (constructions fixes de tout genre).

7° *Machines fixes* (horloges, pompes, mécanismes fixes de tout genre).

8° *Machines mobiles* (transports, navigation, aérostation, etc.).

Comme on le voit, cette partie de la Technologie est la plus importante ; celles qui la précèdent ne servent à nous éclairer que d'une manière générale sur les procédés qu'elle applique à chaque objet en particulier.

V

MÉTHODE.

Il est d'usage, Ampère lui-même l'a fait, de comprendre le Commerce dans la Technologie, mais cette manière de voir nous semble inadmissible dans une Exposition générale des sciences ou même dans un traité de Technologie quelconque. Acheter et vendre sont des connaissances qui ne relèvent que de la pratique sociale, et toutes nos connaissances naturelles ne peuvent nous éclairer sur ce point.

Le jeune homme, par exemple, qui n'a d'autre conscience que celle de sa personnalité, l'ouvrier, l'oisif, toute personne, en un mot, qui ne fait pas de commerce, peuvent comprendre la Technologie telle que nous l'avons définie et s'y intéresser ; mais leur fera-t-on entendre aussi facilement ce que

sont la circulation des produits, la tenue des livres, l'économie financière, la législation commerciale avant de les avoir initiés au mécanisme social?

Chaque profession, considérée au point de vue des sciences dont elle s'inspire directement, et de l'intelligence humaine dont elle relève indirectement, peut être comparée à une niche creusée dans une des chapelles d'un grand temple ; mais de ce que l'Économie générale fait face à la Technologie, il n'en faut pas conclure qu'elle lui soit contiguë.

A ce compte, on peut toujours aborder le monument des connaissances humaines par une porte latérale, si humble qu'elle soit. Le maçon peut être initié aux mathématiques par les formes différentes qu'il donne à ses pierres ; à la physique, par les différentes densités qu'elles présentent ; à la cosmologie par leur extraction ; à l'histoire naturelle, par la chaux qu'il éteint pour les unir, aux paillassons dont il les couvre, aux animaux qui les transportent ; à l'anthropologie, par les efforts qu'elles nécessitent de ses muscles et de ses nerfs, les dangers qu'elles lui font courir, les précautions qu'il doit prendre ; à toutes les autres sciences, par le sentiment de sa personnalité, de ses passions, de ses goûts, de ses aspirations, le contact de ses semblables, enfin, par la conscience du rôle qu'il joue dans la société.

Mais, lorsqu'il s'agit d'une Exposition théorique et complète dans laquelle chaque ensemble de connaissances doit être réduit à ses véritables proportions, la méthode n'est plus la même et doit procéder du général au particulier, sans empiéter sur des ensembles où l'intelligence étudie des problèmes bien autrement complexes.

Or, dans la marche que nous avons suivie, il est évident que chacune de nos nouvelles études se déduit de celles qui la précèdent et se constitue d'une manière suffisante, en laissant en réserve ses applications aux connaissances qui la suivent et nécessitent un effort supérieur de l'intelligence. Dans les sciences exactes, nous avons supposé l'être dénué de sens, de milieu, de ressources, d'instruments et de personnalité ; les sciences physiques, lui ont rendu ses sens ; les sciences cosmologiques, ses milieux généraux ; les sciences naturelles, ses ressources ; les sciences technologiques, ses instruments ; les sciences relatives à l'homme vont lui rendre sa personnalité, et la sociologie lui fera connaître le rôle qu'il joue dans l'Humanité.

Le commerce est à l'industrie ce que la musique est à l'acoustique, ce que la peinture est à la photographie. Commerce, musique, peinture nécessitent une étude préalable des passions, des mœurs et des aspirations humaines.

VI

APPLICATIONS.

La Technologie s'inspire directement de toutes les sciences précédentes ; elle complète l'ensemble des connaissances que nous pouvons avoir sur la nature, car elle nous apprend jusqu'à quel point la matière se prête à l'homme sans faillir à ses lois. Aussi, jugeons-nous inutile d'indiquer des applications qui sont trop nombreuses et qu'il faudrait énumérer presque toutes à l'occasion de chaque production industrielle.

VII

HISTOIRE.

L'histoire de la Technologie remonte à l'antiquité la plus reculée ; on peut dire que, tout contrôle scientifique mis à l'écart, les anciens étaient aussi industrieux que nous. Si nous avons réalisé des progrès, la manipulation chimique et la construction des machines automatiques les renferment presque tous.

Nous connaissons, en effet, une infinité de substances chimiques ignorées il y a quelques siècles, et ces découvertes ont été suivies d'applications technologiques, dont la plus remarquable est la photographie.

En fait de machines, si la construction des moulins à vent et à eau remonte à la plus haute antiquité, celle des horloges ne parait guère antérieure au temps de Charlemagne ; encore ne doit-on regarder la chronométrie mécanique que comme une pure curiosité, jusqu'à l'application du pendule aux horloges, application faite, en 1656, par Huygens. Jusque-là, on ne se servait que de cadrans solaires et de sabliers. Les grands bâtiments à voile n'apparaissent qu'aux derniers temps de la Renaissance ; la première machine à vapeur n'est exécutée qu'à la fin du dix-septième siècle ; les aérostats ne sont inventés qu'à la fin du dix-huitième. Presque tous les métiers de tissage mécanique sont de création moderne et n'ont pas plus de deux siècles.

En dehors des procédés chimiques et mécaniques, on doit mentionner, comme découvertes importantes, celles de la gravure sur bois et de l'imprimerie, qui sont contemporaines, en Europe, et remontent à la première moitié du quinzième siècle, mais dont on connaissait déjà l'usage en Chine

avant le onzième siècle. Une grande quantité de procédés technologiques, que l'on considère comme étant d'invention récente, ne sont, en réalité, à commencer par la boussole et la poudre à canon, que des importations chinoises.

VIII

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Les sociétés occidentales modernes, enivrées par leurs rapides progrès industriels, ont cru et croient encore que l'homme est investi d'un pouvoir créateur ; et, de ce que les découvertes sont enchaînées les unes aux autres dans un ordre rigoureux, elles sont portées à conclure que ce pouvoir n'a pas de limites.

Il faut rabattre de ces prétentions : l'homme ne peut ni créer ni détruire ; il ne peut qu'organiser, découvrir et transformer ; encore cette dernière prérogative est-elle bornée, et faut-il que la nature en soit complice.

Si les savants d'aujourd'hui l'emportent sur les savants d'autrefois, c'est par une conscience plus nette des limites imposées d'avance et pour toujours à la puissance humaine. Aussi, font-ils un emploi plus judicieux de leurs facultés dans le milieu qui leur est assigné.

Là est la véritable raison de tous les progrès de la science moderne. L'astrologie s'est réduite à l'astronomie, l'alchimie s'est réduite à la chimie, l'inspiration technologique s'est réduite au calcul et aux applications mécaniques. Au fond, nous ne faisons que trouver ce qui est, c'est-à-dire voir plus juste que nos ancêtres ; et, quand nous organisons, nous sommes bien inférieurs à la nature dont toutes les lois sont pourtant prévues et rigoureuses.

Nos machines les plus ingénieuses et les plus compliquées valent-elles le mécanisme d'un brin d'herbe ? ont-elles seulement, comme le plus simple des corps naturels, la faculté de se reproduire ?

La puissance n'est donc pas dans l'homme ; il n'en est que l'instrument ; la nature même n'en est pas dépositaire ; elle n'en a que la substance ; où donc en est l'essence ? La science positive n'a jamais répondu à cette question.

En réalité, nous sommes renfermés entre le solide et le subtil ; nous ne pouvons ni faire une molécule ni l'anéantir. Si nous voulons conclure que l'atome est absolu, nous concluons qu'un être minuscule, si petit qu'il est insaisissable, nous domine. Si, pour nous venger de cette suprématie insolente, nous nous prévalons de notre intelligence en la refusant à l'atome,

nous tombons sous le coup d'une autre suprématie, car les mathématiques nous apprennent que l'intelligence n'émane point de l'homme, qu'elle est régie par des lois rigoureuses, indépendantes de notre volonté, qui ne se révèlent qu'à condition d'être reconnues. L'intelligence humaine n'est donc que le pâle reflet d'une intelligence supérieure; et nous nous épouvantons à l'idée de ce que deviendraient tant de connaissances si péniblement acquises sur notre milieu, dans le cas où l'ensemble des lois existantes viendrait à se transformer en un autre ensemble, comme une harmonie en une autre harmonie.

SCIENCES ANTHROPOLOGIQUES.

PHYSIOLOGIE. — MÉDECINE. — HYGIÈNE.

I

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Les alchimistes appelaient l'homme un *microcosme*, c'est-à-dire un univers en miniature ; ils voulaient y retrouver tous les éléments et toutes les fonctions de la nature Cette assimilation est aussi séduisante qu'inexacte, car d'un côté, un très-petit nombre d'éléments simples constituent l'organisme humain, et, de l'autre, la plupart des fonctions de cet organisme sont supérieures à toutes celles que la science a pu constater dans l'Univers sensible.

L'homme, au point de vue physique, est soumis aux mêmes lois que les animaux, mais l'existence artificielle qu'il s'est créée l'expose à un nombre presqu'infini de maladies. La médecine joue donc, pour lui, le rôle le plus important dans les sciences naturelles.

L'anatomie et la physiologie animales nous ont préparé à l'Anthropologie, ou étude du corps humain.

L'Anthropologie se divise en trois grandes séries de connaissances : la *Physiologie humaine*, la *Médecine* et l'*Hygiène*

La Physiologie considère l'homme à l'état typique et normal ; c'est-à-dire qu'elle ne tient aucun compte des différences de tempérament et des affections auxquelles nous pouvons être sujets : elle se subdivise en *Organographie*, ou étude de l'homme à l'état de cadavre ; *Physiologie* proprement dite, ou étude de l'homme à l'état vivant et décomposé dans ses fonctions ;

Biologie, ou étude de l'existence humaine considérée dans son mécanisme d'ensemble, dans ses phases et dans ses lois les plus générales.

La MÉDECINE étudie l'homme dans ses maladies ; elle se décompose en trois séries d'études : 1° le *Diagnostic*, qui embrasse toutes les connaissances relatives à la constatation, aux causes et aux caractères que présentent les maladies ; 2° le *Pronostic*, qui embrasse toutes les connaissances relatives au cours et aux différents modes des maladies ; 3° la *Thérapeutique*, qui embrasse toutes les connaissances relatives aux moyens de guérir ou de soulager les souffrances physiques de l'homme.

L'HYGIÈNE envisage l'homme dans ses variétés. Elle constate avec la *Crasiologie* la diversité des tempéraments et de leurs exigences ; elle établit dans l'*Hygionomie* les lois auxquelles il faut obéir pour maintenir la santé ; elle indique enfin, dans la *Prophylactique*, tous les moyens à employer pour prévenir, suivant les âges, les tempéraments, les affections et les milieux, les souffrances physiques qui nous menacent.

II

PHYSIOLOGIE DE L'HOMME.

1° ORGANISATION GÉNÉRALE DU CORPS HUMAIN.

L'organisme humain est recouvert d'une enveloppe membraneuse, élastique, la peau, où la sensibilité se manifeste sur tous les points, par l'intermédiaire d'un réseau composé de filaments d'une substance molle et blanchâtre, les nerfs, dont l'origine commune est le cerveau.

L'ensemble des nerfs (système nerveux) peut être comparé à une plante dont la racine, en forme de bulbe, regarderait le ciel, la tige (moelle épinière) descendrait vers la terre, les branches (nerfs) se ramifieraient dans tout l'organisme en se rejoignant bout à bout par leurs extrémités les plus déliées comme les nervures d'une feuille.

Les branches du système nerveux constituent autant de canaux mystérieux où circulent les modes invisibles de l'action : lumière, chaleur, son, électricité. Chaque fois qu'un rameau nerveux est isolé de la masse totale, la portion du corps que ce rameau vivifiait cesse de sentir et d'agir ; elle est paralysée.

Le cerveau est abrité d'un couvercle osseux, en forme de dôme (le crâne), supporté lui-même par une colonne également osseuse, articulée dans toute

sa longueur (échine, colonne vertébrale). Les petits os (vertèbres), qui constituent cette colonne, sont des anneaux qui semblent enfilés par la moelle épinière, mais qui, en réalité, sont engrenés les uns dans les autres, en laissant passage aux ramifications nerveuses.

La colonne vertébrale est soudée, par sa partie inférieure, à l'arrière du bassin osseux, dont les côtés (hanches) soutiennent le bas-ventre. C'est aux hanches que viennent s'emboiter les os des jambes. A peu de distance du crâne, douze vertèbres détachent chacune, à droite et à gauche, deux branches osseuses qui se recourbent l'une vers l'autre. L'ensemble de ces branches forme comme une cage (thorax) dans laquelle sont suspendus les organes du tronc. Sur le haut de cette cage repose une sorte de harnais (omoplates et clavicules) destiné à supporter les bras.

Les os sont généralement articulés l'un à l'autre par des cartilages, des ligaments et des emboitements.

Le squelette humain, dépouillé de ses muscles, s'affaisserait sur lui-même comme un pantin sans ficelles. Les muscles sont les cordages qui soutiennent et font jouer l'appareil osseux; ils sont formés de faisceaux de fibres charnues, maintenues les unes à côté des autres par des ligaments particuliers (aponévroses) et vont d'une branche à l'autre d'une articulation osseuse où ils s'attachent par chacune de leurs extrémités. Des courroies (gaînes fibreuses) les accolent le long de chaque os en les ceignant de chaque côté de l'articulation.

Chaque muscle est parcouru, dans toute sa longueur, par un nerf qui peut être assimilé à un fil électrique; chaque fois que le courant provenant de la pile cérébrale passe dans le nerf, le muscle correspondant se contracte et fait mouvoir les branches du compas osseux.

Un autre appareil, analogue au système nerveux, le système sanguin, se ramifie également dans tout l'organisme, en réunissant ses ramuscules par leurs extrémités; le centre de cet appareil est le *cœur*, réservoir composé de quatre poches membraneuses qui, sous l'influence des nerfs, se contractent et se dilatent par mouvements réguliers (battements). Les branches qui s'en détachent sont des canaux (veines et artères) par lesquels le cœur reçoit, en se dilatant, et fait jaillir, en se contractant, le sang qui le remplit. Le sang parcourt ainsi toute la ramification des canaux, fertilise, comme un fleuve, toutes les parties du corps, qu'il est chargé d'entretenir et de renouveler; revient au cœur, qui l'envoie se revivifier lui-même dans les poumons, au contact de l'air; et rentre de nouveau dans le cœur pour recommencer son trajet.

Le sang résulte de l'élaboration d'une sorte de sève extraite des matières alimentaires introduites dans l'estomac. Cette sève, appelée *chyle* quand elle sort de l'estomac, prend le nom général de *lymphe* en se ramifiant dans tout l'organisme. Elle a sa circulation préalable avant d'être déversée dans la circulation sanguine par les canaux thoraciques.

Avant de donner naissance au chyle, les aliments sont broyés, humectés, puis écoulés le long d'un grand tube (pharynx) qui les conduit dans l'estomac, où ils subissent plusieurs préparations avant d'être transformés en chyle. Deux organes, le foie et le pancréas, concourent à ces élaborations en leur apportant des sucs particuliers.

La partie des aliments qui n'a pas été réduite à l'état de chyle, après un séjour plus ou moins prolongé dans l'estomac, s'écoule lentement par un conduit qui se replie plusieurs fois sur lui-même, et remplit à lui seul presque tout le ventre. Ce conduit, dont les replis s'appellent vulgairement *boyaux*, *intestins*, présente une longueur d'environ vingt-cinq pieds, quand il est déployé, et aboutit à l'anus, par où les matières non assimilées sont définitivement expulsées.

2° CONSTITUTION DE L'ORGANISME. — ORGANOGRAPHIE.

La dissection ou *anatomie* du corps humain fait donc constater : de la peau, — des nerfs, — des os, — des muscles (dont l'ensemble constitue la chair), — du sang — et de la lymphe. Elle étudie la composition et l'agencement de toutes les parties solides, laissant à la physiologie le soin d'en pénétrer les modes.

A mesure que l'anatomie établit les caractères géométriques et physiques des éléments matériels et les formes des organes, la chimie vient en étudier la composition intime. L'ensemble de toutes les connaissances que nous pouvons acquérir de la sorte constitue l'*organographie*.

L'organographie doit donc être définie : la science complète du cadavre sain et à l'état de type. Elle n'admet de modification dans ses connaissances sur le corps humain qu'au point de vue du sexe et de l'âge, mais nullement au point de vue des tempéraments et des affections morbides.

Les systèmes de l'organisme sont, comme nous l'avons vu, au nombre de cinq : le système nerveux, le système osseux, le système musculaire, le système sanguin et le système lymphatique; on réunit souvent ces deux derniers sous le nom commun de système vasculaire.

Dans cette dernière division, on applique à l'ensemble des connaissances relatives à chaque système un nom particulier. La *Névrologie* comprend toutes les connaissances relatives au système nerveux ; l'*Ostéologie* au sys-

tème osseux, la *Myologie* au système musculaire, l'*Angéiologie* au système vasculaire.

Enfin, quand on étudie les organes en eux-mêmes, et particulièrement les organes renfermés dans des cavités, comme les poumons, le foie, les reins, etc., on fait de la *Splanchnologie*.

Les organes se répartissent en trois grandes classes, d'après le caractère de leurs fonctions.

1° Les organes de relation, qui sont : le cerveau et les *ganglions nerveux*, sortes de succursales du cerveau, — les os, — les muscles, — les organes de la voix, — et les organes des sens : yeux, oreilles, nez, bouche (au point de vue du goût et des saveurs); enfin, le tact, qui comprend la peau dans son ensemble.

2° Les organes d'alimentation, qui sont : — le canal intestinal : bouche, pharynx, œsophage, estomac, duodénum, intestin grêle, gros intestin, anus; — les organes respiratoires : bouche, nez, larynx, trachée-artère, bronches et poumons; — les organes vasculaires : cœur, artères, veines, canaux et ganglions lymphatiques ; — les organes des sécrétions (destinés à élaborer des fluides particuliers), parmi lesquels figurent les *glandes* de tout genre : le foie, la rate, les reins, etc.

3° Les organes de reproduction, peu nombreux, mais qui diffèrent dans les deux sexes.

3° FONCTIONS DE L'ORGANISME. — PHYSIOLOGIE PROPREMENT DITE.

Si l'anatomiste semble avoir pour objet de reproduire l'homme intérieur par des représentations plastiques et inertes de ses appareils et de ses organes, le physiologiste cherche à surprendre, sur le fait même, les mouvements de ces organes et les causes de leurs fonctions. Pour y parvenir, il procède de deux manières : 1° par la *vivisection*, ou dissection des êtres vivants; 2° par l'expérimentation dégagée de toute opération sanglante; mais cette dernière méthode n'est que rarement employée dans la physiologie proprement dite. La première elle-même ne s'effectue directement que sur les animaux, et ne s'applique à l'homme qu'à l'occasion d'opérations chirurgicales.

Nous avons indiqué dans le premier paragraphe de ce chapitre les fonctions les plus générales signalées par la physiologie dans l'étude du corps humain, nous n'y reviendrons pas ici. Nous énumérerons seulement les principales fonctions de l'organisme.

Ces fonctions se divisent en classes correspondantes aux organes, c'est à-

dire en fonctions de relation, fonctions d'alimentation et fonctions de reproduction.

Les fonctions de relation comprennent :
1° Les mouvements, les attitudes et les gestes;
2° La voix;
3° Les sensations externes : vision, audition, flair, goût, toucher;
4° Les sensations internes, en tant que phénomènes sensoriels;
5° Les fonctions cérébrales dans lesquelles plusieurs auteurs comprennent la phrénologie ou théorie des facultés accusées par les protubérances du cerveau;
6° Le sommeil;
7° Le magnétisme animal.

Les fonctions d'alimentation comprennent :
1° L'absorption des aliments, la digestion et la défécation;
2° L'assimilation des matières alimentaires;
3° L'absorption proprement dite : absorption du chyle, de la lymphe; absorption des solides, des matières étrangères; absorption externe; résorption;
4° La respiration et ses accidents;
5° La circulation;
6° Les sécrétions;
7° Les exhalations.

Les fonctions de reproduction comprennent :
1° Les appareils génitaux;
2° La menstruation;
3° La conception;
4° La grossesse et les fonctions du fœtus;
5° L'accouchement;
6° L'allaitement;
7° Les périodes critiques.

4° BIOLOGIE.

« La vie est l'ensemble des forces qui président à l'organisme, le maintiennent et lui permettent de s'assimiler les choses extérieures. »

Telle est la définition naturelle de la vie.

La définition physiologique la plus célèbre, il y a une trentaine d'années, était : « La vie est l'ensemble des fonctions qui résistent à la mort. » Mais on y a substitué celle-ci : « La vie est une propriété particulière de la matière organisée. »

La définition technologique est celle de Descartes, qui considérait les animaux comme des machines automates « la vie est un mécanisme. »

La définition cosmologique est celle des alchimistes « la vie est un nœud des concentrations visibles et invisibles de l'univers. »

Définition physique : « La vie est le résultat d'un système de courants électriques » ou encore : « Le résultat d'une association d'atomes bien disciplinés. »

Définition mathématique : « La vie est un mode de l'action absolue. »

Ces définitions sont insuffisantes, comme toutes les définitions. Nous les avons mentionnées pour constater que la science ne possède aucune certitude sur ce point. Il en est d'autres encore que nous ne pouvons rapporter ici parce qu'elles ont trait à des connaissances dont nous n'avons donné qu'une idée trop sommaire. Elles ne sont pas plus satisfaisantes ; le plus simple, dans ce cas, est d'avouer son ignorance. Nous reviendrons d'ailleurs sur cette question à propos de l'Ontologie.

Quoi qu'il en soit, constatons qu'il y a dans la vie deux catégories de phénomènes bien distincts : — les uns se produisent indépendamment de notre intervention, et ce sont les phénomènes continus ; la vie, en effet, persiste pendant le sommeil, elle n'a donc pas besoin du contrôle de la conscience pour se maintenir. — Les autres ne s'accomplissent que par un effort qui nous est propre ; nous ne ferons jamais mécaniquement un acte extraordinaire ou intelligent, comme de nous battre, ou d'écouter. — La première catégorie de phénomènes a été comprise sous le nom général de phénomènes de la vie végétative ; la seconde catégorie sous le titre de phénomènes de la vie animale. Il serait plus exact de les appeler phénomènes de la vie naturelle et phénomènes de la vie volontaire.

Il conviendrait d'ajouter à ces deux catégories une troisième, mixte, qui comprendrait tous les phénomènes dont l'initiative est volontaire, mais qui, répétés à plusieurs reprises, se produisent mécaniquement. La marche, par exemple, commencée sous l'initiative de la volonté, se continue presque toujours machinalement. Ces phénomènes mixtes, ou phénomènes d'habitude, sont plus nombreux qu'on ne l'imagine, et tout le monde a pu constater la vérité du proverbe vulgaire : « L'habitude est une seconde nature. »

Les phénomènes d'habitude pourraient, en outre, nous éclairer sur les phénomènes naturels, car l'initiative de ces premiers phénomènes nous est

souvent étrangère ; nous les empruntons aux milieux dans lesquels nous vivons, aux influences extérieures, à l'éducation que nous avons reçue, au contact des personnes que nous fréquentons. Nous les tenons surtout de nos parents par la voie la plus directe, qui est la voie héréditaire. Il nous semble hors de doute que l'intelligence de l'organisme a précédé la constitution de l'organisme lui-même et qu'à défaut de cette intelligence, nous devons le jeu de notre existence à la pratique mécanique qui nous en a été transmise. Ce n'est pas en vain que les enfants, avant de venir au monde, séjournent dans les entrailles de leurs mères.

Cette digression nous ramène à la seconde série des connaissances biologiques : l'étude des différentes périodes de la vie ; ces périodes sont celles de :

1° La gestation, pendant laquelle nos fonctions, d'abord confondues avec les fonctions de l'existence maternelle, s'en détachent successivement pour agir d'elles-mêmes ;

2° L'accroissement (adolescence), pendant laquelle notre corps se développe et tend à acquérir la moyenne des forces qu'il doit déployer dans son milieu ;

3° La station ou la force (âge viril), pendant laquelle nous jouissons de l'existence physique dans toute sa plénitude ;

4° La décrépitude, qui, dans l'état normal, résulte de l'abdication sucessive et presque toujours volontaire, quoique inconsciente, de l'exercice de nos forces ;

5° La mort, qui, dans l'ordre naturel, peut être appelée une désertion de l'existence humaine.

La mort suspend toutes nos fonctions ; nos organes alors se décomposent ; leurs éléments matériels perdent peu à peu leur constitution organique pour revenir aux composés plus stables du règne des corps inorganiques ; à moins qu'ils ne se trouvent engagés, avant cette décomposition dernière, dans de nouvelles fonctions.

III

MÉDECINE.

1° DES MALADIES EN GÉNÉRAL. — NOSOGRAPHIE. — DIAGNOSTIC.

La Médecine proprement dite a pour objet d'étudier les causes, le caractère, le cours et le traitement de toutes les maladies.

Il faut entendre par *maladie* toute altération de l'organisme, soit dans ses éléments, soit dans ses fonctions, soit dans son ensemble.

On donne le nom de *Nosographie* à l'ensemble de toutes les descriptions relatives à ces altérations.

Les maladies ont des causes mécaniques : coups, blessures, etc ; — des causes physiques : actions diverses de la matière, de la chaleur, de la lumière et de l'électricité ; — des causes cosmologiques : changements de milieux, altérations de l'atmosphère, etc. ; — des causes physiologiques : poisons, venins, virus, altération des tissus, des fonctions, etc.

Il y a aussi d'autres causes que l'on classe sous le titre général de causes morales ; elles ne ressortent pas du domaine de la médecine proprement dite, mais relèvent du savant, en tant que médecin.

Les causes des maladies sont aussi divisées en causes externes, causes internes et causes héréditaires.

On donne le nom d'*Étiologie* et de *Pathogénie* à l'étude des connaissances relatives aux causes des maladies.

Chaque maladie présente un caractère, c'est-à-dire des symptômes particuliers.

Les symptômes sont locaux, généraux et secondaires.

En général, une maladie commence par affecter une partie quelconque de l'organisme ; de là des symptômes locaux. Les perturbations qui résultent du mal local ont un retentissement dans l'organisme entier, de là des symptômes généraux ; enfin, la persistance de la maladie sur un des points de l'organisme détermine souvent des affections correspondantes sur d'autres points et dans des organes spéciaux, de là des symptômes secondaires.

On donne le nom de *Symptomatologie*, ou de *Séméiologie*, à la série des connaissances relatives aux symptômes ou aux signes des maladies.

La science des causes et des caractères constitue le *Diagnostic* ou la détermination de la nature de la maladie à l'inspection de l'individu affecté.

2° PRONOSTIC.

Toute maladie a un mode particulier qui résulte de son plus ou moins de continuité, de ses différentes périodes, de sa durée et de sa terminaison.

Les maladies sont continues, intermittentes ou rémittentes ; c'est-à-dire qu'elles persistent sans laisser de trêve au malade ; — qu'elles disparaissent pendant quelque temps pour reparaître ensuite ; — qu'enfin, tout en persistant, elles ont des accès plus ou moins vifs.

« La maladie étant une modification dans la vie, un mode particulier d'ac-

tions vitales, une vie parasite, pour ainsi dire, a, comme l'organisme tout entier, une existence marquée par des phases successives qu'on nomme *périodes*. Toutes les affections morbides naissent, augmentent et décroissent comme le corps lui-même, comme tout être vivant... Ce n'est pas ce que croit le vulgaire, lui qui voudrait qu'on pût arrêter à volonté le développement d'une maladie, qu'on pût en débarrasser l'économie du premier coup, et qui s'étonne volontiers que le médecin puisse être malade comme les autres hommes. »

Relativement à leur durée : « Les maladies se distinguent en éphémères, aiguës et chroniques.

« On appelle *éphémère* l'indisposition qui ne se prolonge pas au delà de deux ou trois jours; *aiguë*, l'affection qui se montre avec une certaine intensité, ayant des périodes distinctes qu'elle parcourt régulièrement et ne durant pas moins de quatre jours et pas plus de quarante. La maladie *chronique* est celle qui suit une marche lente, sans périodes bien marquées, sans symptômes bien intenses, et qui se prolonge au delà de quarante jours, quelquefois indéfiniment. Une petite fièvre qui n'a qu'un accès est une maladie éphémère. L'inflammation du poumon, le phlegmon, le panaris existent presque toujours à l'état aigu. La phthisie, les scrofules, les dartres sont des affections chroniques. Presque toutes celles-ci commencent par être aiguës. L'état chronique, lorsqu'il existe depuis très longtemps, devient presque un état définitif, jouissant d'un mode de vitalité propre contre lequel la thérapeutique est impuissante, parce que la nature ne fait rien pour la changer; car, il faut qu'on le sache, ce qui a le plus de part dans la cure des maladies, c'est la nature (*natura medicatrix*), aidée du temps, du régime et autres précautions hygiéniques (1). »

Les maladies, enfin, se terminent par des crises et la convalescence qui précèdent le retour à la santé, et par l'agonie qui précède la mort.

Toutes les connaissances relatives aux modes des maladies, degré d'intensité, périodes, durée, terminaison, constituent le *Pronostic* ou science de ce qui doit arriver dans le cours d'une maladie diagnostiquée.

On comprend, en général, sous le nom de *Pathologie*, toutes les connaissances nécessaires au diagnostic et au pronostic.

3° THÉRAPEUTIQUE.

Mais il ne suffit pas de diagnostiquer et de pronostiquer les maladies, il faut aussi chercher à les guérir, ou, tout au moins, à les soulager. La con-

(1) Docteur A. Bossu, *Anthropologie*.

naissance des ressources et des procédés auxquels la science a recours dans ce but, fait l'objet de la Thérapeutique.

La thérapeutique comprend trois grandes séries de connaissances : celles des médicaments, ou *Matière médicale;* celle de leur application, ou *Traitement;* enfin, celle des différents systèmes employés jusqu'à aujourd'hui dans la cure des maladies, *Iatrosophie.*

La matière médicale comprend toutes les connaissances relatives à la pharmacie, auxquelles il faut ajouter celles qui résultent de l'expérimentation de tous les agents naturels, artificiels, physiques, chimiques ou pharmaceutiques sur les êtres à l'état sain.

Le traitement des maladies comprend l'application de la matière médicale à la guérison et au soulagement des maladies, c'est-à-dire toutes les connaissances relatives à la médecine pratique.

L'*Iatrosophie*, enfin, nous éclaire sur les manières de voir et sur tous les systèmes qui ont régi la médecine jusqu'à ce jour. Ces systèmes peuvent se diviser en trois grandes catégories : systèmes empiriques, systèmes exclusifs, systèmes éclectiques.

IV

HYGIÈNE.

1° HYGIÈNE GÉNÉRALE ET SPÉCIALE.

L'application des connaissances physiologiques et médicales à la conservation de la santé constitue une science finale, qui est l'Hygiène.

L'hygiène est générale ou spéciale, suivant qu'on considère l'homme à l'état de type ou d'individu. L'hygiène générale étudie toutes les influences propres à développer les fonctions quand elles sont à l'état sain.

L'hygiène spéciale est subordonnée aux différentes modifications de l'organisme auxquelles on a donné le nom de *tempéraments*; elle dépend des différences qu'établissent entre les individus, l'âge, le sexe, l'état où ils se trouvent, la diversité des races, et une foule d'autres circonstances.

Les mêmes exercices, les mêmes régimes que beaucoup d'hommes peuvent supporter sans aucun inconvénient, peuvent être très-nuisibles pour d'autres.

« L'étude de ces différences est donc indispensable pour pouvoir déterminer l'emploi des moyens auxquels il convient de recourir pour la conservation de la santé. S'il s'agit d'individus malades, cette même étude est encore nécessaire; mais il faut y joindre celle de toutes les maladies dont ils peuvent

être affectés; celles des moyens généraux qui doivent être employés dans le traitement de chacune de ces maladies (1). »

2° CRASIOLOGIE.

Il faut donc considérer les lois de la santé, non comme uniformes, mais comme variées, suivant les tempéraments proprement dits, les âges, les sexes, les états critiques et les milieux particuliers à chaque individu.

Nous avons donné, avec Ampère, le nom de *Crasiologie*, ou théorie des tempéraments, à l'ensemble de connaissances spéciales relatives aux caractères que présentent les divers organismes, parce que le sens du mot *tempérament*, dans son acception étymologique, exprime l'équilibre des fonctions. Nous n'entendons donc pas seulement, par tempérament, la prédominance d'un système de l'organisme sur les autres, mais toute modification permanente de l'organisme typique.

La Crasiologie est descriptive ou *crasiographique*, et diagnostiquée ou *crasioristique*.

3° HYGIONOMIE.

« Après qu'on a étudié, d'une part, tous les genres d'action que peuvent exercer sur l'homme et les animaux les diverses fonctions des organes soumis à l'empire de la volonté, les agents et toutes les circonstances extérieures qui peuvent modifier les phénomènes vitaux; de l'autre, dans la Crasiographie et la Crasioristique, les circonstances organiques indépendantes de la volonté qui influent sur ces modifications, et font que ce qui est utile à l'un peut être nuisible à l'autre, on a tout ce qu'il faut pour que, en partant de la comparaison de tous les faits observés relativement à ces divers genres d'action modifiés par toutes les circonstances organiques qui tiennent au tempérament, à l'âge, au sexe, etc., des individus et à l'état où ils se trouvent, on en déduise des lois générales d'après lesquelles on puisse, pour chacun d'eux, déterminer les exercices et le régime les plus convenables pour la conservation et l'amélioration de la santé. — C'est dans l'hygionomie qu'on doit placer l'étude approfondie de tout ce qui est relatif à l'éducation physique des enfants, aux exercices et aux régimes qui conviennent aux nourrices, aux femmes enceintes, aux gens de lettres, à ceux qui exercent des professions insalubres, aux précautions que doivent prendre ceux qui habitent, ou, surtout, qui vont habiter les pays chauds, etc.

(1) Ampère, *Essai*.

4° PROPHYLACTIQUE.

« Les hommes sont sujets à des maladies différentes, selon leurs divers tempéraments. Un tempérament sanguin fait craindre l'apoplexie; tel autre tempérament expose à telle autre maladie; il en est de même de l'état où se trouve l'individu, et d'une foule d'autres circonstances qui peuvent amener ce dont il est menacé. C'est de toutes les recherches relatives aux moyens à employer pour prévenir les maladies qu'on redoute que se compose la science à laquelle on a donné le nom de *prophylactique*, à l'imitation des Grecs, qui l'appelaient *prophylactikè*. Les moyens généraux de se préserver, par des précautions convenables, de certaines maladies auxquelles pourraient donner naissance des agents ou des circonstances extérieures, doivent aussi appartenir à cette dernière science (1). »

V

MÉTHODE GÉNÉRALE.

Il est étrange que l'on accorde unanimement à l'hygiène un rôle préventif des maladies, et qu'on la classe généralement en tête de la Médecine, avant d'aborder l'étude même des maladies qu'elle doit prévenir. Cette inconséquence provient de la confusion qu'on fait de l'hygiène avec la biologie, qui est une physiologie d'ensemble. Il n'y a pas lieu de discuter le rang naturel que l'hygiène doit occuper dans l'anthropologie, car elle est évidemment la science finale de toute médecine.

L'ordre naturel des sciences anthropologiques est donc celui que nous avons suivi. Il faut d'abord connaître la constitution des éléments du corps humain, le caractère des organes, leurs fonctions spéciales, leur composition et leurs fonctions d'ensemble. Ces connaissances précèdent nécessairement celles des altérations de l'organisme qui comprennent : 1° la nosologie, divisée elle-même en nosographie ou description des maladies et en nosologie proprement dite, qui est une physiologie morbide; 2° le diagnostic, qui reconnait les causes et les caractères ou symptômes de la souffrance physique; 3° le pronostic, qui en prévoit la durée, les accidents et la terminaison; 4° la thérapeutique, qui embrasse les connaissances relatives à la matière médicale, l'emploi des médicaments et la théorie générale de la médecine

(1) Ampère, *Essai*.

pratique. Viennent enfin les connaissances relatives à la conservation de la santé, résultant de la constatation de toutes les exigences individuelles, *crasiologie;* la détermination des différents régimes, *hygionomie;* et l'indication générale des précautions à prendre dans les différentes circonstances de la vie, *prophylactique.*

VI

APPLICATIONS.

Les mathématiques n'ont pas d'application directe dans l'anthropologie, aussi en nie-t-on la nécessité, sans songer qu'elles sont la base de toutes les certitudes naturelles. On pourrait même aller plus loin et prédire que, dans un avenir plus ou moins rapproché, elles figureront immédiatement dans les sciences médicales, soit comme statistiques, soit comme mesure des dosages dans la matière médicale, ce que l'homœopathie a déjà tenté de faire, soit comme détermination des proportions et des formes des différentes parties du corps humain, soit, enfin, et à un point de vue plus élevé, en constituant la mécanique rationnelle de l'organisme.

La physique fournit à l'anthropologie des instruments d'observation et des procédés curatifs de tout genre, frictions, auscultations, applications hydrothérapiques, applications de la chaleur et de l'électricité.

La cosmologie est une étude de la plus haute importance pour l'anthropologiste, car elle lui permet de déterminer la plupart des grandes influences extérieures de la nature sur l'organisme.

Mais les sciences qui ont les applications les plus nombreuses dans l'anthropologie sont les sciences naturelles et technologiques. La chimie, la botanique, la zoologie font la base de toute théorie, de tout traitement et de toute matière médicale. La technologie, enfin, fournit au physiologiste, au médecin et au chirurgien tous les instruments dont ils ont besoin.

VII

HISTOIRE.

Quoiqu'il y ait une histoire propre à toutes les branches de l'anthropologie, nous n'indiquerons ici que les principaux faits relatifs aux sciences médicales.

La médecine existe de toute antiquité. On l'a considérée presque toujours, chez les peuples primitifs, comme étant d'origine divine, et ceux qui l'ont pratiquée ont été tenus en vénération. Chez les Égyptiens, au dire d'Hérodote, les médecins s'étaient répartis, comme chez nous, le traitement de diverses affections spéciales. Le même auteur nous apprend que les Babyloniens transportaient leurs malades sur la place publique, pour que chaque passant pût leur indiquer les remèdes employés, soit par lui-même, soit par ses proches. Tous les hommes en sont un peu là. « Je n'ai pas assez de médecins dans mes États, » disait à son bouffon un petit prince d'Italie. « — Pas assez de médecins ! répartit le bouffon, quelle erreur ! » Et feignant des douleurs d'entrailles, il se vit bientôt entouré de tous les courtisans, qui lui proposèrent cent remèdes, tous plus infaillibles les uns que les autres.

Chez les Grecs, la médecine, professée d'abord de père en fils par la famille des Asclépiades, fut constituée par Hippocrate, sur ses véritables bases, qui sont l'observation et l'expérience (460 avant notre ère). Jusqu'à lui, les médecins paraissaient s'être beaucoup plus inspirés des idées philosophiques que de l'étude des faits. Hippocrate, par ses aphorismes, domine encore la science moderne.

Les successeurs d'Hippocrate se divisent en dogmatiques et empiriques. Les premiers attribuaient la plupart des maladies à des causes cachées qu'il appartenait au raisonnement seul de découvrir ; les seconds, ne se fiant qu'à l'expérience, excluaient toute théorie. Par une contradiction qu'il n'est pas rare de rencontrer dans la science, les dogmatiques recommandaient l'étude de l'anatomie que les empiriques proscrivaient. D'autres écoles, entraînées par les discussions philosophiques fort à la mode en Grèce, revinrent aux premiers errements et ne tinrent que peu de compte de la doctrine d'Hippocrate.

Le médecin le plus célèbre après Hippocrate, fut Galien (deuxième siècle de notre ère). Il résuma les doctrines de ses prédécesseurs ; mais, au lieu de s'en tenir aux données d'Hippocrate, il bâtit une théorie médicale complète sur l'idée que toutes les maladies sont occasionnées par l'altération des humeurs. Galien, dont la doctrine régit la science médicale aussi longtemps que celle d'Aristote régit la science universelle, donna aux purgatifs le premier rang parmi les médicaments. Les *galénistes* purgèrent donc sans conteste pendant quatorze siècles.

Ce fut au seizième siècle seulement que l'introduction de l'alchimie dans la matière médicale tira la médecine de son engourdissement. Sur l'initiative de Paracelse, l'alchimie joua tout à coup le principal rôle dans le traitement des maladies. C'était tomber d'un excès dans l'autre. Stahl, à la fin du dix-septième siècle, réagit contre cette doctrine, en établissant que les forces qui

président à l'organisme sont particulières et distinctes de toutes celles qu'on peut constater dans la nature. Son système, sous le nom d'*animisme*, s'est réveillé de nos jours avec éclat à propos des discussions biologiques qui se sont engagées entre les facultés de médecine de Paris et de Montpellier.

La faculté de Paris croit que « la vie, selon l'expression de M. Frank, ne s'explique par aucune des lois qui gouvernent la nature brute, ni par les lois de la mécanique, ni par celles de la physique, ni par celles de la chimie. Elle est une propriété particulière de la matière organisée, mais qui change suivant les tissus et suivant les organes dans lesquels elle réside, produisant la mobilité dans les muscles, la sensibilité dans les nerfs, dans le foie la sécrétion de la bile, dans le tube intestinal la transformation des aliments en matières animales, etc. Cette doctrine est celle de Bichat et de Broussais, celle qui règne presque sans partage depuis un demi-siècle dans la faculté de médecine de Paris et qu'on désigne sous le nom d'*organicisme*. La faculté de Paris a pour adversaire la faculté de Montpellier qui, héritière des idées de Barthez, soutient que la vie est bien plus qu'une propriété inhérente aux tissus dont se compose notre corps. Celle-ci la considère comme une force, comme un être à part qu'elle nomme *principe vital*, et qui, doué d'une activité propre, se distingue à la fois de l'âme et des organes et constitue une seconde âme aussi différente de l'âme pensante que de la matière. Ce système est connu sous le nom de *vitalisme*. Enfin (d'après Stahl), la vie n'est pas autre chose que l'âme elle-même, l'âme intelligente et libre, mais privée à la fois de conscience et de liberté lorsqu'elle préside aux fonctions de l'organisme et à la fonction même des organes. Le *moi*, la personne humaine, l'être moral ne serait qu'un état particulier ou un degré supérieur de cette force spirituelle qui meut et pénètre le corps, après l'avoir construit. Éclairée dans le premier cas par la raison et le sentiment, elle n'obéirait dans le second qu'à un instinct aveugle et irrésistible. »

Mais toutes ces discussions modernes ne roulent que sur la biologie et non sur la médecine proprement dite. Animistes, vitalistes, organicistes sont d'accord sur ce point que la médecine repose avant tout sur l'observation et sur l'expérience.

VIII

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Les différents systèmes proposés par les écoles physiologiques et médicales mettent en évidence un fait obscur mais certain, c'est que l'organisme humain n'est pas un jeu fortuit de la matière ; qu'il est mu par des forces

propres plus complexes et plus élevées que toutes les autres forces naturelles.

La biologie nous apprend en outre que l'existence humaine est comme un voyage marqué par différentes étapes. D'où l'homme part-il? où va-t-il? telles sont les deux questions qui viennent naturellement à l'esprit quand on lui parle de ce voyage; mais il est difficile de les résoudre.

Plusieurs physiologistes ont émis sur l'origine de l'homme une hypothèse ingénieuse, celle du perfectionnement successif des êtres. Cette hypothèse n'est pas neuve; on la retrouve dans les traditions les plus reculées de la Chine; l'homme, disent les Chinois, aurait passé par différents degrés d'animalité avant de parvenir à sa forme actuelle.

Malheureusement, l'expérience ne conclut pas en faveur de cette hypothèse; nous avons déjà constaté que les familles animales sont distinctes et séparées les unes des autres comme par un abîme. La chaîne des êtres n'existe pas; tous les essais de classification tentés au point de vue de cette idée l'ont surabondamment démontré.

L'étude attentive de l'histoire vient elle-même lui donner un démenti en nous révélant que le progrès n'existe pas dans l'intelligence en elle-même. A toutes les époques, des hommes supérieurs ont vu les choses avec la même netteté que les hommes supérieurs d'aujourd'hui. Le progrès ne consiste que dans l'accession d'un plus grand nombre d'hommes à la science. Nous allons voir en effet que, dans le monde intellectuel, les choses sont complètes, rigoureuses et immuables, et que ce qu'on appelle vulgairement la marche des idées n'est pas autre chose que la marche que nous faisons dans le domaine des idées.

La question de la fin de l'homme est encore plus mystérieuse que son origine pour tous les savants qui ne veulent reconnaître d'autres certitudes que les certitudes palpables. Aussi, une école a-t-elle limité à l'observation et à l'expérience seulement toutes les connaissances humaines, considérant le reste des efforts de l'esprit comme entièrement stérile.

Mais, si, à la rigueur, nous sommes disposés à faire bon marché d'un passé obscur, notre indifférence en ce qui touche nos origines ne s'étend pas à l'avenir, c'est-à-dire, à nos fins. Il est impossible d'espérer que l'homme passera jamais devant un tombe sans réfléchir à ce qui l'attend au delà; et il n'en faut pas davantage pour que les questions philosophiques se présentent en foule à son intelligence.

Ce sont ces questions que nous allons aborder.



NOOLOGIE.

IDÉES, RAISONNEMENTS, SYSTÈMES.

I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Nous avons jusqu'ici parcouru de nombreux ensembles de *connaissances*, et nous ne nous sommes pas encore demandé en quoi consiste la faculté de *connaître*.

Cette faculté, en effet, ne se révèle qu'après une longue pratique de la matière et de nos sens. Nous la retrouvons toujours cachée derrière un phénomène sensoriel quelconque.

Voici une rose; elle est gracieuse; forme et couleurs charment l'œil; comme elle sent bon! Ce matin, cllo était tout humide encore de rosée; maintenant ses pétales sont essuyés et presque moites — Que faites-vous? Vous l'avez voulu cueillir, vous vous êtes piqué. Vous la preniez donc pour un charmant fantôme? Elle vous prouve qu'elle existe et que vous sentez.

Mais d'où vient qu'un peu de matière organique pénétrant la vôtre a se coué votro être? La physique nous apprend que vous avez senti parce que votre tact a été influencé. Cette explication ne vous satisfait pas. La physiologie va vous démontrer qu'un de vos nerfs a reçu une commotion, et que cette commotion a été transmise à votre cerveau. Serait-ce donc que la propriété de sentir réside dans votre cerveau? Mais, lorsque vous dormez ou que vous pensez vivement à autre chose, votre cerveau est insensible. Ce cerveau n'est qu'un instrument que vous entendez ou que vous n'entendez pas, suivant que vous vous en éloignez ou que vous vous en rapprochez. — Quelle est donc cette chose qui tour à tour écoute ou n'écoute pas votre cerveau? Aucune des sciences que nous avons parcourues ne répond à cette question.

Le physicien, si versé dans l'optique, vous a-t-il expliqué comment vous avez eu connaissance de cette rose qui est en dehors de vous ; comment elle se révèle simultanément à vous et à moi ; comme elle se révélerait à la fois à cent mille personnes qui la regarderaient de cent mille côtés différents. — Non assurément. — Voilà pourtant un phénomène aussi intéressant à étudier que celui d'un coup de foudre ou d'une combinaison chimique.

Ce n'est pas tout : vous n'avez ici, sous les yeux, que du papier blanc couvert de petits signes noirs, et cependant, derrière ce papier, du milieu de ces lignes que l'ignorant prend pour une mystification, je suis venu vous présenter l'image d'une rose ; je vous en ai fait respirer le parfum ; vous vous y êtes piqué à l'improviste. — Ces sensations sont imaginaires, dites-vous, — Je l'accorde ; mais, de quelque nom que vous les appeliez, pouvez-vous les nier ? Montrez la page au premier venu, s'il sait lire, il sentira ce que vous avez senti.

Il y a plus encore, s'il m'avait plu de vous dire que la rose était bleue, vous l'auriez, en vous-même et tout d'abord, vue bleue. Vous vous seriez récrié ensuite, car il n'y a pas de roses bleues ; mais l'impression du bleu, accolée à l'impression de la rose, n'en aurait pas moins été produite.

Toutes ces choses sont des idées. — C'est précisément ce que je voulais vous faire dire, car une idée est une perception quelconque, simple par elle-même, qui ne se définit pas, qu'on constate ou qu'on nie, mais qui n'en existe pas moins pour celui qui la subit.

Nous nous rencontrons dans un appartement ; vous venez du dehors ; je viens de la cave. Vous dites que l'appartement est sombre ; je dis qu'il est clair. Nous voilà en contradiction complète, et pourtant nous avons raison tous deux.

C'est que toutes les idées sont vraies en elles-mêmes, mais qu'elles sont relatives, sauf une seule qui est absolue, à laquelle toutes les autres aboutissent ou dont elles découlent.

II

IDÉOLOGIE.

Il y a donc des choses qui nous affectent sans affecter nos sens ; toutes les choses elles-mêmes qui affectent nos sens n'y passent que comme à travers un canal fait exprès pour les percevoir dans certaines conditions. Mais elles n'agissent en définitive sur notre *moi* qu'à l'état d'idées. Le sommeil est une succession de rêves. Si ces rêves s'enchaînaient logiquement les uns aux

autres, si chaque soir nous reprenions le fil de cet enchaînement pour le suivre jusqu'au matin, nous ne saurions plus lequel du sommeil ou de la veille est la réalité.

Les extatiques, les hallucinés, les fiévreux en sont un peu là. Leurs rêves s'enchaînent et leur paraissent tellement vrais, ils en ont le sentiment si vif, la conviction si profonde, que quand ils nous les traduisent, nous sommes ébranlés.

Qui ne connaît l'histoire de cet habitant d'Athènes où les représentations théâtrales étaient gratuites et se faisaient de jour. Notre homme, le soleil couché, s'allait asseoir dans l'amphithéâtre désert; là, les yeux fixés sur la scène, il y voyait, toute la nuit, se jouer les plus belles tragédies. On le guérit de sa folie; il en mourut. Je pense que les acteurs invisibles dont on l'avait si malencontreusement séparé vinrent l'arracher à son milieu humain pour le faire vivre dans leur monde. Il n'eut pas de peine à quitter le nôtre, qui lui retranchait si cruellement le plus grand de tous ses plaisirs.

Nos connaissances, en elles-mêmes, sont donc des enchaînements d'idées nouées d'une certaine façon les unes aux autres, et dans une harmonie telle, qu'elles doivent nécessairement aboutir à une idée dominante qui, pour l'homme, est absolue. Mais avant de chercher l'ordre de ces enchaînements, il importe d'examiner toutes les idées qui sont particulières à notre milieu. Tel est l'objet de l'idéologie proprement dite.

Les idées peuvent se diviser en deux grandes séries : celles que les sens éveillent en nous et que l'on appelle *sensibles*, et celles que nos sens ne peuvent ni saisir, ni contrôler, ou *suprà sensibles*. Les premières sont toutes comprises dans l'ensemble des connaissances que nous avons parcourues; les secondes y sont étrangères; mais entre les unes et les autres, il y a des idées intermédiaires qui ont été amenées par des faits sensoriels, et qui ont persisté ensuite indépendamment de ces faits; tels sont, par exemple, les souvenirs.

Nous diviserons les idées en trois catégories : les *sensations*, les *imaginations* et les *abstractions*.

Nous entendrons par sensation toute idée qui résulte d'un phénomène sensoriel quelconque; un choc entraîne l'idée de résistance; l'aspect du soleil est suivi de l'idée de lumière, la détonation d'un canon fait naître l'idée de bruit.

Les imaginations sont des idées plus ou moins exactes, plus ou moins confuses, plus ou moins capricieuses de sensations, que nous cherchons à reproduire ou que nous modifions à notre gré. L'idée d'un paysage que nous avons contemplé, celle d'un géant dont les proportions sont surhu-

maines, celle des sirènes, moitié femmes, moitié poissons, dont parlent les poëtes, sont des imaginations.

Chaque fois que nous concevons une idée indépendamment de tout phénomène sensoriel ou de toute réminiscence de sensation, cette idée est une abstraction. Les idées de loi, de cause, d'effet, de force, de sagesse sont des abstractions. Les abstractions d'ailleurs sont plus nombreuses qu'on ne le suppose au premier abord, car elles comprennent toutes les autres idées. Il suffit pour cela de dépouiller ces idées de leurs *attributs* sensibles ou imaginaires pour qu'elles deviennent abstraites.

On peut même affirmer que toutes les idées en elles-mêmes sont abstraites et que les sensations et les imaginations n'en sont que des perceptions grossières, incomplètes et confuses. Quand je vois un fil tendu j'ai l'idée de la ligne droite, mais la ligne droite figurée par le fil est grossière ; de plus, la ligne droite ainsi représentée est limitée, c'est-à-dire incomplète ; quand j'imagine que le cercle est identique à un polygone régulier d'un nombre infini de côtés, je fais une confusion de formes.

Au fond, toutes les abstractions sont une et n'existent à l'état de pluralité que parce que notre esprit envisage l'idée unique, absolue, abstraite, avec des restrictions qui chacune donnent naissance à une conception relative.

L'idée absolue est l'idée d'action. Tout ce qui agit *est*, c'est-à-dire, dure, tient de la place, se meut ; l'idée d'*être* est une idée relative parce qu'elle localise l'action en la centralisant en un foyer quelconque.

De l'idée d'être vient l'idée d'*essence*, ou de ce par quoi une chose *est*. L'essence d'une sphère est d'avoir tous les points de sa surface également éloignés d'un point qu'on appelle centre. Si nous concevons cette sphère dans le vide, dans l'air, dans le feu, dans une matière quelconque ; le vide, l'air, le feu, le corps renfermés dans la forme sphérique sont les *substances* de la sphère. Enfin les différentes qualités (couleur, grandeur, résistance, etc.) que peuvent présenter les substances sont appelées *attributs*, quelques philosophes les appellent aussi, mais improprement, *modes* et *accidents*.

Comme les idées relatives sont restreintes, notre esprit cesse de les percevoir au delà des limites dans lesquelles elles lui paraissent contenues et conçoit alors la série des idées dites de *négation*. L'être, ayant son foyer fixe ou mobile dans certains milieux paraît, s'évanouir loin de ces milieux ; on dit alors qu'il n'existe plus. De là l'idée de *non être* qui, généralisée, conduit à l'idée de *néant*. Mais les négations ne doivent impliquer que le doute, car, lorsqu'on les formule d'une manière absolue, on est toujours conduit à l'absurde.

Les idées sont aussi appelées *nécessaires* ou *contingentes*. Les essences sont

nécessaires, les substances et les attributs sont *contingents*. L'essence d'une sphère ne peut être modifiée ou disparaître sans que l'idée de sphère s'évanouisse immédiatement; elle est donc nécessaire. La substance d'une sphère et les attributs qu'elle présente peuvent changer ou disparaître sans que l'idée de sphère cesse de persister, ils sont contingents.

Il y a beaucoup d'autres termes employés par les philosophes; mais la connaissance s'en acquiert par la pratique même de la philosophie, nous n'avons signalé ici que ceux qui reviennent le plus fréquemment.

III

LOGIQUE.

1° DES PENSÉES.

De ce que nous venons de dire, on peut conclure que le monde intellectuel est seul constant, que tout s'y enchaîne dans un ordre rigoureux et que si nous n'en concevons pas l'unité, cela tient à notre faiblesse qui n'en peut embrasser à la fois que des parties et se noie dans le tout. Il importe donc d'établir comment nous devons proceder dans l'examen de chacune de ces parties et dans la recherche de l'enchaînement des idées qui doit toujours, quand on part d'une idée relative quelconque, aboutir à l'idée absolue.

La logique a pur but de nous faire connaître quel est l'enchaînement rigoureux des idées, enchaînements qui constituent les pensées, de nous apprendre à discerner quelles sont les pensées vraies et quelles sont les pensées fausses; comment les jugements qui sont des enchaînements de pensées sont justes ou non; de quelle façon enfin nous pouvons parvenir à la connaissance de la vérité.

La règle capitale de la logique est de se garder avant tout de l'opinion qu'il peut y avoir deux idées absolument contraires. Tout raisonnement entrepris avec cette pensée préconçue doit tôt ou tard aboutir à l'absurde. De même, lorsqu'on constate une contradiction complète dans le cours ou à la fin d'un raisonnement, on peut être sûr que le raisonnement est faux.

Si nous partons par exemple de cette pensée que l'être et le néant coexistent absolument, nous sommes arrêtés dès le début; car si le néant est absolu, l'être n'existe pas; si l'être est absolu, le néant n'existe pas; si tous

deux coexistaient, ils s'annuleraient réciproquement ; il n'y aurait pas lieu de raisonner ni sur l'un ni sur l'autre.

On a l'habitude de considérer le relatif comme contradictoire de l'absolu; nous avons déjà démontré, dans les sciences exactes, que cette contradiction n'existe pas et que l'idée relative tend toujours vers l'idée absolue.

Toute pensée se compose de deux idées dont l'une est capitale, l'autre secondaire. Ces deux idées sont toujours liées par le verbe *être*, verbe par excellence; car tous les autres verbes ne sont qu'une qualification du verbe *être*, un mode d'action de l'existence. Aimer, haïr, jouir, souffrir, ne signifient pas autre chose que : être amour, être haine, être joie, être souffrance.

L'idée est subie par celui qui la perçoit; la pensée est réfléchie. La pensée la plus simple est celle qui consiste à affirmer une idée, c'est-à-dire à constater qu'on l'a perçue. Je vois une rose, et je n'ai que l'idée de rose ; mais si mon attention s'éveille et si je me dis : « Il y a là une rose, » j'ai pensé, car j'ai signalé en dehors de moi l'idée qui s'est éveillée en moi ; de là l'origine du mot *réflexion*, qui est comme un renvoi de l'idée vers sa source.

Il arrive souvent qu'une idée du monde sensoriel me parvienne sans que la chose à laquelle elle se rapporte soit là pour confirmer l'idée perçue; mon premier mouvement est alors de nier l'idée, ce qui est absurde.

La pensée la plus simple consiste donc dans une affirmation; vient ensuite la pensée de négation à laquelle succède toujours la pensée de doute, car toute négation constate que nous avons subi une idée et que nous l'avons rejetée; mais cette idée s'est affirmée par le fait seul que nous la nions.

Le doute est le point de départ de toutes les pensées complexes; ne pouvant affirmer une idée qui n'affecte pas nos sens, nous cherchons dans notre souvenir, dans notre imagination, les attestations et les analogies qui appuient notre affirmation. De même, quand nous nions, nous cherchons à constater que notre négation est fondée.

Toute pensée peut être considérée comme une idée complexe que l'esprit perçoit d'un seul coup. Dans ce cas, les pensées sont claires ou obscures, distinctes ou confuses, abstraites ou concrètes, particulières, générales ou universelles, absolues ou relatives, affirmatives, douteuses ou négatives, justes ou fausses, évidentes, incertaines ou absurdes, etc.



2° DU JUGEMENT.

Chaque fois qu'on se prononce sur une pensée, il y a jugement. De même que la pensée dans sa simplicité primitive est une idée réfléchie, le jugement est une pensée réfléchie.

Tout jugement doit donc être considéré comme le résultat d'un contrôle auquel on a soumis une ou plusieurs pensées quelconques.

Nos jugements s'inspirent de l'évidence, de la sensation, du témoignage et de l'analogie.

L'évidence existe là où il ne peut y avoir l'ombre d'un doute. Quand on nie l'évidence, le fait le plus grossier peut l'établir. « Il n'y a pas de mouvement, disait un disciple de Zénon. — Pas de mouvement! répliqua son adversaire en le secouant avec vigueur; qu'est-ce donc que ceci? »

La sensation, bien inférieure à l'évidence, parce qu'elle peut nous abuser, a été l'objet de critiques nombreuses. La plus célèbre est celle-ci: « Quoique tous les hommes s'accordent à appeler rouge une même bande du spectre, rien ne prouve qu'ils aient la même sensation en apercevant ce que j'appelle le rouge. » Aussi est-il nécessaire de vérifier les sensations les unes par les autres, et de les soumettre au contrôle des instruments que fournit la physique.

Le témoignage est encore plus douteux que la sensation, car il faut admettre que le témoin n'ait pas été trompé, qu'il ne veuille pas tromper, et qu'il s'exprime sans obscurité.

L'analogie, enfin, consiste à rapprocher des phénomènes semblables et à leur supposer une même cause. Les erreurs sont plus fréquentes encore dans les jugements portés par analogie que dans les autres jugements.

Les jugements sont pensés ou parlés; dans ce dernier cas on les appelle *propositions*.

3° DU RAISONNEMENT.

Le raisonnement résulte de la comparaison de deux ou plusieurs jugements dont on veut tirer une conclusion.

Tout raisonnement n'est juste qu'à la condition de ne donner aucun prétexte à une contradiction absolue, soit de pensées, soit de jugements. Mais comme cette règle est trop générale, on a proposé un contrôle particulier qui est le procédé syllogistique.

Au fond de chaque raisonnement, on peut toujours trouver un syllogisme.

Quand je dis : « Les médecins sont, comme tous les hommes, sujets aux maladies, » mon raisonnement peut se décomposer de la manière suivante :

Tous les hommes sont sujets aux maladies.

Or les médecins sont des hommes.

Donc les médecins sont sujets aux maladies.

« Dans le syllogisme, dit M. Barthélémy Saint-Hilaire, il y a toujours trois propositions. Or la proposition, à son tour, se compose essentiellement de deux termes : un sujet et un attribut. Pour que la seconde proposition soit unie à la première, il faut qu'elle emprunte à celle-ci l'un de ses termes. A ce terme emprunté à la première proposition, la seconde en ajoute un nouveau qui lui appartient à elle-même, et ce nouveau terme passe dans la troisième proposition, où il est uni au terme restant de la première. De cette façon, la trame ne se rompt pas et son tissu est indissoluble. Le plus grand terme ou attribut de la première proposition se nomme le grand terme ou le *majeur*, parce qu'il contient les deux autres ; le dernier terme se nomme le *mineur* ou le petit terme, parce qu'il est en effet le plus petit des trois ; considérés tous deux ensemble, on les nomme les extrêmes. Le terme intermédiaire qui est contenu dans le *majeur* et qui contient le *mineur*, est appelé *moyen terme*.

« Les propositions tirent leurs noms des deux termes extrêmes ; celle qui renferme le plus grand terme dans toute sa compréhension se nomme la *majeure;* celle qui renferme le plus petit terme se nomme la *mineure;* considérées toutes deux sous un point de vue commun, on les appelle *Prémisses*, parce qu'elles précèdent la *Conclusion* qui en sort logiquement et fatalement. »

Ainsi, dans mon syllogisme, « sujets aux maladies » est le majeur, parce qu'il comprend les hommes et les médecins; « médecins » est le mineur; « hommes » est le moyen terme.

Mais, ne nous y trompons pas, le syllogisme n'est qu'un contrôle et nullement un procédé pour former le raisonnement. Quoiqu'il soit entouré de règles et escorté de prescriptions par le procédé syllogistique, l'esprit qui n'est pas exercé aura de la peine à discerner le syllogisme véritable du syllogisme sophistique dont voici un des plus curieux exemples :

Épiménide de Crète dit que tous les Crétois sont menteurs.

Or Épiménide est Crétois,

Donc il est menteur.

Mais, s'il est menteur, il dit faux, et les Crétois ne sont pas menteurs.

Or Épiménide est Crétois,

Donc il n'est pas menteur.

Mais s'il ne ment pas, les Crétois sont menteurs.

Or il est Crétois..., etc. On tourne ainsi dans un cercle vicieux dont il est impossible de se dégager.

On appelle sophisme tout raisonnement faux; les principaux proviennent :

1° De ce qu'on prouve souvent une chose qu'il est inutile de prouver. Cette question étant posée : « La guerre est-elle nécessaire? Un interlocuteur s'obstinera à démontrer que la guerre est une chose déplorable, ce que tout le monde reconnait. »

2° De ce qu'on admet d'abord ce que l'on veut démontrer : « Cet homme est un voleur, je l'ai trouvé chez moi; qu'y venait-il faire, sinon me voler? »

3° De ce qu'on attribue à un effet une cause qui lui est étrangère : « Vous me prévenez qu'il y a un piége sur ma route; j'y suis pris; c'est donc vous qui m'y avez fait tomber. »

4° De ce qu'après avoir énuméré certaines conditions, on en déduit une conclusion comme si l'énumération était complète : « Vous n'êtes pas riche, vous n'avez pas de crédit, donc vous êtes un malhonnête homme. »

5° De ce que l'on fait un cas général d'un cas individuel : « Le carmin est la couleur qui me plaît le plus, donc le carmin est la plus belle couleur. » — ou un cas individuel d'un cas général qui n'est pas absolu, comme dans le sophisme d'Epiménide.

6° De ce qu'on traite plusieurs choses réunies, comme si elles étaient isolées : « Le jeune Horace a tué, l'un après l'autre, les trois Curiaces; donc il était plus fort à lui seul que les trois Curiaces ensemble. »

7° De ce qu'on passe d'un genre dans un autre : « L'opium est un poison, donc les médecins qui l'administrent sont des empoisonneurs. »

Nous ne parlons pas ici des sophismes dictés par la mauvaise foi; il serait trop long de les énumérer.

4° MÉTHODE.

On voit clairement que les idées, les pensées, les jugements et les raisonnements sont enchaînés dans un ordre rigoureux qu'il faut sans cesse avoir présent à l'esprit si l'on ne veut tomber dans quelque erreur. Plus les objets sont nombreux, plus il importe de les classer, de les sérier et, en quelque sorte, de les aménager. C'est là l'objet de toute méthode.

En philosophie, la méthode est capitale, car notre intelligence se trouve en présence de toutes choses, non-seulement de celles qui tombent ou peu-

vent tomber sous nos sens, mais aussi des choses imaginaires, abstraites et purement idéales.

Les deux procédés les plus importants de la méthode sont l'*analyse* et la *synthèse*.

Bien concevoir son sujet; l'exprimer le plus clairement et le plus simplement possible; en établir les divisions principales d'une manière nette; procéder ensuite pour chaque division comme on a fait pour le sujet entier; subdiviser les divisions, en suivant toujours les mêmes régles et en évitant de rien omettre, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à des idées simples et évidentes par elles-mêmes, tel est le procédé de l'analyse.

La synthèse suit la marche inverse. Elle part des idées simples pour les composer, les sérier, les classer et reconstituer le tout.

Ces deux procédés ne vont jamais l'un sans l'autre. En effet, pour bien analyser, il faut recomposer à chaque instant les parties que l'on sépare; pour bien synthétiser, il faut vérifier pièce à pièce les éléments que l'on compose.

Toute méthode nécessite une connaissance préalable du sujet et de ses parties. Il importe peu, dès lors, de savoir s'il faut mieux analyser que synthétiser. Bacon compare les deux procédés à une échelle double; il est puéril de demander par quel côté on y montera, de quel côté on en descendra.

Le principal objet d'une méthode philosophique quelconque est de déterminer l'idée fondamentale. Descartes, passant en revue toutes les idées qui servent de clef de voûte aux synthèses qui l'avaient précédé, les élimine une à une pour chercher en lui-même la perception la moins discutable. « Je pense, dit-il, donc je suis, » et, dans la conception de la pensée, il puise la conviction de son existence propre et des faits extérieurs qui la confirment.

Les mathématiques nous témoignent de la façon la plus complète, que toutes nos certitudes reposent sur la conception de l'idée pure, abstraite, incorporelle. Aussi ont-elles déterminé presque tous les philosophes à poursuivre l'étude des idées en elles-mêmes, indépendamment de leurs manifestations et des traces que ces manifestations laissent dans notre intelligence.

La philosophie, conçue à ce point de vue, est appelée *Métaphysique*, c'est-à-dire *au dessus de la nature*.

Nous allons indiquer sommairement quels sont les principaux caractères de la Métaphysique; mais on ne parviendra à les bien saisir que quand on aura parcouru l'exposition rapide des systèmes philosophiques les plus importants.

3° MÉTAPHYSIQUE.

Quand on considère toutes choses au point de vue idéal, on aboutit fatalement à une conception absolue que notre intelligence constate, mais qu'elle ne peut embrasser.

Cette conception, pour la raison humaine, se résume dans l'idée d'action, et il est impossible que nous puissions aller au delà de cette cause première, à laquelle remontent tous les phénomènes, par les seuls efforts du raisonnement.

Cependant, la plupart des métaphysiciens qui poursuivent la vérité au delà des horizons de nos connaissances, s'accordent à reconnaître un principe générateur de toutes choses qu'ils appellent Dieu ; cause première, identique à elle-même, intelligence suprême, en qui la puissance est égale à la volonté et où réside la liberté complète.

On appelle cause tout ce par quoi une chose est ; le résultat d'une cause s'appelle effet. L'effet d'une cause peut être cause d'un autre effet.

On dit qu'une chose est identique quand elle est immuable.

C'est de l'idée de Dieu que la plupart des métaphysiciens font procéder toutes les idées, toutes leurs traductions sensibles, toutes nos facultés de les percevoir, soit à l'état sensoriel, soit à l'état de souvenir, soit à l'état d'abstraction.

L'ensemble de ces facultés constitue l'*âme*, qui est douée de sensibilité, de mémoire et de volonté, mais dont la liberté est limitée, parce que sa puissance n'est pas à la hauteur de sa volonté.

L'âme est considérée comme ayant conscience d'elle-même, c'est-à-dire de son individualité; on admet également qu'elle est immortelle, comme toutes les choses immatérielles.

On a dit, en parlant de l'espace infini, qu'on pouvait le définir : « Une sphère dont le centre est partout et la surface nulle part. » Si l'on assimilait l'idée de Dieu à l'idée d'une pareille sphère, l'âme y figurerait comme un centre déterminé.

L'âme est considérée comme entièrement immatérielle ; ce qui a donné lieu à un problème capital que les métaphysiciens n'ont jamais pu résoudre : l'union de l'âme et du corps. En effet, on ne peut concevoir comment quelque chose d'absolument immatériel pourrait agir sur quelque chose d'absolument matériel.

Leibnitz a prétendu que les corps sont des mécanismes arrangés de telle sorte qu'ils doivent fatalement accomplir une succession d'actes déterminés

dans un temps exactement précisé d'avance, et que les différentes évolutions des idées sont également déterminées à l'avance ; de telle sorte que chaque mouvement mécanique coïncide rigoureusement avec chaque inspiration de l'âme.

Malebranche a dit que chaque fois que l'âme formule une idée, Dieu fait faire au corps le mouvement correspondant.

L'Anglais Cudworth a supposé qu'entre l'âme et le corps, il y a une substance intermédiaire : le *médiateur plastique*, qui transmet au corps la volonté de l'âme. Mais quelle est cette substance, immatérielle du côté de l'âme, matérielle du côté du corps? ce médiateur ressemble à un pont jeté d'un rivage vers un rivage opposé qui n'existe pas.

Dans l'impossibilité de sortir de cette impasse, les philosophes ont été conduits à trois grandes hypothèses :

La première consiste à considérer toutes choses comme un miracle perpétuel : Mysticisme.

La seconde, à nier la matière et à la considérer comme une illusion : Spiritualisme.

La troisième, à nier l'esprit : Sensualisme.

III

SYSTÈMES PHILOSOPHIQUES.

1° PHILOSOPHIE ORIENTALE.

L'Orient paraît avoir eu le privilége de connaître, bien avant les Grecs, la plupart des systèmes philosophiques émis jusqu'à nos jours. Il est difficile de décider si, dans les âges suivants, il a été produit une métaphysique plus complète, soit au point de vue pratique, soit au point de vue de la pure spéculation, soit au point de vue de l'interprétation des révélations.

Confucius, qui vivait, il y a vingt-cinq siècles, en Chine, est, sans contredit, le philosophe qui a compté, et compte encore aujourd'hui, le plus grand nombre de disciples. Après avoir étudié les différents systèmes philosophiques accrédités jusqu'à lui, il établit que la raison humaine, d'origine céleste, est enfermée dans une moyenne au centre de laquelle elle doit toujours se maintenir en équilibre. C'est ce qu'il appelait « la voie du milieu, également éloignée des deux extrêmes. » Il disait à ses disciples :

« Ma doctrine est simple et facile à pénétrer ; elle consiste à posséder la droiture du cœur et à aimer son prochain comme soi-même.

« Le ciel est le principe universel; il est la source intarissable de toutes choses. Les ancêtres, sortis de cette source féconde, sont eux-mêmes la source des générations qui les suivent.

« Aussi, je commente et j'éclaircis les anciens ouvrages; je n'en compose pas de nouveaux, j'ai foi dans les ancêtres et je les révère.

« Cent nuits de méditations abstraites n'ont jamais valu, pour moi, une heure bien employée à étudier les traditions que nous ont laissées nos ancêtres.

« L'homme a cinq devoirs sociaux : la charité, la justice, la soumission aux usages établis, la droiture, la sincérité.

« Quelle que soit sa position sociale, il est tenu d'éclairer et d'améliorer sa personne. »

Confucius faisait de l'instruction consciencieuse l'instrument capital du souverain bien. Il considérait l'homme comme ayant reçu un mandat du ciel pour gouverner la terre et favoriser, dans les conditions normales, le développement de tous les êtres.

Confucius regardait le principe de l'intelligence comme évident de lui-même; il ne cherchait pas à le déterminer; c'était un héritage reçu des ancêtres, qui le tenaient eux-mêmes du ciel. Son compatriote et son contemporain, Lao-Tseu, recherchant la cause des causes et des effets, prétendait qu'il y a deux principes dans le monde : le *tao* ou *raison suprême*, de qui découlent tout mouvement, toute existence, tout phénomène sensible; et un principe absolu, éternel, immuable, « qui est la négation de tout, excepté de « lui-même. Que ce principe est le *rien*, le *non être*, relativement à l'être re- » latif, mais qui est aussi l'*être* par rapport au *néant* (1). »

— Lao-Tseu, disait Confucius, est si subtil que je le perds de vue. Son raisonnement ressemble à une flèche lancée dans l'air; à peine est-elle décochée, qu'on cesse de l'apercevoir.

Les Indiens établirent les premiers que toute raison humaine procède de Dieu et qu'elle y retourne; qu'elle est, par conséquent, soumise à un dogme supérieur, c'est-à-dire à une révélation. Si toutes choses existent, elles existent par une sorte de réflexion de la pensée divine, qui agit sous une triple forme : la puissance qui crée sans cesse, la puissance qui détruit sans cesse et la puissance qui maintient sans cesse. Dieu n'est pas terrible, il est *adorable*.

« Celui qui a connu Dieu est arrivé à la vérité; celui qui ne l'a pas connu est en proie à toutes les misères.

(1) Pauthier, *Univers pittoresque*, à l'article *Chine*.

« Les sages qui ont médité profondément sur l'essence des êtres deviennent immortels en quittant ce monde. »

Veut-on savoir quelle idée les Indiens se faisaient de la Divinité? Empruntons aux *Védas* un de leurs plus poétiques apologues.

« L'Être-Suprême ayant défait les mauvais génies, les bons génies restèrent tout-puissants; ils se dirent : — C'est de nous que vient la victoire; c'est à nous que revient l'honneur.

« L'Être-Suprême, voyant leur vanité, se manifesta; et ils ne surent quelle était cette adorable apparition.

« Le génie du feu se dirigea vers l'adorable apparition : — Qui es-tu? demanda celle-ci. — Je suis Agni, le dieu du feu; je puis réduire en cendres tout ce qu'il y a sur ce globe terrestre.

« L'Être-Suprême, montrant un brin de paille : — Brûle cela, dit-il.

« Agni ne pouvant mordre le brin de paille, retourna vers ses compagnons. — Je n'ai pu savoir quelle était cette adorable apparition! leur dit-il.

« — Je le saurai, s'écria le génie du vent, et, s'élançant vers l'Être-Suprême : — Je suis, dit-il, Vayou, le dieu du vent; je puis enlever tout ce qu'il y a sur cette terre.

L'Être-Suprême, montrant le brin de paille : — Enlève cela.

« Le génie du vent, après de vains efforts contre le fétu, avoua son impuissance, et le génie de l'espace s'écria : — Eh bien! je vais embrasser l'adorable apparition. — Mais à peine avait-il prononcé ces mots, que tout avait disparu.

« Ceci, disent les *Védas*, est une peinture figurée de l'Être-Suprême, qui resplendit sur toutes choses avec l'éclat de la foudre, et disparaît plus rapide que le clin-d'œil. C'est ainsi qu'il est le Dieu des dieux... Cet Être-Suprême est appelé *l'adorable*. Toutes les créatures chérissent celui qui le connaît. »

Aussi, la métaphysique des Indiens prend-t-elle un caractère mystique; elle s'applique à découvrir quelles sont les hiérarchies qui mènent à Dieu. Cependant, il faut citer d'autres systèmes, purement spéculatifs, qui cherchent à déterminer, par le raisonnement, l'essence de toutes choses. Tel est celui de l'école de Khanad, dans lequel nos perceptions sont ramenées au point de vue idéal, et où les idées elles-mêmes sont réparties en sept grandes catégories : 1° les idées de substance ou de matière auxquelles il faut ajouter celles d'espace, de volume et de la forme invisible de l'être; — 2° les idées d'attribut ou de qualité, au nombre de vingt-quatre; — 3° les idées qui concernent l'action : mouvements, forces, etc.; — 4° les idées communes à

tous les êtres; — 5° les idées propres à chaque être en particulier; — 6° les idées de rapports ou de relations qui rattachent chaque être à son milieu et le milieu général à chaque être; — 7° enfin, les idées de négation. Ces sept grandes catégories réunies constituent l'univers.

Mais, en définitive, ces spéculations s'inspiraient de la récompense promise aux sages qui méditaient l'essence des choses. L'Inde s'était constituée d'après la révélation de Manou, en quatre classes bien distinctes : les prêtres, les guerriers, les commerçants et les serviteurs. Une cinquième classe, celle des parias, se composa de tous les hommes qui avaient forfait à leurs devoirs. Cette dernière classe devenait de plus en plus nombreuse, lorsqu'un sage, incarnation de la Divinité, Bouddha, vint enseigner aux hommes qu'ils sont tous frères et qu'ils doivent se dévouer les uns aux autres. Sa doctrine, appelée *bouddhisme*, et qui présente les analogies les plus frappantes avec le christianisme, révolutionna, non-seulement l'Inde, mais encore la Chine, et compte actuellement un nombre de sectateurs qui paraît égaler, sinon dépasser, celui des chrétiens.

Les bouddhistes divisent toutes choses en *sensorielles* et en *abstraites*. L'abstrait est un, absolu, immuable, éternel, infini; c'est l'intelligence qui baigne et pénètre tout : c'est Dieu. Les phénomènes sensoriels ne sont que des apparences; les corps, des instruments. Ces instruments ne peuvent jouer qu'un petit nombre des motifs de l'harmonie universelle. Il n'y a pas d'âme proprement dite, si ce n'est l'âme unique, qui est Dieu. Cette âme unique, qui s'individualise, fait vibrer l'instrument pendant la vie organique, se confond, après la mort, dans l'unité suprême, incorporelle, dépourvue de substance et d'attributs : *Nirvana*. Dès lors, toute individualité, tout sentiment du moi disparaissent avec l'organisation matérielle, car la matière, c'est le mal. — Tel est le système philosophique des bouddhistes. Leur système révélé appartient à l'étude des religions.

De l'Inde, il faut passer en Égypte, où l'on retrouve les traces d'une organisation, sinon supérieure, au moins égale à la nôtre. Malheureusement, les doctrines philosophiques des Égyptiens n'étaient confiées qu'à un petit nombre d'initiés. Il y avait deux enseignements : l'un *exotérique*, composé de symboles, pour le vulgaire; l'autre *ésotérique*, pour les favorisés. Ce que l'on sait de ce dernier enseignement, c'est qu'il devait être très-avancé, très-rationnel, très-riche en procédés et en théories de tout genre. Moïse et les premiers philosophes de la Grèce furent initiés.

Mais, avant d'arriver aux Grecs, parlons des Perses, chez lesquels Zo-

roastre ébaucha une philosophie religieuse. Un principe éternel, *Zervane Akérène*, engendra de lui-même deux principes contraires d'où dérivent toutes choses : *Ormuzd*, principe de la lumière, du bien, de la sagesse, de la science; *Ahrimane*, principe des ténèbres, du mal, de l'ignorance. C'est de la lutte de ces deux principes que sont engendrées les choses périssables; mais il appartient à Ormuzd de triompher en dernière analyse.

2° PHILOSOPHIE GRECQUE.

Les premiers philosophes grecs paraissent avoir cherché des règles de conduite et des maximes pratiques. Bias faisait consister le seul véritable bien dans la sagesse et dans la science. « Je veux tout porter avec moi, » disait-il. Pittacus considérait « l'insensibilité pour les peines d'autrui et le désir de l'impossible comme les deux plus grandes maladies de l'âme. » Thalès, fondateur de l'école dite *Ionique*, formula le premier un système complet de philosophie. Une Intelligence suprême avait, selon lui, formé tout de l'eau. Anaximandre, son disciple, étendit et commenta ce système en expliquant que cette intelligence, possédant l'action éternelle, infinie, absolue, incessamment variée, entraînait les molécules matérielles dans ses fonctions, et donnait ainsi naissance aux corps doués de vie. Anaximène substitua l'air à l'eau, comme matière plastique primitive. Héraclite, d'Éphèse, celui qui pleurait sans cesse sur l'Humanité, faisait procéder toutes choses du feu; à l'état subtil, le feu constitue la raison; à l'état condensé, les corps. Anaxagore, de Clazomène, croit à une intelligence éternelle, coexistant de toute éternité avec les éléments matériels des corps, mais cette intelligence a organisé ces éléments, confondus d'abord dans le chaos, et les maintient dans leurs fonctions. Ces éléments ne sont pas d'une origine unique; ils sont multiples et ne peuvent être ni créés ni détruits.

Pythagore, fondateur de l'*école Italique*, à qui l'on attribue, cinq siècles avant notre ère, la constitution de l'arithmétique, de la géométrie, de la musique et de l'astronomie, paraît être le mieux renseigné de tous les savants grecs. Il établit que tout est réglé par les nombres, dont l'unité est l'essence. La matière se compose des fractions de cette unité. Les corps organisés sont des décades (dizaines ou dixièmes), parce que le nombre dix est le nombre parfait. L'âme est un nombre qui se meut harmonieusement et engendre ainsi la vertu. Le vice est un défaut d'harmonie. L'intelligence réside dans le cerveau; les appétits dans le cœur. — Nous avons vu que la théorie astronomique de l'école Italique est la même que celle des modernes. Mais les idées de Pythagore n'ont jamais été bien éclaircies; deux siècles à peine s'étaient

écoulés que l'obscurité enveloppait déjà la doctrine du maître, et ses manuscrits étaient devenus si rares, que Platon dut vendre son bien pour en acquérir un.

Les Ioniens avaient cherché à constituer l'univers sur des lois physiques, les Pythagoriciens sur des lois rhythmiques; les *Eléates* nièrent les conclusions des deux écoles. Selon eux, tout phénomène sensoriel n'est qu'apparence; il n'y a qu'un seul Être, éternel, absolu, immobile, qui est Dieu; le mouvement, les corps sont de pures chimères; tout ce qui n'est pas l'Être pur n'est rien, puisqu'en dehors de l'Être, il n'y a que le néant. Les plus célèbres philosophes, parmi les Éléates, furent Xénophane, Parménide et Zénon d'Élée.

Leucippe et Démocrite d'Abdère soutinrent contre les Eléates que le mouvement existe, qu'il est absolu, que l'univers se compose d'êtres minuscules éternellement actifs, de formes différentes, s'engageant les uns dans les autres, et produisant ainsi les différents corps. C'est à Démocrite qu'on doit l'idée d'atomes indivisibles et pesants. Les assemblages d'atomes qui constituent les corps se meuvent dans le vide, où ils projettent dans tous les sens des particules subtiles, mouvementées comme eux. Il en résulte des représentations (*Eidòla*) de ces corps, et ce sont ces représentations qui, en pénétrant les autres corps, y déterminent les sensations, d'où naissent les idées. Ce système est celui qui a dominé la science moderne, et il donnerait l'explication la plus satisfaisante des phénomènes sensoriels perçus à distance, si, à l'idée de vide, on substituait l'idée d'un plein où les mouvements des atomes se traduiraient par des ondulations correspondantes. — Mais, qu'est-ce que l'atome en lui-même? qu'est-ce que la propriété de sentir? C'est ce que les philosophes de l'école appelée *Atomistique* n'ont pas suffisamment fait comprendre.

D'après ce qu'on vient de lire, toutes les opinions philosophiques modernes se trouvaient représentées chez les Grecs, car tandis que les uns niaient la matière, les autres, l'esprit, ceux-là demandaient à chaque système ce qu'il avait de satisfaisant pour constituer une doctrine éclectique. Il ne manquait pas, enfin, de gens, beaux parleurs, qui, empruntant à chaque école ses arguments, se faisaient fort de prouver le pour et le contre avec une égale habileté.

Les *sophistes*, tel était le nom qui leur fut donné par la suite, établirent ouvertement des écoles où l'on enseignait la duplicité. Parmi ces derniers, il faut compter Gorgias de Leontinum, Protagoras d'Abdère, Prodicus,

Polus, etc., qui tenaient cours public d'immoralité, enseignant qu'il n'y a ni juste ni injuste, ni vice ni vertu, et que toute la sagesse consiste à faire triompher l'intérêt personnel. Ces maîtres trouvaient des élèves dignes d'eux. — « Enseignez-moi l'art de plaider, dit Evalthus à Protagoras, vous êtes habile à faire paraître vrai ce qui est faux; je tâcherai de vous faire honneur. — L'honnour m'importe peu, répliqua le sophiste, je n'enseigne rien sans argent. — Eh bien! dit Evalthus, faisons un marché : fixez le prix total que vous mettez à vos leçons. Je vous payerai moitié comptant, moitié après ma première cause, si je la gagne. — Soit! dit Protagoras qui commença son enseignement. » — Au bout de quelques leçons, le sophiste, pressé de toucher le complément de la somme, cita Evalthus devant les juges : — « Si ta cause l'emporte sur la mienne, lui dit-il, tu seras forcé de me payer, car tu auras gagné ton premier procès. Si tu perds, les juges te condamneront, et il faudra bien que tu t'exécutes. Acquitte-toi donc de bonne grâce. — Point! repartit Evalthus; car si les juges me condamnent, je ne te devrai rien puisque j'aurai perdu; et si les juges me dispensent de te payer, je ne vois pas pourquoi je te paierais. »

Les sophistes ne se faisaient pas faute de discourir sur tous les sujets; ils enseignaient tout sans avoir eux-mêmes jamais rien appris. L'un d'eux fit, dans une société où se trouvait le grand Annibal, une longue improvisation sur les qualités d'un bon général; les assistants étaient extasiés de son éloquence, et, se tournant vers le grand capitaine qui, par son génie et ses seules ressources, avait mis la puissance romaine à deux doigts de sa perte : — « Qu'en pensez-vous? lui demandèrent-t-ils. — Je pense, répondit Annibal, que ce bavard n'a jamais commandé, même un esclave; et je n'en voudrais pas dans mon armée, fût-ce comme simple soldat. »

Socrate, fils du sculpteur Sophronisque et de la sage-femme Phonarète, révolté de ces abus, entreprit de régénérer la philosophie et de la diriger vers un but pratique, l'amélioration de ses concitoyens.

Il comprit qu'avant de chercher des juges et des approbateurs autour de soi, il faut d'abord avoir interrogé sérieusement sa propre conscience. « Connais-toi toi-même », est l'axiome fondamental de sa doctrine. Peu soucieux de faire école et de recueillir des applaudissements, il attaqua tous les sophistes et s'attacha à mettre à nu leur fausse science. Il prouva que l'honnêteté, la droiture de cœur, la sincérité sont les plus éloquents et les plus habiles de tous les artifices. Rien n'altéra l'égalité de son humeur, ni la femme acariâtre avec laquelle il était forcé de vivre, ni sa laideur, ni des ennemis nombreux qui parvinrent à le faire condamner à mort. Sa vie s'écoula entre le sourire et l'ironie. Sa mort fut un poëme. Il exhala son âme comme

un parfum. Socrate, moins philosophe que moraliste, doit être cité ici, parce qu'il fut l'inspirateur de Platon; mais sa doctrine est entièrement du ressort de la psychologie.

Platon, qu'on a appelé le *divin*, fonda la doctrine *académique*, du nom de son habitation qu'il avait acquise d'un Athénien nommé *Academus*, et où il enseignait sa philosophie. Établissant, avec Socrate son maître, que l'âme est d'essence éternelle, il ajouta que cette âme expie, dans l'existence terrestre, les fautes d'une existence antérieure; mais elle doit à son passé des idées dont elle se rappelle à mesure qu'elle en voit les images matérielles. L'expérience n'est pas l'origine de la sensation, elle n'en est que l'instrument commémoratif. Les idées en elles-mêmes sont des types, formant un monde à part, monde immuable dont la matière n'est que le reflet changeant et multiple. L'âme est une force qui se meut d'elle-même; le corps est un vêtement qu'elle endosse au berceau et qu'elle quitte à la tombe; ce qu'elle a de plus pur et de plus indépendant de la matière, c'est la raison. Elle est enchaînée à la matière par les appétits et la passion. Entre l'âme rationnelle et l'âme appétitive ou passionnelle, siége l'âme énergique. La première connaît, la seconde sent, la troisième veut; chaque opération de l'une des parties de l'âme retentit dans les deux autres.

Aristote, disciple de Platon, est le fondateur de la doctrine du *Lycée* ou doctrine *péripatéticienne*, qui diffère de la doctrine académique, en ce qu'elle est plus rapprochée de la réalité. Étudiant les êtres, Aristote y voit : 1° un assemblage d'éléments matériels; 2° une forme qui maintient ces éléments; 3° un mouvement qui les met en jeu; 4° une fin à laquelle chaque être est approprié. La matière est le vêtement de l'âme qui lui imprime sa forme, son mouvement, et possède toujours le sentiment plus ou moins net, mais toujours impérieux de la fin à laquelle elle est appropriée. Envisagée à ce dernier point de vue, toute âme est une *entéléchie* (mot composé de *ène eautè télone échei*, qui veut dire : *elle porte sa fin en elle-même*). — Mais cette étude des êtres, qu'Aristote appelle science de l'*individuel*, nous élève peu à peu à la connaissance de l'*universel* ou de l'ensemble qui constitue le tout. Cet universel, en tant qu'absolu, est l'intelligence qui éclaire l'âme, l'arrache à sa passivité pour la rendre active, la soustrait à la destinée de l'organisme auquel elle est enchaînée, pour l'absorber en elle-même, en la dépouillant de toute individualité; c'est un foyer ardent qui tire des corps les plus divers une même flamme; c'est la fin, la béatitude suprême vers laquelle tendent toutes les âmes qui vivifient les différents êtres de la nature. Il n'est pas difficile de constater dans cette doctrine un reflet de la philosophie indienne et du

Nirvana des bouddhistes. Mais ce qui est propre à Aristote, c'est *la méthode;* car on peut le considérer comme le véritable organisateur du raisonnement. Selon lui, la philosophie est la science née du pur désir de savoir ; la science qui connaît selon les principes. Aussi importe-t-il de procéder avec ordre, soit pour déterminer les progrès successifs de la raison, soit pour l'employer à une étude fructueuse. Ajoutons, avant de passer outre, que les idées que nous nous faisons de la *matière* et de la *forme* étaient autrement entendues par les péripatéticiens. Nous allons y revenir en parlant de la philosophie scolastique.

Au fond, depuis l'apparition de Socrate, les systèmes philosophiques tendaient à un but pratique; la réalisation du bonheur physique, moral, ou intellectuel. Ce but étant donné, les philosophes se divisèrent en différentes écoles qui font consister le bien suprême en tel point plutôt qu'en tel autre.

Les *cyniques*, dont Antisthènes fut le chef, et Diogène le disciple le plus illustre, établissant que le seul bien suprême est la vertu, professèrent un mépris absolu pour la beauté, l'élégance et les bienséances sociales. Diogène ne voulut pas d'autre abri qu'un tonneau défoncé, d'autre ustensile qu'une écuelle de bois pour puiser de l'eau ; encore rapporte-t-on qu'il jeta cette écuelle en voyant un enfant boire dans le creux de sa main.

Les *cyrénaïques*, qui reconnaissaient Aristippe pour maître, professèrent au contraire le plus grand respect pour l'élégance et les formes extérieures ; « Il faut savoir jouir de la vie, » tel est le résumé de leur doctrine. Annicéris établit que les plus grandes voluptés étant de l'ordre moral, on doit poursuivre le souverain bien dans les aspirations nobles de l'âme.

Épicure reprit et commenta cette dernière pensée et fit la théorie complète de la volupté, théorie à laquelle son nom est resté attaché. Le plaisir est le souverain bien de l'homme, et pour le réaliser, il faut connaître les véritables lois de la nature. L'âme est matérielle et mortelle ; c'est un accident. Les dieux, s'il y en a, ne se soucient point des misères humaines. La prudence est la première des vertus. La sérénité et la paix de l'âme sont les garanties du bonheur. Connaître les lois de la nature, s'y conformer, éviter les actions qui peuvent nuire à nos semblables, et en provoquer soit des plaintes, soit des représailles ; — telle est la règle morale. Il n'en faut pas davantage pour constituer le bien-être individuel et l'harmonie sociale.

Zénon de Cittium, fondateur de l'école *stoïcienne*, considérant que la nature est absolument soumise à une intelligence supérieure, déclara qu'il fallait réaliser également l'empire absolu de l'âme sur le corps pour être heureux et libre. La liberté est le souverain bien, et nous ne l'acquérons qu'en nous dégageant de toute passion; c'est ainsi qu'on parvient à la

vertu ; mais quand les faits extérieurs s'opposent à cette réalisation, le sage est libre de quitter une existence où il ne peut vivre conformément à sa loi.

Tous ces systèmes, issus chacun d'axiomes, et précipitamment échafaudés sur des perceptions incontestables, mais incomplètes de la vérité, aboutissaient aux conclusions les plus contradictoires, ils ne s'accordaient que sur un seul point : la modération des passions.

Phyrron en conclut que l'homme ne sait rien, que toute sagesse consiste à s'abstenir ; que c'est folie de vouloir acquérir des certitudes parce qu'il n'y a aucune certitude. Douter, douter toujours, voilà le seul moyen de vivre en paix avec soi-même et avec les autres. L'âme s'habitue ainsi à ne s'affliger ou à ne se réjouir que médiocrement du bien ou du mal auxquels nous sommes sujets. Toute affirmation comme toute négation sont absurdes. Il n'y a rien d'absolu, pas même le doute. Cette doctrine est celle des *sceptiques*.

3° PHILOSOPHIE ROMAINE.

Les Romains, fort peu philosophes, flottèrent entre la doctrine de Zénon et celle d'Épicure : tour à tour disciples de l'un de l'autre, suivant que la fortune les appelait au banquet de la vie, ou les en repoussait. Le stoïcisme devint une véritable épidémie sous les premiers empereurs, et la manie du suicide, dont Caton d'Utique donna, sinon le premier, au moins lo principal exemple, moissonna les déchus par milliers. Les favorisés, de leur côté, appliquaient la doctrine d'Épicure dans ses conclusions les plus exagérées. C'était, d'ailleurs, le temps des contrastes, où Senèque écrivait un traité véhément sur le mépris des richesses en s'accoudant à une table que sa vanité lui avait fait acheter plus d'un demi-million. Qu'on était loin alors de cette « voie droite, également éloignée des extrêmes » préconisée par Confucius. Mais Confucius était entièrement ignoré, et le poëte Horace ne le suppléait que d'une manière trop insuffisante.

4° PHILOSOPHIE CHRÉTIENNE.

En somme, les anciens péchaient par excès d'orgueil. Ils voyaient l'univers en eux-mêmes et ne se voyaient pas dans l'univers, pas même dans leurs semblables. Quelle révolution ce dut être à l'apparition du christianisme qui professait l'abnégation personnelle, et dont la philosophie rudimentaire, considérant l'humanité d'en haut, enseignait que nous sommes les artisans du bonheur des autres, et que les autres sont les artisans de notre bonheur ? Le dévoûment au prochain est une joie divine ; il a donc sa raison d'être dans

l'homme isolé, mais il réaliserait le bonheur universel, l'harmonie finale, le règne paternel de Dieu sur la terre, s'il était pratiqué par tous les hommes. C'est là en quoi consiste l'incontestable supériorité de la philosophie chrétienne sur toutes les autres philosophies ; malheureusement on n'a pas jusqu'à ce jour mis suffisamment en évidence ce caractère essentiel du christianisme envisagé au point de vue de la raison humaine.

La philosophie chrétienne est donc le dernier mot de toutes les philosophies ; aussi tourne-t-on dans le cercle des systèmes déjà connus lorsqu'il s'agit de passer à l'exposition des synthèses plus ou moins récentes. Il importe cependant de les connaître.

5° NEO-PLATONICIENS.

Comme le christianisme s'affirmait à ce degré élevé d'énergie d'où rayonne la foi, les doctrines philosophiques cherchèrent également à revêtir un caractère religieux; elles empruntèrent à l'Orient et particulièrement aux Indiens les conceptions qui leur étaient nécessaires. Elles furent presque toutes émises dans les premiers siècles de notre ère par l'école *Alexandrine*, improprement appelée *Neo-Platonicienne*, et présentées par le Juif Philon, l'Égyptien Plotin et le Syrien Porphyre. En voici un exposé succinct. Il est un Dieu unique, absolu, immuable, soleil dont l'intelligence universelle est la lumière, et de laquelle procède le *Démiurge*, grand ouvrier, pouvoir créateur. Celui-ci est servi par des puissances subalternes échelonnées par séries décroissantes, qui sont les *archanges*, les *anges* et les *archontes*. Ces derniers président aux forces de la nature, les premiers sont les exécuteurs directs des décisions du Démiurge. Entre les deux, les anges servent d'intermédiaires. Toute cette hiérarchie a pour but de préserver des *démons* le monde, qui n'est qu'une émanation de l'unité absolue. — Ainsi, en renversant l'ordre des degrés ou *stases* de l'émanation suprême, l'édifice comprend : 1° les *démons*, fils des ténèbres ; 2° les êtres de la nature y compris l'homme; 3° les archontes; 4° les anges; 5° les archanges. — Ici finissent les *stases* pour faire place aux degrés supérieurs ou *hypostases* qui sont : 1° le Demiurge ; 2° l'intelligence universelle; 3° l'unité divine. L'existence humaine est une chute. L'homme a cinq manières de connaître : la sensation, la conscience, le raisonnement, l'abstraction et l'extase qui fait participer momentanément la nature humaine à la nature divine; alors l'âme tend à Dieu, dont elle se sent émanée et où elle cherche à s'absorber par le dépouillement de la personnalité. Pour y parvenir, elle doit vaincre les passions et triompher du corps par l'abstinence et la mortification.

6° PHILOSOPHIE SCOLASTIQUE.

Il y eut beaucoup d'autres systèmes dont l'énoncé ne peut figurer ici, parce que l'histoire ne les considère que comme des hérésies religieuses. Mais quand le déluge des invasions barbares s'étendit sur l'empire romain, toutes les philosophies furent submergées, à l'exception du christianisme. Un temps assez long s'écoula avant que les études philosophiques reprissent vigueur. Les Arabes furent les premiers à recueillir les débris de la philosophie grecque, et s'attachèrent particulièrement aux œuvres d'Aristote, qu'ils transmirent à l'Occident. L'Europe alors s'en empara, les commenta et en fit naitre la philosophie *scolastique*, qui domina le moyen âge.

La philosophie scolastique, ou simplement la scolastique, parce qu'elle était enseignée dans toutes les écoles et toutes les universités, est plus obscure pour nous que tous les systèmes antérieurs, car les idées qu'elle exprimait ont été complètement renversées par les philosophes modernes. Nous renoncerions même à en donner une exposition sommaire, si un de ses plus consciencieux scrutateurs n'en avait rétabli les principaux caractères dans un opuscule récent (1).

« D'après la scolastique, qui repose sur la théorie des *formes substantielles*, tout être que nous percevons est composé de deux éléments : la *matière* et la *forme*.

« Il faut bien se garder de prendre ces expressions dans le sens que leur donneraient les habitudes de notre langage moderne. La *matière* dont il s'agit ici est si peu la substance constitutive des corps, qu'elle n'a rien et ne peut rien avoir de corporel ; quant à la *forme*, au lieu d'être la configuration extérieure des choses, elle est au contraire leur partie la plus intime et la plus cachée : l'œil seul de l'esprit peut la contempler.

« Pour saisir le vrai sens de ces mots d'ordre de la métaphysique et de la science anciennes, dépouillons-nous un instant non-seulement de notre langage accoutumé, mais de nos idées les plus intimes, et considérons un corps qui se présente à nos yeux. Ce corps nous apparaît comme passant par une série d'états ou d'actes divers qui s'excluent. Donc, sous ces états ou ces actes divers que les sens perçoivent en lui, il renferme aussi une *capacité quelconque* de passer par leur série. Prenez maintenant cette *capacité* ou cette *possibilité*, et faites de cette abstraction un élément constitutif et même l'élément premier du corps que vous avez entre les mains : voilà la *matière* des anciens et des scolastiques.

« Puisque la *matière* est dans l'être la simple possibilité, la possibilité

(1) F. Morin, *Genèse de la science moderne.*

logique des états successifs qui le déterminent et qui sont ses actes, elle est en elle-même l'absence de toute détermination et de tout acte. Nous avons sans doute, nous autres modernes, quelque peine à concevoir cette obscure réalité que les scolastiques eux-mêmes appelaient un demi-néant (*prope nihil*); mais il faut nous faire à cette conception étrange et admettre pour un instant, avec ce monde disparu dont nous cherchons à retrouver la mystérieuse pensée, que la matière est absolument passive et absolument indéterminée. Cependant y a-t-il une substance complète, une seule, qui soit privée de toute activité et de toute qualité réelle? La réponse est claire d'elle-même. Il faut donc reconnaître dans le corps que nous avions tout à l'heure sous les yeux, outre sa *matière*, quelque chose qui soit le complément de cette *matière*, c'est-à-dire qui lui donne une nature propre et réalise les possibles dont il renferme le germe mystérieux : voilà la *forme substantielle*.

« Après ces explications, on comprendra mieux peut-être les définitions suivantes.

« Dans la métaphysique ancienne, la *matière*, élément passif et indéterminé de l'*être*, est la *capacité* que l'on conçoit logiquement en lui de passer par les états divers qui le manifestent et le déterminent.

« La *forme* est le principe de détermination et d'activité qui spécifie l'être et réalise ses puissances; en d'autres termes, c'est le complément de la *matière*.

« ..... La première conséquence scientifique qui se déduit de la théorie métaphysique de la matière et de la forme est relative à la nature du mouvement. Puisque la forme a pour fonction tout ensemble de déterminer et d'actualiser (1), l'essence des êtres et la cause déterminante de leurs mouvements s'identifient en elle. En d'autres termes, il y a dans chaque corps un mouvement qui est l'expression de son essence.

« Au premier abord, on ne verra guère dans cette proposition qu'une formule passablement abstraite et parfaitement indifférente. Elle a joué pourtant un rôle considérable dans les destinées de la science.

« En effet, si le mouvement, au lieu de s'appliquer suivant des lois universelles, comme le croient les modernes, n'est dans les corps que la manifestation de leur nature spéciale, ceux-ci, outre le mouvement qui leur vient par accident de causes extérieures, ont en eux un mouvement qui tient à leur essence, ou, comme on disait au moyen âge, un *mouvement naturel*. De là cette fameuse théorie du mouvement *naturel* et du mouvement *violent* qui a été la négation séculaire de la théorie moderne du *mouvement*

(1) Déterminer les actes.

uniforme et du *mouvement accéléré*, et que Galilée a si énergiquement combattue dans ses immortels *Dialogues*.

« ..... Ce n'est pas tout. Si chaque direction dans le mouvement exprime une essence, il faut admettre évidemment deux sortes d'*essences* ou de *natures* : la *nature élémentaire* ou *sublunaire* qui se meut naturellement suivant une direction rectiligne; et la nature sidérale ou céleste qui se meut naturellement suivant une direction curviligne. Quand nous voyons, nous modernes, les astres décrire leurs immenses courbes, nous en concluons qu'une force unique préside à leur évolution dans les abîmes de l'espace; les anciens, dominés par leur métaphysique, en concluaient que la substance des astres, marquée au sceau d'une perfection souveraine, n'a rien de commun avec la grossière substance des corps terrestres qui tombent pesamment vers le centre de notre pauvre globe, en suivant une verticale. Or qui ne voit toute la gravité astronomique de cette conclusion? Admettre que les corps célestes ont une essence à part, c'est admettre le premier mot, le mot le plus décisif, du système de Ptolémée.

« On vient de voir par ce trop court aperçu que la première conséquence scientifique de la théorie des *formes substantielles* nous conduit déjà assez loin. La seconde nous fera entrer bien plus avant encore dans l'intimité mystérieuse de la pensée antique.

« Dans les idées métaphysiques des anciens et du moyen âge, une fois que la *matière* et la *forme* sont unies, le mouvement sort naturellement de cette union, il est déterminé par la *forme*, qui est l'être dans sa réalité intime, *ipsissima res*, disent à l'envi les écoles d'Oxford, de Cologne et de Paris. Néanmoins, pour que cette union s'accomplisse, il faut une cause étrangère à l'être lui-même qui, dès lors, n'est qu'une activité secondaire, empruntée, perpétuellement en quête, comme le veulent les thomistes (1), d'une impulsion extérieure, d'une *prémotion physique*. En effet, qu'y a-t-il dans le monde sublunaire? De la *matière* et des *formes*. Mais, en dehors de la matière, la forme n'a pas la puissance d'agir; elle n'a pas même celle d'exister, et, quant à la matière elle-même, elle est passive. Ni l'une ni l'autre ne suffisent donc à sortir de leur repos, et une cause extérieure doit intervenir pour opérer leur union. Chaque substance du monde sublunaire étant ainsi une substance qui n'enveloppe pas l'*effort* vers les états divers par lesquels elle doit passer, une sorte d'activité sans ressort, il faut s'élever au dessus de cette basse région pour avoir le principe du mouvement.

« D'autre part, lorsque, du même point de vue des *formes substantielles*, on considère Dieu, on trouve qu'il est la forme pure, c'est-à-dire une actua-

(1) Disciples de l'école de saint Thomas.

lité sans puissance, de cela seul qu'il est sans matière. Son action, si toutefois l'on peut appeler action le développement logique d'un être, est celle d'une pure essence, c'est-à-dire tout interne. Il se voit, car se voir, c'est posséder son être, mais il ne voit que lui, se suffisant à lui-même dans sa contemplation solitaire et ne pouvant en sortir. Suivant un mot à jamais célèbre, sa pensée est la pensée de la pensée. Il ne voit donc pas le monde comme possible avant qu'il existe; il ne le voit pas comme réel après qu'il existe. Ou plutôt le monde n'a jamais commencé d'exister; car Dieu, incapable de le connaître, est à plus forte raison incapable, par sa perfection même, de le créer, de le mouvoir, de le gouverner.

« Tel est le Dieu d'Aristote; tel est le Dieu antique de la théorie de la *matière* et de la *forme*. Il est, mais il s'enferme éternellement en sa substance, parce qu'elle n'est qu'essence; non-seulement ce n'est pas un Dieu providentiel, ce n'est pas même, à rigoureusement parler, un Dieu vivant; et on pourrait le définir : le repos absolu, la mort éternelle.

« Ainsi les puissances premières du mouvement d'une part, et de l'autre la force providentielle ne sont contenues, suivant la métaphysique ancienne, ni dans le monde terrestre ou *sublunaire*, ni en Dieu. Cependant elles existent; elles sont même ce qu'il y a de plus digne de la curiosité intelligente de l'homme et de sa suprême adoration. De là, nécessité, et qu'on l'entende bien, nécessité métaphysique, nécessité absolue d'un intermédiaire où viendront se réunir, à la voix de la logique, la providence de Dieu et la puissance motrice du monde, ou plus simplement les activités confondues de ces deux termes extrêmes.

« On comprend maintenant le rôle immense que dut jouer dans toutes les conceptions antiques cet intermédiaire mystérieux formé de toutes les forces que conçoit l'esprit humain, et placé par lui entre la nature divine, immobile à cause de sa perfection, et la nature terrestre non moins immobile à cause de son imperfection souveraine. En effet, nous le trouvons partout, sous une forme ou sous une autre. Qu'on oublie un instant sa présence dans les systèmes les plus divers de la Grèce et peut-être de l'Orient : toute l'antiquité religieuse, philosophique, littéraire, scientifique, devient un livre fermé. C'est évidemment cet intermédiaire que Platon, dans ses théories un peu flottantes encore, parce que ce n'est pas lui qui a organisé la métaphysique ancienne, appelle la région des *idées*. Aristote le cherche dans le premier ciel, qu'il nomme le moteur mobile, et peut-être aussi dans les divinités qui l'habitent. Les alexandrins érigent en génies divins les idées pures de Platon, les formes supérieures d'Aristote, et ils peuplent les astres et les airs de leurs innombrables légions. Puis ils s'agenouillent devant cet



olympe philosophique qu'ils identifient avec l'olympe des croyances populaires. L'adoration humaine n'aurait pas de prise sur l'absolu solitaire, sur le Dieu inconnu qui n'agit point sur ce monde et n'entend pas ses prières. Elle est donc contrainte par la métaphysique ancienne de s'arrêter à l'intermédiaire, quel qu'il soit, qu'elle suppose comme principe providentiel et force motrice. Le polythéisme est fils du dualisme.

« ..... C'est le ciel, souverainement moteur et souverainement providentiel, qui est la région de toutes les *vertus*, de toutes les *affinités*, de toutes les *puissances occultes* qu'il distribue dans ses révolutions fécondes aux minéraux, aux végétaux, aux animaux. La magie, avec ses innombrables subdivisions, ne fut qu'une conséquence de ce principe qui créait ainsi, d'un seul coup, et la superstition religieuse et cette autre superstition scientifique qui devrait lui survivre, d'attacher aux mots de *vertu*, de *puissance*, de *faculté*, je ne sais quelle valeur mystérieuse, et de résoudre, en les appliquant au hasard, les questions les plus compliquées.

« C'est le ciel qui produisait toute activité, toute tendance dans le monde sublunaire, et qui par conséquent gouvernait toute chose : de là l'astrologie.

« Enfin le ciel pouvait faire passer une même matière par toutes les formes les plus différentes, et métamorphoser, les uns dans les autres, par ses secrètes influences, les éléments et même les corps, surtout les métaux : de là l'alchimie. L'alchimie, à certains égards, c'est l'idée de la génération spontanée appliquée au règne minéral.

« Les plus grandes théories scientifiques des anciens sont donc une suite logique de leur théorie du premier ciel, laquelle n'est elle-même que la conséquence cosmogonique de leur théorie suprême de la *matière* et de la *forme*.

« ..... Outre les deux conséquences de ce système que nous avons déjà étudiées, il en est une troisième, non moins importante, qui s'y ramène également et que nous pouvons résumer en ces termes. Dans le composé humain (terme technique sous lequel le moyen âge désignait l'homme) et en général dans les êtres animés, l'âme joue le rôle de *forme substantielle* et le corps le rôle de *matière*.

« De là une physiologie et une psychologie essentiellement différentes de la physiologie et de la psychologie modernes.

« 1° Puisque l'âme est la forme du corps vivant, ou, en d'autres termes, le principe qui lui donne tout ce qui le caractérise, le détermine, l'anime, le fait en un mot corps vivant, les fonctions physiologiques s'expliquent sim-

plement par la présence de l'âme dans le corps : ce qui dispense de toute physiologie. Comment s'accomplit dans le corps l'importante fonction de la nutrition? Un bon scolastique répond imperturbablement : parce que le corps est uni à l'âme nutritive, et tout est dit. Seulement le corps n'étant constitué par l'âme que dans son état de corps vivant, il renferme en lui, comme composés inorganiques que l'âme viendra ensuite animer, les quatre éléments de la nature; il les renferme sous forme de quatre humeurs (la bile, le sang, la pituite ou le phlegme, l'atrabile); c'est la prédominance de l'une d'elles qui produit les quatre fameux tempéraments, si célèbres encore au XVIIe siècle; c'est leur pondération harmonieuse qui constitue la santé. De là le principe fondamental de la médecine antique, de cette médecine qui vint encore, jusqu'après Descartes, braver les sarcasmes de Molière. Il est inutile d'ajouter que suivant les anciens et les scolastiques, le *corps vivant* est soumis, comme tous les autres, aux vertus occultes qui s'infiltrent dans ses diverses parties pour les spécifier, ainsi qu'aux influences nuisibles ou favorables du monde céleste.

2° Puisque le corps joue dans le composé humain le rôle de *matière* et que la *matière* est le principe qui individualise la *forme* et s'unit avec elle pour lui permettre d'agir, il s'ensuit qu'au fond l'âme et le corps sont moins deux substances complètes que deux éléments substantiels d'une substance identique. La pensée unanime de l'antiquité est visiblement que tout ce qui est en dehors du Dieu inconnu, de la forme des formes, est corporel.

« ..... A plus forte raison, de ce côté-ci de la tombe, « l'intelligence humaine ne pense-t-elle jamais sans le secours d'images sensibles : *Non cogitat homo sine conversione ad phantasmata.* » Impuissante à se saisir elle-même dans sa réalité pure, elle part fatalement d'une donnée sensible qui détermine et enferme dans d'étroites limites tout son travail ultérieur. *Primum intellectum est materiale compositum ; le premier objet de la connaissance, c'est l'être matériel.*

« ..... En général, aux yeux des scolastiques et des anciens, l'âme et le corps sont toujours regardés comme indissolublement unis. Peut-être les modernes ont-ils creusé trop avant l'abîme qui les sépare. En tout cas, on ne peut se dissimuler qu'avant Descartes, on établit entre ces deux réalités un commerce intime à l'excès : leurs domaines réciproques étaient systématiquement confondus; d'une part, on expliquait la digestion par l'âme; de l'autre, on expliquait la pensée par les *phantasmata* et les espèces impresses. Singulier système, on en conviendra, qui arrêtait dans leur essor ou plutôt qui empêchait de se constituer sur leurs bases vraies et les sciences physio-

logiques et les sciences psychologiques, parce qu'on était ultra-matérialiste dans celles-ci et ultra-spiritualiste dans celles-là. Ce système, qui nous étonne aujourd'hui et qui pourtant a été admis, enseigné, pratiqué de longs siècles durant par les plus fermes génies, était l'application rigoureuse de la métaphysique qui dominait alors. »

7° PHILOSOPHIE MODERNE.

Si la science était entièrement spéculative au moyen âge, et si l'on expliquait les phénomènes naturels par des théories métaphysiques, il n'y avait pas de science expérimentale proprement dite. Tout se résumait à dire de tel ou tel corps qu'il a telle ou telle vertu « *Quare opium facit dormire?* demande-t-on à Molière déguisé en apprenti médecin. — Pourquoi l'opium fait-il dormir? — Et Molière répond : *Quia est in eo virtus dormitiva cujus est natura sensus assoupire.* » L'opium fait dormir parce qu'il est endormant de sa nature.

Le chancelier Bacon comprit le premier qu'il fallait tout refaire en science pratique, et tendre non pas à des apparences de connaissances, mais à des connaissances réelles. Il faut que l'homme exerce un empire sur l'univers et qu'il vise sans cesse à l'application de la science. Quand on se propose, au début de toute étude expérimentale, de vérifier un certain ensemble de préjugés métaphysiques, on ne fait rien de bon. Il faut, au contraire, examiner les faits en eux-mêmes, chercher leurs caractères constants, grouper, sérier ces caractères et parvenir ainsi à la connaissance des lois générales dont ils relèvent. C'est ainsi qu'on constituera la philosophie naturelle ou Physique générale, et qu'on la tirera de sa stérilité pour la féconder. Procéder du particulier bien connu au général bien sérié, telle est la loi de la connaissance.

Descartes, sans contester la méthode de Bacon, établit la nécessité de réviser la métaphysique, à laquelle la physique ne parviendra jamais par voie d'induction, et dont une conception nette est, au fond, nécessaire pour guider l'observation. Il se fait un chaos dans l'intelligence quand on étudie les différents systèmes philosophiques. Commençons par douter de tout, non pour conclure à une théorie du doute, mais pour nous rendre indépendants de toute influence; le doute est la préface de l'œuvre et non l'œuvre; c'est un état incertain dans lequel l'esprit doit rester emprisonné jusqu'à l'arrivée d'une évidence ou d'une démonstration qui détermine la certitude. C'est par

l'examen des doctrines du doute qu'il faut procéder. Les sceptiques ont prouvé qu'il n'y a aucune certitude; il en est une pourtant qu'ils ne peuvent mettre en question, c'est la pensée, car douter de tout, même de soi, c'est penser : *Je pense*, s'écrie alors Descartes, *donc je suis*. L'existence du *moi pensant* est la clef de voûte de toute métaphysique. Le moi pensant est invisible, sans étendue, impondérable, simple; ce moi pensant, qui est l'âme, étant simple, en dehors de toutes les lois qui régissent les phénomènes changeants, ce *moi pensant* est immortel. — Du moi pensant à l'idée de Dieu, il n'y a qu'un pas, et c'est à travers Dieu que nous voyons le monde. — En effet, la pensée est incomplète, imparfaite et faillible, et du sentiment de son imperfection et de sa faillibilité résulte le sentiment du complet, du parfait et de l'infaillible. Ce sentiment nous est imposé, donc Dieu existe en dehors de l'âme. D'un autre côté, quand on revient de l'idée de Dieu à l'idée du moi, on constate les intermédiaires, et ce sont ces intermédiaires qui constituent le monde. L'univers est un mécanisme de raison dont la force est Dieu et dont la pensée humaine est une fonction inférieure; car au dessous de l'homme il n'y a plus de pensée; les animaux n'ont pas d'intelligence.

Spinosa précise ou plutôt pousse l'idée de Descartes à ses conséquences extrêmes : Dieu est tout; l'homme une partie dans ce tout. Il n'y a qu'une substance infinie dont tous les êtres ne sont que des modes finis, limités dans l'espace et le temps, mais indissolublement unis à l'action totale. Imaginez quelque chose qui se meut de cent millions de manières, et chacune de ces manières en cent millions de sous-manières; l'univers sera une de ces manières, l'homme une de ces sous-manières; tout cela spontanément, par un effort unique, éternel, infini, illimité, infiniment varié. De là ni pensée ni liberté, si ce n'est en Dieu. Tout le reste est fatal. Je crois agir, mais c'est par une pure illusion que j'attribue mon mouvement à moi-même. Ce mouvement n'est qu'un mode infinitésimal, un accident nécessaire de l'action divine.

Un autre disciple de Descartes, Malebranche, commente différemment la doctrine de son maître, mais ne substitue au panthéisme radical de Spinosa qu'un absolutisme divin. « Nous voyons tout en Dieu; Dieu fait tout en nous. » Si, d'après Spinosa, l'homme est un fantôme; d'après Malebranche, il est un mécanisme dont on ne comprend guère la nécessité.

Leibnitz, considérant que la substance n'est pas une, la fait multiple. Procédant comme Descartes, il déduit immédiatement l'idée de Dieu de celle de la conscience, et cherche ensuite à expliquer le monde. Dieu a créé des êtres différents, doués de différentes substances; ces êtres incorporels dont l'union produit les corps, s'appellent *monades*. Les monades sont des auto-

mates rationnels, variés, doués de facultés plus ou moins perfectionnées. Les unes n'ont que l'instinct aveugle des lois rudimentaires; elles constituent les corps par leurs associations diverses; les autres ont l'intelligence et se logent, chacune isolément, dans des corps organisés. Si leur intelligence est confuse, elles résident dans les organisations inférieures; si leur intelligence est claire, elles résident dans l'organisation humaine; mais il n'y a pas de contact entre la monade résidente et les monades qui constituent l'organisme; seulement, les fonctions mécaniques de celles-ci s'accordent si bien avec l'activité intellectuelle de celle-là, que les gestes et les actes physiques du corps concordent toujours avec les pensées de la monade qui l'habite. C'est la théorie de l'affinité étendue de la matière à l'esprit.

On voit qu'à partir de Descartes, dont la métaphysique est tout idéale, il se creuse entre la matière et l'esprit un abîme qu'on ne peut combler. Mais cet abîme existe-t-il? La métaphysique abuse de l'idée de Dieu, qu'elle veut absolument soumettre au contrôle de la raison humaine, et qui n'appartient, en définitive, qu'à la révélation. Il y a quelque chose de si choquant dans cette appréciation de l'être absolu entreprise par l'être humain, qu'après l'étude des systèmes dits *spiritualistes*, nous tombons dans une sorte de marasme. En voulant étreindre ce qui nous embrasse de toutes parts, nous ressemblons à cet enfant qui creuse un petit trou sur le rivage pour y vider la mer.

De l'idée qu'il y a contradiction complète entre la matière et l'esprit résulte cette conséquence que l'un ou l'autre n'existent pas. Descartes et ses disciples plus ou moins immédiats nous conduisent à considérer le monde comme une hallucination, parce qu'ils font consister dans la pensée la base de toute réalité. Faut-il s'étonner que leur doctrine ait déterminé une réaction contraire, et que les *sensualistes* aient affirmé en retour que l'esprit n'existe pas?

« Tout ce qu'il y a dans notre intelligence vient de nos sensations », telle est la base de la doctrine sensualiste. Les imaginations sont des sensations altérées; les abstractions, des sensations décomposées dont les éléments n'existent pas par eux-mêmes. Locke affirme que toutes nos idées viennent des sens et de la réflexion. Condillac établit avec soin le mécanisme par lequel les sensations se transforment en idées, en jugements, en raisonnements. Bientôt, les disciples de Locke et de Condillac, entraînés aux conclusions extrêmes, aboutissent à des propositions qui frappent de stupeur : « Le cerveau sécrète la pensée », dit Cabanis, et l'on est tenté d'ajouter : « comme les reins sécrètent l'urine. »

Nous voilà tombés du nuage dans l'égout. Reid, fondateur de l'école *écossaise*, et Kant, fondateur de l'école *allemande*, cherchent à rendre la raison à son milieu. Reid s'attache à prouver que toutes les erreurs philosophiques proviennent de ce qu'on s'applique à démontrer des axiomes ; or les axiomes ne se démontrent pas. Il est un des premiers à demander aux sciences positives les bases de toute métaphysique, et fait, au point de vue philosophique, l'application de la méthode de Bacon. La sensation est à l'intelligence ce qu'est un syllabaire à un livre ; les phénomènes sensoriels nous font épeler les phénomènes intellectuels.

Kant, de Kœnigsberg, se demande si nous n'exerçons pas notre raisonnement sur des sujets qui lui échappent, et fait la *Critique de la raison pure ;* mais il aboutit à un idéalisme bien autrement nuageux que celui de Descartes, en arrivant à conclure que le monde extérieur et toutes les idées que nous concevons comme existant en dehors de nous, le temps, l'espace, l'action, etc., ne sont que des *formes* de notre pensée. Il s'aperçoit qu'il sombre ; il cherche une planche de salut ; il établit alors qu'il y a deux raisons dans la raison : l'une spéculative et abstraite ; l'autre pratique. Fichte, son disciple, s'en tient à la théorie sans corrections, et prétend démontrer que tout est contenu dans le *moi*. Le moi crée tout ; en se créant lui-même, il engendre le monde et Dieu. Il n'y a plus d'objet, c'est-à-dire de faits extérieurs indépendants de la pensée, ou, si l'on aime mieux, c'est la pensée qui, étant sujet, devient objet en se contemplant elle-même. On admire beaucoup la dialectique de Fichte ; on devrait la déplorer. Schelling, disciple de Fichte, se sépare de son maître pour étendre sa théorie de l'*identité*. Le sujet et l'objet existent, mais sont la même chose au fond. L'absolu *absolu* se manifeste dans un absolu secondaire, qui est la nature, et qui se décompose en deux grandes catégories de relativités : le *Réel* et l'*Idéal*. Le système de Schelling est très-poétique, mais, comme toute poésie, il est vague. Hégel essaie de le préciser. L'absolu absolu, c'est l'idée ; en se développant, l'idée engendre toutes choses ; en s'étudiant, elle engendre la science. Elle existe d'abord d'une manière simple, puis se divise et s'oppose à elle-même ; c'est ainsi que l'infini devient fini, l'idéal réel, l'absolu relatif ; enfin, réunissant ces *contradictoires*, elle aboutit à l'identité. Thèse, antithèse, synthèse, tout est là. Ces systèmes de l'école allemande ressemblent aux fabriques où l'on s'est proposé de faire mouvoir les instruments par une seule machine et de supprimer l'ouvrier ; on ne peut les comprendre qu'en les étudiant pièce à pièce ; aussi est-il impossible d'en donner une notion suffisante par une exposition sommaire.

Si les Allemands se font gloire d'avoir agrandi le domaine de la philosophie, les Français semblent s'être résignés au rôle de critiques; demandant à l'Éclectisme un panthéon comme pour s'y promener, avec la désinvolture d'amateurs fantaisistes, dans un musée de curiosités, ils y ont si bien disséqué les synthèses qu'ils les ont réduites en fragments impalpables; et le public, épouvanté de cette dissolution, incline aux théories positivistes, qui proscrivent, comme stériles, toutes les spéculations abstraites, à l'exception des Mathématiques.

V

MÉTHODE GÉNÉRALE.

Ce qu'on vient de lire n'est pas de nature à nous amener à une conclusion. Le grand tort de la philosophie contemporaine est d'avoir oublié que la métaphysique commence, comme Aristote l'avait compris, au point même où s'arrêtent nos certitudes sensibles, et a pour mission d'explorer le terrain en s'aidant de toutes les données des sciences positives. Elle a confondu la métaphysique avec la psychologie, l'esthétique, la théognosie et même la sociologie.

Nous laisserons donc de côté le mot si torturé de *métaphysique* pour classer sous le titre de *Noologie*, ou étude des lois de l'intelligence, tout ce qui a trait à la recherche de la vérité en elle-même; or, comme la vérité est une, impersonnelle, immuable, la *Noologie* est indépendante de l'être multiple, — avec ses penchants, *Ontologie*, — ses exigences morales, *Psychologie*, — ses instincts supérieurs, *Esthésiologie*, — et sa conception suprême de Dieu, vivant, personnel et parfait, *Théognosie*.

Les études noologiques ont pour objet d'étendre le procédé mathématique à toutes les catégories d'idées, en ramenant à des abstractions toutes nos perceptions sensibles et toutes nos conceptions imaginaires.

Les éléments premiers (je dirais presque *les atomes*) du monde intellectuel

sont les idées. Les idées ne comportent aucun degré de vérité ou d'erreur; elles s'imposent; elles *sont*. Considérées isolément, elles échappent à toute analyse; mais, de même qu'en chimie, où l'on suppose que, pour constituer un corps, c'est-à-dire une chose qui tombe sous nos sens, il faut la réunion d'un certain nombre d'atomes, en noologie, il faut au moins l'accouplement de deux idées pour constituer une pensée.

Ici commence le rôle de la Noologie. Les idées sont en nombre infini puisqu'il y en a, au moins une, au fond de chacune de nos sensations, de nos imaginations et de nos abstractions. A peine les avons-nous associées, qu'elles entrainent une comparaison, puis un jugement; c'est alors, si nous n'y prenons garde, que peuvent surgir les plus graves erreurs.

Or, pour que la comparaison soit exacte, il importe que chaque idée soit nette et ne se confonde avec aucune autre.

La distinction serait facile si les idées étaient, comme les corps simples, réduites à un nombre restreint. Malheureusement il n'en n'est pas ainsi; nos sensations seules sont si multipliées, leur impression est si prompte, leur succession si rapide, leurs nuances si délicates, qu'il faut, de toute nécessité, recourir aux procédés de la science.

L'étude de l'*Idéologie* nous révèle alors une des plus grandes entreprises de l'esprit humain : l'établissement des catégories, qui a pour but de classer toutes les idées et de les disposer dans un ordre aussi rigoureux que celui des nombres.

De tous les ensembles de catégories proposés jusqu'à ce jour, aucun n'est satisfaisant. En attendant la solution de cet immense problème, nous aurons recours aux langues. Considérant que chaque mot est la traduction d'une ou plusieurs idées, nous demanderons aux vocabulaires les matériaux de notre classification. D'abord, nous répartirons chaque idée parlée ou mot, dans la science où elle joue le principal rôle; puis nous examinerons, s'il y a lieu, l'emploi qu'on en fait dans les autres sciences. Mettant ainsi à profit les travaux accomplis par l'humanité entière dans la formation des langues, l'ordre établi par les savants dans tous les traités, et notre classification des Connaissances, nous réaliserons un ensemble de catégories qui sera, sinon rigoureusement satisfaisant, au moins complet pour notre époque.

Les idées une fois classées, le premier effort de la *Logique* est en quelque sorte accompli; les éléments d'une pensée quelconque apparaissent du premier coup; l'esprit en saisit tout d'abord l'enchainement. Il n'a plus, dès lors, qu'à étudier les règles établies pour vérifier la justesse des raisonnements.

Or, comme nous aurons sans cesse présente la grande classification idéologique, nous pourrons ramener, tout d'une pièce, chaque synthèse partielle aux cadres qu'elle doit occuper dans la synthèse totale.

Nous étudierons alors tous les *systèmes philosophiques*, non plus (ainsi que nous venons de les exposer) avec la confusion que les critiques y ont introduite, mais au point de vue noologique pur; sans nous préoccuper s'ils sont applicables à la nature, à l'homme ou à l'Humanité; mais en nous demandant s'ils constituent un ensemble d'idées solidement édifié. Ce travail pourra nous sembler stérile au premier abord; cependant nous ne tarderons pas à reconnaître que chacune de ces grandes spéculations de la philosophie constitue un des monuments de la cité où, selon saint Augustin, se meut la personne divine. Nous éviterons ainsi de tomber dans cet exclusivisme qui, mesurant la valeur d'une œuvre à son utilité immédiate, prétend anéantir tout ce qu'il ne peut loger dans son étroit milieu.

VI

APPLICATIONS.

On voit facilement que toutes les sciences exposées jusqu'ici ont leur application directe dans la Noologie, puisqu'elles concourent et tendent à constituer la catégorie complète des sensations. — Elles entrent même, pour la plus grande partie, dans l'établissement de la catégorie des imaginations en rappelant l'histoire de toutes les conceptions plus ou moins erronées qui ont précédé la constatation d'une vérité quelconque. Le public ne se doute pas du nombre de romans qui précèdent la plus frivole des découvertes scientifiques. L'astrologie et l'alchimie d'un côté, la géographie, l'histoire naturelle, la technologie et l'anthropologie des anciens de l'autre, surpassent, en étrangetés et en merveilleux, tout ce que la cervelle des conteurs les plus fantaisistes peut enfanter de nos jours. — D'autre part, les Mathématiques, en établissant les catégories secondaires des nombres, des formes et des mouvements, nous fournissent, non-seulement une bonne partie des idées proprement dites d'abstraction; mais aussi nous initient à l'ingéniosité des procédés, et à l'enchaînement rigoureux des déductions.

VII

HISTOIRE.

Il n'y a pas de variations à constater dans le monde intellectuel, et, par conséquent, aucune histoire proprement dite dans la noologie. Tout se résume dans l'exposition des vérités que l'esprit a conquises, c'est-à-dire dans le compte-rendu des systèmes.

VIII

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Il importe de faire ressortir la distinction que nous établissons entre la noologie et toutes les autres spéculations philosophiques. La noologie est caractérisée, en effet, par son indépendance complète de toute entrave morale, esthétique ou sociale. Le domaine de l'intelligence étant absolu, l'esprit ne s'y préoccupe d'aucune question de bien ni de mieux; son seul mobile est la recherche de la vérité. S'aidant de certitudes acquises pour acquérir des certitudes nouvelles, il n'a pas d'autre écueil à éviter que l'erreur. — Qui s'avisera de déclarer utile et louable que les trois angles d'un triangle quelconque aient fatalement pour mesure totale 180 degrés? — C'est une vérité, et rien de plus. Celui qui la constate est satisfait, non qu'il en prévoie un profit dans les applications, mais parce qu'il a fait l'acquisition d'une certitude. Il en est de même de toutes les spéculations de l'ordre métaphysique, et le moraliste doit respecter la liberté absolue du penseur dans l'exposition de ses recherches. Il n'a le droit d'intervenir qu'au moment où, redescendant de l'abstrait au concret, de l'idéal au réel, de la théorie à l'application, le noologicien cherche à introduire la vérification de sa doctrine dans un milieu humain. L'histoire des systèmes nous apprend d'ailleurs que les doctrines se modifient d'elles-mêmes quand elles arrivent à des conclusions pratiques : Pythagore proclame en théorie la divinité de l'intelligence, et asservit ses élèves à une discipline monacale; Platon, poëte en métaphysique, chasse les poëtes de la vie sociale; Zénon affirme la toute-puissance de l'âme, et lui permet de s'abdiquer jusqu'au sui-

cide; Kant construit la théorie de la *raison pure*, et renverse son édifice pour élever un monument à la *raison pratique*. Ces contradictions apparentes témoignent assez qu'il faut distinguer nettement les spéculations abstraites de la morale proprement dite, parce que cette distinction est au fond même de toute philosophie.

D'un autre côté, nous ne devons pas oublier que l'étude de la noologie, quand elle est exclusive, nous conduit aux erreurs les plus funestes; on voit presque toujours les fanatiques de la spéculation abstraite dévier vers quatre grands abîmes : la fatalité, le doute, le culte de la matière, et l'extase, ou, pour nous servir des termes spéciaux : l'athéisme, le scepticisme, le matérialisme, et le mysticisme.

C'est dans le premier de ces gouffres que sont tombées les plus grandes intelligences de ce siècle, lorsque, ramenant tous les rapports à un terme unique, le *postulatum* de l'attraction, elles ont réduit la nature, l'homme et Dieu à un vaste mécanisme, dont un fait inconscient et aveugle était le suprême ressort. Par quelle erreur du jugement ont-elles pu conclure que, si tout reposait sur un fait, ce fait ne pouvait être modifié en lui-même ou remplacé, comme thème primordial, par un autre fait quelconque? Cette seule hypothèse entraîne nécessairement la ruine de toute croyance à la fatalité, puisqu'une modification dans la loi capitale amène logiquement des modifications correspondantes dans les lois secondaires, et qu'un changement de *postulatum* entraîne l'anéantissement complet de l'harmonie existante et son remplacement par une autre harmonie.

Cette croyance à la fatalité est d'ailleurs si constamment et si énergiquement combattue par les faits; la nature, l'homme et l'humanité trompent si souvent les calculs, que, dès l'instant qu'il nous faut l'abandonner, nous inclinons nécessairement au doute. Tout ce qui est phénomènes sensibles ou phénomènes supra-sensibles, faits et idées, ne constitue plus pour nous qu'une fantasmagorie trompeuse, une illusion perpétuelle, où la seule sagesse consiste à s'abstenir, c'est-à-dire à se réduire à rien. On retombe alors dans l'état où se trouvait Descartes, lorsque doutant de tout, même de soi, et parvenu aux frontières du néant, il s'écria : « Je doute ; or *Je pense, donc Je suis* ». — En faut-il davantage pour ramener l'être à lui-même, et ruiner le scepticisme dans sa base?

Mais nous ne plongeons pas aussi avant dans le gouffre du scepticisme que l'a fait Descartes, et, avant d'en être réduits à la perception de notre moi

pensant, nous sentons notre être physique s'affirmer par la douleur ou la jouissance. Ce corps, que l'âme a dressé à vivre, s'emparant de l'autorité de la pensée, s'impose à notre être et le violente. Tel le gendarme devient un objet de terreur pour le magistrat qui, après l'avoir instruit à exercer la justice, tombe lui-même dans la catégorie des criminels.

Le fait alors devient notre maître. Le corps, ce pouvoir exécutif d'une puissance abdiquée, proclame ses exigences. L'âme, qui se méconnait, subit la tyrannie de la chair; en vain essaiera-t-elle de glorifier son asservissement en l'élevant à la hauteur d'un culte : le matérialisme, si ingénieux qu'il soit, ne sera, en dernière analyse, qu'un aveu plus ou moins éloquent de sa dégradation.

Nous le sentons si bien, que, aux époques où dominent les doctrines matérialistes, surgissent les superstitions les plus étranges. L'âme qui s'est abdiquée ne peut se résoudre à l'empire du fait, et invoque des interventions surnaturelles. Le miracle étant sa seule espérance, elle le cherche partout, et, à force de le chercher partout, elle le trouve partout. Au Dieu juste elle substitue le Dieu capricieux qu'il faut se rendre favorable par une adoration extatique. Les lois et les faits ne sont plus que des caprices divins, devant lesquels il n'y a qu'à se prosterner; toute réflexion devient une offense, tout effort est un crime; il faut s'isoler de la nature, de soi-même, de l'Humanité, pour s'engager dans les solitudes, et tâcher de gagner la cité céleste à travers les mirages du mysticisme.

On le voit, si la noologie est une science distincte, elle n'est pas indépendante des autres sciences. La recherche de la vérité est une fonction de l'activité humaine. Mais, comme toutes les fonctions, on ne saurait l'isoler, la dénaturer ou la supprimer, sans l'anéantir. A quoi sert de connaître, quand notre science n'a d'autre but que la connaissance elle-même? il est évident que le savoir n'est efficace que dans son application, c'est-à-dire dans la pratique : le bien, l'effort vers le mieux, et l'invocation perpétuelle de la perfection.

PSYCHOLOGIE

L'AME, LA VOLONTÉ, LA MORALE.

I

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

On entend par PSYCHOLOGIE la connaissance de l'*âme*, ou des *modes d'activité de l'être.*

La psychologie diffère nettement de la noologie parce qu'elle a pour objet capital l'étude des lois de notre personnalité, et qu'elle substitue à la recherche du vrai la recherche du bien-être, dans le sens le plus complet qu'on puisse attacher à ce mot, c'est-à-dire de l'utile et du bon.

Lorsque, vivant en dehors de moi, je cherchais à classer tous les phénomènes, à en déterminer les rapports, et à leur assigner, avec plus ou moins d'exactitude, une origine commune, il m'importait peu que les choses fussent de telle façon plutôt que de telle autre, pourvu qu'elles constituassent une harmonie dont ma raison se déclarât satisfaite. Aussi étais-je conduit à accepter comme suffisantes des synthèses contradictoires, dès l'instant que j'y constatais une logique rigoureuse.

Mais lorsque j'arrive à me replier sur moi-même, ne fût-ce que pour contrôler les instruments qui m'ont servi, la question change complètement de face; de sujet je deviens objet; de spectateur, acteur, et il m'importe beaucoup moins de savoir comment les choses peuvent être que de savoir ce que je suis moi-même.

Je me vois alors confondu avec une infinité d'êtres qui s'affirment chacun

avec autant d'énergie que je puis le faire, et semblent chacun déployer une activité qui menace toutes les autres.

Au premier abord, je m'épouvante de ce prodigieux conflit d'individualités dont chacune m'apparaît comme un danger. Tout à l'heure encore, superbe, mon esprit planait sur les mondes, discutant, il est vrai, avec un esprit mystérieux qui me confondait sans cesse; — mais chacune de mes défaites, en dissipant une erreur, m'apportait une force nouvelle. — Maintenant *cet autre*, que je confessais à peine, semble s'imposer en se multipliant; il prend toutes les formes, jusqu'à celle qui m'est propre; il s'accuse dans le visible et dans l'invisible, en des millions de manières différentes qui toutes m'atteignent et m'émeuvent. Tour à tour frappé et caressé, abattu et redressé, désespéré et consolé, guéri parfois d'une terreur par une autre terreur, désabusé d'une joie par une joie nouvelle; mais toujours rappelé à moi-même par des sensations variées et multiples, je me suis séparé de plus en plus de cet univers avec lequel je croyais m'identifier. En face de *moi* se dresse le *non moi*, ondoyant, divers, insaisissable, mais qui, en m'échappant sans cesse, semble m'inviter à prendre possession de moi-même.

II

ONTOLOGIE.

Se connaître soi-même est à la fois le point de départ et l'objet capital de l'ontologie.

Qui suis-je? — Tout? — Rien? — Quelque chose?

Voilà le problème de l'ontologie posé en trois mots; mais que d'efforts, d'études et de combinaisons avant de le résoudre!... Je commencerai par l'hypothèse la plus simple, celle qui me rapproche le plus de mes spéculations noologiques : je placerai en moi-même le principe, la raison et la fin de toutes choses.

Le moi étant considéré comme le pivot sur lequel gravite l'univers, l'ensemble des spéculations auxquelles ce thème donnera lieu constituera la théorie de l'égoïsme, ou de la réalité exclusive du *moi*.

1° THÉORIE DE L'ÉGOÏSME.

A mesure que je vis, j'entre en possession de certains modes d'activité qui m'étaient d'abord inconnus. Lorsqu'il m'a été permis de les constater pour la première fois, c'était, en quelque sorte, hors de moi-même, et je les con-

sidérais comme entièrement étrangers; peu à peu ils sont devenus miens, et je les ai exercés à mon profit. Je suis porté maintenant à considérer tous les phénomènes comme autant de résultantes mystérieuses ou démontrées de ma propre essence.

Dès lors, tout ce qui se manifeste en dehors de moi peut être considéré comme autant d'actes ignorés de mon être. Je ressemble à ce monarque dont les décrets sont exécutés à cent lieues de sa résidence, et s'imagine les avoir appliqués lui-même. L'illusion est d'autant plus facile que le phénomène est plus extérieur, et, en quelque sorte, plus lointain.

La théorie de l'égoïsme a sa base dans la synthèse noologique élaborée par Hégel; mais, tandis que là elle se réduit à une pure abstraction, ici je l'applique à mon activité et au milieu dans lequel elle s'exerce.

Quelle que soit l'absurdité de cette première hypothèse, j'en déduis une conception aussi complète que possible de l'activité de l'être; et cette activité, je l'appelle *âme*, avec tous les philosophes. Je conçois donc l'âme comme étant indivisible, et, sans me préoccuper si elle est une ou multiple, en possession plus ou moins complète de ses fonctions dans l'ordre concret, je la considère comme le foyer de tous les modes d'activité possibles.

J'établis ensuite la distinction de ces modes, qui se résument en trois grandes catégories : la sensation, la compréhension et l'acte.

2° THÉORIE DE L'ALTRUÏSME.

Mais — si je ne me suis pas isolé et comme enseveli dans ma propre glorification, satisfait de croire que je puis tout, et n'accomplissant rien, sinon une spéculation stérile, — je vois, à mesure que j'agis, surgir des êtres qui agissent comme moi et d'une manière plus efficace. Ils exécutent ce que je ne fais qu'essayer, marchant encore quand je défaille, triomphant quand j'ai succombé. Ces êtres, en me faisant constater ma faiblesse, établissent la négation de ma toute-puissance. J'apprends alors que le *moi* n'est pas tout, et si je veux entrer en lutte avec *l'autre*, je suis si vite et si complètement écrasé qu'il m'est impossible de nier son existence.

Cet autre, que j'appelle *non-moi*, et que j'ai déjà pressenti dans les sphères intellectuelles, serait-il véritablement l'être et n'en serais-je que le reflet? Ce que j'ai tout à l'heure considéré comme mien ne lui appartiendrait-il pas? Je croyais vivre en lui, — ne serait-ce pas lui qui vit en moi?

Quand j'arrive à répondre par l'affirmative, à croire que je n'existe que par une participation plus ou moins complète à l'existence du non-moi, je veux connaître tous les phénomènes de cette existence, et mes spéculations

concourent à constituer la *théorie de l'altruisme*, ou théorie de la réalité exclusive d'autrui.

Mon premier sentiment, dans ce nouvel ordre d'idées, me porte à considérer le Non-moi comme composé d'êtres multiples. L'activité d'autrui, — et par autrui il faut entendre, non-seulement mon semblable, mais tout ce qui n'est pas moi : bête, plante ou poussière, abstraction, chimère ou fantôme, — l'activité d'autrui, dis-je, m'apparaît en mille modes différents, dont chacun affirme une puissance du Non-moi, et sollicite ma vénération.

C'est ainsi que transportant l'adoration bestiale du Moi dans l'adoration des manifestations du Non-moi, d'abord visibles, puis invisibles, je passe, avec l'Humanité, de l'égoïsme exclusif au fétichisme, puis au polythéisme.

Cependant, la raison ne tarde pas à me faire reconnaître que ces modes ne sont que des fonctions multiples d'une même activité. Si je persiste néanmoins dans la conviction que le Non-moi possède une existence absolue, exclusive, dans laquelle mon individualité est absorbée et s'annule, je tombe dans les aberrations du panthéisme.

Cette dernière forme de l'altruïsme, quoique la plus complète, ne s'est pourtant jamais élevée à la hauteur d'un culte dans l'humanité. Tout, en l'homme, se révolte contre cette absorption du moi dans un être complètement extérieur ; je veux bien reconnaître que je ne suis pas tout ; je veux bien admettre que je compte pour peu de chose ; mais je ne puis me résoudre à l'idée que je ne suis rien.

3° THÉORIE DE LA MUTUALITÉ.

Si la théorie de l'égoïsme ne m'a pas satisfait, la théorie de l'altruïsme me satisfait encore moins. Est-ce à dire pour cela que tant d'investigations auront été stériles ? — Non, car elles m'ont fait examiner, reconnaître et analyser les différents phénomènes de l'activité qui s'exerce en moi et hors de moi. — Elles engendrent, d'ailleurs, un nouvel ordre de considérations.

Puisque, d'un côté, l'égoïsme résout toutes les activités d'autrui dans le Moi ; l'altruïsme, toutes mes activités dans celle du Non-moi ; puisque, de l'autre côté, je ne puis arriver à la négation complète du Non-moi pas plus qu'à celle du Moi, je suis forcé de les confesser l'un et l'autre. L'expérience les affirme sans cesse ; la raison ne tarde pas à me démontrer qu'ils sont les conditions mêmes de toute activité.

L'activité sans passivité n'a pas de raison d'être. Imaginer que l'activité s'exerce en dehors de tout objet, c'est imaginer, tout au plus, qu'elle est

un rêve; c'est conclure à sa négation même. L'idée d'action entraîne fatalement l'idée d'une passivité sur laquelle l'action s'exerce.

Il y a donc coexistence nécessaire du Moi et du Non-moi, et puisque l'activité passe tour à tour de l'un à l'autre, elle est réciproque; elle les enchaîne dans une dépendance mutuelle.

De là, la théorie de la *Mutualité*.

Cette théorie a pour point de départ la dualité de l'égoïsme et de l'altruisme. Mais, dès l'instant que je conçois l'être double, rien ne m'empêche plus de le concevoir multiple. L'âme, que je proclamais une, exclusive et unique dans l'égoïsme; que je confessais, avec un effort, une, exclusive et unique dans l'altruisme, m'apparaît complexe dans la mutualité.

La théorie de la mutualité, résumant les investigations et conciliant les contradictions de l'égoïsme et de l'altruisme établit que,

— Considérée au point de vue abstrait :

1° L'activité est une, éternelle, infinie, infiniment variée;

2° Elle s'exerce simultanément d'une infinité de manières;

— Considérée au point de vue concret :

1° L'activité appartient à chaque être en particulier et constitue son essence, qu'on appelle *âme*.

2° Elle s'exerce incessamment dans chaque être, tantôt comme activité proprement dite, tantôt comme activité réceptive, ou *passivité*.

3° Elle enchaîne chaque être dans une dépendance mutuelle de tous les autres êtres, sans porter atteinte à son individualité.

Nous concevons alors l'univers comme constitué d'une infinité d'êtres qui jouissent chacun d'une activité absolue en elle-même, c'est-à-dire d'une âme; mais cette âme s'assujettit, dans son exercice, aux conditions d'une dépendance mutuelle, et remplit son rôle distinct dans une existence relative, temporaire et limitée.

III

THÉLÉSIOLOGIE.

1° LIBERTÉ.

L'Ontologie m'a permis de constater les faits de l'activité de l'être, tant au point de vue du Moi que du Non-moi et de leurs dépendances. J'ai conçu

l'univers comme un concours immense d'êtres, et l'existence comme une manifestation partielle de mon âme dans ce concours. La noologie m'a appris, d'un autre côté, qu'un ordre et un arrangement rigoureux dominent toutes les idées, et par conséquent subordonnent tous les faits qui sont la manifestation des idées à un fait primordial, posé comme principe unique. — Maintenant il dépend de moi d'accepter ou de rejeter les conditions du milieu dans lequel je me trouve engagé.

Cette possibilité d'acceptation ou de rejet met en évidence une puissance de mon âme restée obscure jusqu'ici : LA VOLONTÉ.

La volonté est évidemment la faculté capitale du Moi, puisqu'elle peut m'engager dans un milieu quelconque ou m'en dégager. Elle est le fondement essentiel de ma personnalité. Soit qu'elle me détermine à agir, soit qu'elle me détermine à m'abstenir, elle n'en affirme pas moins que je suis, et, mieux encore, que je suis libre. Or *la Liberté* est précisément ce qui, à mes yeux, constitue le bien le plus précieux de mon existence ; elle est le principal caractère de la volonté.

« Que chacun de nous s'écoute et se consulte soi-même, dit Bossuet, et il sentira qu'il est libre. » Evidemment ma liberté est un fait indubitable, et je ne puis la nier que par dépit, lorsque je n'ai pas pu la manifester en dehors de moi, comme je la conçois en moi-même. En moi la liberté est absolue ; elle s'étend au possible comme à l'impossible, au raisonnable comme à l'absurde. Je suis libre de vouloir soulever une montagne, je suis libre de ne pas vouloir que les trois angles d'un triangle ne soient pas égaux à deux droits. Si, hors de moi, je ne puis pas démontrer cette liberté dans l'ordre des faits, si mon instrument, c'est-à-dire mon bras, ne peut soulever qu'un poids de cent kilogrammes, si mon habileté ne peut pas tracer le triangle absurde, c'est que mon milieu réduit l'acte tout puissant du Moi aux rapports qui régissent le Non-moi ; en d'autres termes, c'est que je suis sous le coup d'une dépendance que je pouvais ne pas accepter ; or cette dépendance même résulte de l'emploi que j'ai fait de ma liberté.

Il faut donc distinguer la liberté intérieure de la liberté extérieure, et établir les caractères de l'une et de l'autre.

La liberté intérieure est souveraine ; c'est la liberté en elle-même ; c'est la volonté qui précède tout acte et, avant de l'exécuter, le considère comme accompli ; c'est ce que le vulgaire entend par Imagination, dans le sens absolu du mot.

2° SERVILITÉ.

La liberté extérieure est sujette ; c'est la réalité avec toutes ses servitudes. Elle est constamment contredite, dans son exercice, par l'exercice de la

liberté d'autrui. Avant d'agir, il faut qu'elle considère la possibilité de l'acte. Mais dès l'instant que je conçois une possibilité ou une impossibilité, je conclus précipitamment qu'en qualité d'acteur, je ne suis plus libre; et tout d'abord l'existence ne me paraît praticable qu'à la condition d'y aliéner ma volonté.

La question n'est plus de savoir ce que je veux, mais de savoir ce que veut tout ce qui est en dehors de moi, tout ce qui n'est pas moi. Je me contente d'exercer ma liberté et ma volonté dans le domaine de l'intelligence pure où rien ne l'entrave, où elle peut à son gré faire ou défaire les synthèses, créer ou anéantir les mondes; là, plus ma volonté est capriciause, ondoyante, plus elle affirme ma liberté, mais aussi plus elle est illogique. Je traverse les airs, je plonge dans les entrailles de la terre, je n'attends pas même qu'une série de faits se manifeste nettement à mon esprit, il me suffit de l'entrevoir pour en évoquer d'autres; mais je sens au fond de ces phénomènes si variés, si contradictoires, un défaut de persistance dans lequel mon être se dissout. Il n'y a qu'un instant, perdue dans les cieux, ma fantaisie jonglait avec les soleils; à présent, noyé dans les infiniment petits, je vis dans la goutte d'eau, où les infusoires jouent le rôle de monstres gigantesques; tout à l'heure, abandonnant le monde réel, je serai transporté dans celui des fées, des génies, des endriagues et des enchantements. Au milieu de tant d'existences chimériques, que devient mon existence propre? Elle se délaie dans une activité sans but. Retournant alors à la réalité, et mettant le doigt sur un grain de poussière que je ne puis détruire, je le trouve supérieur à toutes les créations de mon caprica, il ma rappella que je ne suis pas saul, et qu'autour de moi, s'affirme une infinité d'êtres dont la réalité enchaîne ma puissance et domine ma petite liberté.

3° SOLIDARITÉ.

Eh! bien, j'accepterai cette dépandance, mais à la condition d'y exercer mon activité; et puisque l'expérience m'a démontré que la volonté, quand elle s'isole, me conduisait au néant, je l'associerai à toutes les autres volontés pour tendre à l'exercice efficace de mon activité. Ainsi, je serai quelque chose. Ainsi le *moi* ne disparaîtra pas tout entier; il se réhabilitera dans le *nous*, et selon que *nous* agirons de concert avec la nature, avec nos semblables, avec nos supériaurs visibles ou invisibles, enfin, avec une souveraineté suprême et mystérieuse, encore mal définie, mais que la solidarité nous fait pressentir, *nous* serons une réalité, une autorité, une puissance.

On voit ici se reproduire le même ensemble de conclusions que dans l'ontologie, où l'égoïsme et l'altruisme se concilient dans la mutualité. La liberté

et la soumission se concilient maintenant dans une solidarité supérieure qui, seule, peut satisfaire l'activité de l'être en la rendant efficace.

IV

ÉTHIQUE.

1° PLANÉTHIQUE.

Mais j'ai plus ou moins méconnu les lois de cet univers, les conditions de mon être et l'usage de ma liberté. Mon activité s'est exercée physiquement, intellectuellement et fonctionnellement, de mille manières défectueuses; et, par malheur, j'ai déployé dans ces errements une énergie d'autant plus grande, qu'en contredisant tantôt le fait nécessaire, tantôt la raison impersonnelle, tantôt les fonctions et la liberté des autres êtres, je pensais affirmer plus complètement mon individualité. Mon activité s'est donc enrayée dans des voies funestes, elle a contracté des habitudes pernicieuses; en un mot, elle a engendré des vices.

L'exaltation de mon égoïsme a donné naissance à l'orgueil; l'orgueil déçu, à la colère; la colère impuissante, à l'envie; l'envie désappointée, au dégoût; le dégoût, à une abdication de mes aspirations les plus élevées. Mon activité propre, cette âme que je ne puis dépouiller, même partiellement, apporte alors toute sa vitalité dans les fonctions naturelles, les exagère et les transforme en vices. La jouissance matérielle doit suppléer à la jouissance intellectuelle et à la jouissance morale; mon activité l'attise, la surexcite, la dénature. Le corps n'est plus qu'un instrument destiné à favoriser mes dérèglements, je le pétris à mes vices, je développe en lui des fonctions anormales qui réagissent à leur tour et m'imposent des appétits monstrueux dont la nature se rend complice. En un mot, cette activité même, qui était le principal agent de mon bien-être, de ma liberté et de ma gloire, devient l'instrument de ma souffrance, de ma servitude et de ma honte.

Combien est difficile, triste et répugnant, ce diagnostic du mal moral, qui pourtant constitue le fondement de l'Éthique. Mais je ne puis m'y soustraire si je veux entrer dans l'harmonie générale; je dois étudier l'origine, la filiation et le développement des vices.

2° ASCÉTIQUE.

L'épouvante s'empare de moi quand je constate pour la première fois toutes les dégradations de l'âme; je prends en horreur les instruments qui

y ont contribué et, sans penser que ces mêmes instruments sont ceux que la nature m'a donnés pour m'exercer à la vertu, je confonds mon corps et la nature dans une même réprobation. Par une réaction fatale, je veux détacher mon âme de la jouissance matérielle et ne reconnaître d'autres exigences que celles de l'ordre intellectuel et moral. Je mortifierai mes sens, je ferai crier ma chair sur le brasier de ma douleur; et au milieu de mon bûcher, du sein des tortures de ce corps saignant et déchiré, je dégagerai mon âme et ma pensée pour les élever, comme la fumée et la flamme de l'holocauste, vers les sphères éthérées de l'idéal et des vertus sans tache.

Efforts stériles, mais pleins d'enseignements pour le moraliste quand il sait en dégager la théorie des cures héroïques. En effet, soit par notre faute, soit par la faute de ceux qui nous ont engendrés, certaines fonctions de notre être physique ont été si profondément perverties qu'il faut, pour les réduire aux conditions harmoniques de l'existence, employer les moyens les plus énergiques et les plus terribles, et préparer le malade aux tortures du traitement en développant en lui l'exaltation de l'*ascétisme*.

3° HYGIÉTHIQUE.

On peut constater, dans les deux premiers ordres de spéculations de l'Ethique, une grande analogie avec la Médecine. Ce n'est pas, en effet, sans raison qu'à toutes les époques, ceux qui l'ont étudiée et exercée ont été appelés les médecins de l'âme. Il suffit, en effet, d'appliquer l'étude aux fonctions de l'activité même de l'être, c'est à dire aux fonctions de l'âme, comme on l'applique aux organes, pour constituer les ensembles de connaissances qui précèdent. La Planéthique (1) est l'étude des égarements et des errements de l'âme, une sorte de nosologie psychique; elle comprend à la fois le diagnostic et le pronostic du vice; l'Ascétique (2) en est la thérapeutique, c'est-à-dire le traitement. Or comme, d'un autre côté l'Ontologie a fait constater les conditions normales de l'âme; la Thélésiologie, les forces dont elle peut disposer et les principaux mobiles qui la sollicitent, nous demanderons à l'HYGIÉTHIQUE (3) de nous enseigner, non-seulement toutes les règles, mais aussi toutes les prescriptions morales auxquelles doit satisfaire notre activité pour se maintenir d'elle-même, ou avec l'aide de secours particuliers, dans l'exercice harmonique de ses fonctions.

(1) PLANÉTHIQUE, de *planè*, égarement, et *èthos*, mœurs.
(2) ASCÉTIQUE, de *ascètès*, athlète et *èthos*.
(3) HYGIÉTHIQUE, de *hygiès*, sain et *èthos*.

V

MÉTHODE.

On peut dire de la psychologie, comme de la philosophie en général, que l'abondance des matières y a noyé toute méthode, et que, malgré l'excellence de son enseignement, elle est à la fois un objet d'épouvante et de risée pour le vulgaire. Il faut, en effet, un grand effort d'attention pour conserver net, précis et toujours présent à l'esprit, l'objet de chacune de nos spéculations; et comme, la plupart du temps, cet objet ne peut être conçu sous une forme sensible, on est exposé à le confondre avec un objet similaire, puis, de confusions en confusions, à dévier de la route qu'on s'était primitivement proposée.

Il n'est peut-être aucun ensemble de connaissances qui réclame autant de rigueur et de rectitude, et c'est là surtout que ceux mêmes qu'il préoccupe en apportent le moins. Sans chercher à faire prévaloir l'importance et la précision de l'ordre que nous y avons introduit, nous nous contenterons de faire remarquer que cet ordre est conforme au développement de l'esprit humain.

Il est incontestable que la constatation des différents phénomènes de l'activité ou de l'âme est le premier effort de l'homme, constitue en lui ce qu'on appelle généralement la conscience, et se résout dans l'ensemble des vérités *Ontologiques*.

A la conscience, c'est-à-dire au sentiment des rapports qui existent entre tous les êtres, vient s'ajouter le besoin de proclamer notre liberté, caractère essentiel de la volonté que nous abdiquons plus ou moins, mais dont nous cherchons toujours à sanctionner l'exercice par l'assentiment des êtres qui nous entourent. Instinctivement l'homme est despote avec ses inférieurs, servile avec ses supérieurs, moutonnier avec ses égaux. L'étude de la *Thélésiologie* rectifie ce triple penchant.

Enfin, de l'exercice même de notre activité résultent des égarements que la conscience et la volonté, dominées par la raison, réprouvent tôt ou tard. Reconnaître ces égarements, lutter contre ses vices, faire concourir toutes ses facultés à l'harmonie du milieu dans lequel nous sommes placés, telle est la science finale de l'âme : l'*Éthique* ou la *Morale*, conçue dans le sens le plus étendu et le plus complet qu'il soit possible d'attacher à ce mot.

VI

APPLICATIONS.

Toutes les connaissances humaines se résolvent dans l'activité de l'être. On sent instinctivement, sans qu'il soit besoin de le démontrer, que les constatations, même les plus insignifiantes à première vue, qu'elles aient pour objet une vérité ou une erreur, deviennent bientôt de la plus haute importance, quand elles nous déterminent à agir dans tel sens plutôt que dans tel autre. Les mathématiques, en développant en nous la certitude dans les déductions; la physique, en nous apprenant à contrôler nos sensations les plus générales; la cosmologie, par la grandeur de ses tableaux; l'histoire naturelle, par le spectacle si varié d'existences innombrables affectées chacune d'un caractère particulier; la technologie, par la sollicitation permanente de notre ingéniosité; l'anthropologie, par l'étude approfondie de nos organes; la noologie, enfin, par la profondeur et l'immensité de ses spéculations, concourent à développer nos facultés, à éclairer notre milieu et à nous dévoiler les fins auxquelles nous devons tendre. Il serait superflu d'entrer ici dans plus de commentaires; on verra, dans l'exposition proprement dite de la psychologie, que toutes les sciences se subordonnent et s'unifient, quand il s'agit d'en appliquer les conclusions, et même les errements à l'étude do l'âme.

VII

HISTOIRE.

Indépendamment de l'histoire des doctrines qui tendent à préciser la règle de conduite de l'homme et à l'élever vers une moralité de plus en plus parfaite, il y a pour le psychologiste une autre histoire à étudier, celle des modifications apportées dans l'âme humaine par les découvertes réalisées successivement dans l'ordre positif.

Pour apprécier l'importance de cette étude, il suffira d'en rapprocher les deux termes extrêmes, l'homme primitif et l'homme actuel. Si l'activité de celui-ci procède du même principe et affecte la même virtualité que l'activité de celui-là, quelle différence dans les milieux où elle s'exerce, dans les

ressources industrielles, dans l'hygiène, dans l'intelligence ! Que de sollicitations et d'exigences nouvelles ! Combien cette activité a-t-elle dû traverser de phases diverses, pour passer d'un existence grossière à une existence raffinée, de la vie instinctive à la vie intellectuelle? Assurément, une telle étude, poursuivie avec tous les développements qu'elle comporte, est du plus haut intérêt et de la plus grande utilité.

VIII

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Il y a dans toutes les âmes dont l'activité est restée en communion avec la nature, et n'a été violentée par aucun enseignement particulier, une tendance bien caractérisée à considérer le monde sensible comme une collection d'êtres obéissant à des lois consenties, et manifestant chacun une individualité spéciale. Aussi sont-elles en conversation constante avec le milieu qui les entoure, et, chose digne de remarque, cette conversation est incessamment alimentée par une réplique mystérieuse. On s'étonne souvent du développement intellectuel auquel ces âmes sont parvenues, lorsque, transportées parmi la société et sans aucune culture préalable, elles entrent du premier coup dans l'intelligence des relations les plus complexes et les plus délicates. La spontanéité de leur esprit, la netteté et la grâce ingénue qu'elles apportent dans leurs appréciations, les font généralement considérer comme douées de facultés spéciales. Est-il nécessaire de dire qu'elles sont restées dans la vérité, et que la nature n'est en réalité qu'un immense concours d'êtres dont les associations, ou plutôt les sociétés diverses, constituent ce que nous appelons les phénomènes matériels ?

Au fond la morale a ses lois complètes, rigoureuses et invariables dans la nature. Elle ne nous demande pas de compulser l'histoire de l'humanité, pour en abstraire les données générales dont la quintessence constituerait notre règle de conduite et le code des lois qui gouvernent la vie sociale. Loin de là ; le contact trop fréquent de nos semblables ne tend qu'à altérer les notions morales que nous possédons et à éteindre ces flammes généreuses que le sentiment naturel du bien et du mal, du juste et de l'injuste fait fulgurer dans notre conscience. Tout sceptiques qu'ils étaient, les penseurs du dernier siècle ont constaté ce fait. C'est le thème sur lequel Voltaire revient avec le plus de complaisance, le point de départ de sa critique des mœurs de l'époque et en même temps la source du charme sous lequel il

dissimule sa misanthropie. La morale, en effet, n'est pas une résultante de la pratique sociale ; cherchée dans l'humanité, elle est ondoyante et relative : « vérité en deçà des Alpes, erreur au delà. »

Est-ce à dire que le fruit des spéculations psychologiques pousse de lui-même et ne demande aucune culture intellectuelle ? Une telle conclusion serait absurde. On se contentera de remarquer que la morale est une résultante de notre activité même ; or toute activité a ses lois. Si, la plupart du temps, les moralistes pèchent dans leurs conclusions, c'est parce qu'ils n'ont perçu, comme les noologiciens, qu'une partie des manifestations de cette activité. Il est donc nécessaire de signaler en quelques mots, ainsi que nous l'avons fait à la fin de notre plan des connaissances noologiques, les principales erreurs dans lesquelles les moralistes sont exposés à s'engager.

La première et la plus grave, celle à laquelle nous obéissons trop aujourd'hui, c'est d'exclure de l'Ontologie tout ce qui ne se manifeste pas sous la forme humaine, c'est-à-dire de n'appliquer le titre d'être qu'à l'homme seul. Si notre science a raison de s'attacher à tous les faits acquis, elle ne devrait pas pour cela limiter la vérité à la connaissance de ces seuls faits, et, de ce qu'elle n'en a pas constaté d'autres, conclure précipitamment qu'ils n'existent pas. Cette conclusion est d'autant moins justifiable que les sciences naturelles, je ne dirai pas seulement celles qui ont trait à l'animal et à la plante, mais celles qui étudient le minéral dans son intimité, comme la chimie, protestent contre cette manière de voir. La physique elle-même tend de plus en plus à affirmer ce que Pythagore avait pressenti, à savoir que la matière est un nombre qui se meut harmonieusement de lui-même. La réalité de la matière n'est pas, comme on le disait assez sottement d'ailleurs, au commencement de ce siècle, dans la matière même, c'est-à-dire quelque chose de particulier et d'essentiellement contraire à l'esprit. Tout corps est une résultante d'activités similaires ou variées, concourant, en vertu de fonctions rigoureusement définies, à constituer une manifestation persistante et toujours identique à elle-même. Comme notre raison, elle est régie par les lois des sciences exactes. A la considérer dans son mode le plus matériel, le minéral, elle se conforme, dans ses agrégations et sa cristallisation, aux règles de la géométrie.

La morale, qui repose tout entière sur la conscience, c'est-à-dire sur la connaissance instinctive de lois universelles et immuables, n'a donc pas besoin de la sanction de nos semblables. Elle existe dans le cœur de l'homme naturel parce qu'elle régit tous les ensembles d'activités qui constituent la nature. Elle est plus manifeste chez l'enfant et chez le solitaire que chez le vieillard et le gouvernant, parce qu'elle n'admet pas de composition avec

les erreurs et les faiblesses sociales. Nous insistons sur ce point tant pour rectifier des préjugés trop communs à notre époque de tourmentes, que pour justifier la place de cette étude dans une exposition méthodique des connaissances humaines.

Cette faculté précieuse que nous apportons, constituée de toutes pièces dans l'existence, avant même que le corps ne soit formé, est diversement altérée suivant les âges et les positions. Comme on l'a constaté à toutes les époques, elle suffirait à notre bonheur si l'orgueil ne venait l'obscurcir et quelquefois même l'étouffer. Nous prétendons établir notre supériorité en nous rendant indépendants des lois de notre milieu, en faisant autrement que les autres êtres, en luttant contre les tendances naturelles, en contredisant les lois établies dans l'ordre physique comme dans l'ordre intellectuel. Le mal se fait sentir; plus il est aigu, plus nous tenons à honneur d'en triompher. Nous n'y parvenons pas, nous cherchons à dissimuler. En attendant notre activité s'atrophie, contracte le vice; mais, l'orgueil aidant, nous tirons gloire de notre souffrance même, et nous l'érigeons en vertu.

C'est donc à l'orgueil, nous l'avons démontré déjà, que doit s'attaquer le moraliste. L'orgueil est le lit où s'écoule le torrent des passions; l'orgueil brutal, qui prétend asservir l'âme à la chair, l'orgueil raffiné, qui prétend asservir la chair à une volonté déréglée en sont les deux rives. Heureux celui qui peut traverser de l'un à l'autre bord sans disparaître dans les tournoiements du vice; plus heureux encore celui qui, guidé par l'expérience de ses prédécesseurs, suit les routes déjà frayées et les passages guéables; mais souverainement heureux celui qui ne tente pas l'aventure, car le terrain est aussi stable et le bien-être aussi complet d'un côté que de l'autre. Par malheur, la loi de cette existence est l'action; il faut marcher, et chacun de nous a une route spéciale qu'aucune sagesse ne peut déterminer à l'avance.

Une autre erreur de beaucoup de moralistes est de s'attaquer non pas à l'orgueil, qui est le mobile des passions déréglées, mais au sentiment même de notre activité, qu'ils veulent enrayer dans une fonction machinale. Toute expérimentation personnelle leur semble un crime; ils proscrivent jusqu'à l'examen de nos erreurs. La partie de l'Éthique que nous avons comprise sous la rubrique de *Planéthique*, faute d'un terme suffisant, a été de tout temps l'objet de leurs anathèmes. Evidemment l'autopsie du vice est dangereuse en soi; elle est écœurante et délétère comme toute autopsie; mais le milieu même dans lequel nous vivons la rend indispensable. On tomberait facilement d'accord avec eux si l'existence pouvait s'accomplir dans toute sa plénitude à l'écart du mal; malheureusement, il n'en est pas ainsi; nous tom-

bons tôt ou tard, grands ou petits, sous le coup d'une responsabilité. Le paradis n'est pas sur cette terre, et ce n'est pas le bonheur qui nous y attend, mais la lutte. Il faut grandir. C'est au prix de souffrances et d'efforts; car la récompense est plus lointaine, mais aussi plus haute qu'on ne l'imagine.

Le devoir du sage n'est donc pas de dissimuler le mal, mais de le prévenir : et puisqu'il est impossible d'enrayer l'être comme en enraye une locomotive ; puisque l'on ne peut déterminer à l'avance la route que chacun de nous doit suivre ; puisque chaque homme a sa destinée, c'est-à-dire un rôle particulier à jouer dans l'existence, il faut abandonner le moi à son activité propre et se contenter d'illuminer les milieux dans lesquels cette activité s'exerce. Ce n'est pas le long de la voie droite que doivent être prodiguées les lumières. Il y a le long de chaque sentier des flammes mystérieuses qui sommeillent; chacun de nos pas les fait jaillir; elles resplendissent plus vives à mesure que nous nous rapprochons du but, elles s'affaiblissent à mesure que nous nous en écartons. C'est quand elles s'éteignent, c'est quand nous nous perdons dans la région des abîmes que nous saurons gré à la science humaine d'avoir déposé un flambeau au bord de chaque précipice.

Mais la plus haute et la dernière conclusion de l'éthique, celle à laquelle nous sommes fatalement et rigoureusement conduits, c'est la conception d'un être parfait, en qui se trouvent réunies toutes les puissances, toutes les facultés, toutes les harmonies que nous ne pouvons réaliser en nous. Notre faiblesse même est la révélation de cet être suprême, dont la liberté n'est gênée par aucune entrave, dont la volonté s'accomplit sans obstacles, chez qui l'intelligence et l'acte ne sont qu'une seule et même chose; être vivant et distinct, puisque nous ne sommes pas lui; être tout-puissant, puisque nous ne pouvons contredire son activité sans vicier quelque chose de la nôtre; type de perfection que nous sentons palpiter dans les profondeurs les plus intimes du moi, et dont la présence plus ou moins avouée constitue la conscience de l'homme.

ESTHÉSIOLOGIE.

LE BEAU, LES CHEFS-D'ŒUVRE, L'ART.

I

PRÉLIMINAIRES.

L'esthésiologie comprend l'ensemble des connaissances théoriques et pratiques que nous possédons sur le *Beau*.

Réduit à sa conception la plus simple, le beau est un ravissement de l'âme.

Chaque fois que nous éprouvons le sentiment du beau, notre activité intérieure vibre à l'unisson d'une activité extérieure. Que l'influence vienne du dedans ou du dehors, du moi ou du non-moi, les deux activités sont également emportées dans un même ravissement; elles se confondent l'une dans l'autre, et concourent à cette harmonie supérieure qui est le Beau.

Le beau est le premier trait d'union entre les âmes; il diffère essentiellement du bon et du vrai, par cela même qu'il ne peut être restreint au Moi. Il ne peut s'approprier. Que l'intelligence soit aussi active, le bien-être aussi complet qu'on puisse l'imaginer, les chefs-d'œuvre de la peinture et de la musique n'éveillent pas le sentiment du beau chez celui qui prétend les apprécier de sang-froid.

Le beau en lui-même échappe donc à l'analyse, puisqu'il n'est pas possible de le concentrer dans le Moi. On ne peut l'étudier que dans ses effets, c'est-à-dire dans les facultés qu'il éveille dans l'âme, dans les traces matérielles auxquelles il a donné naissance, enfin dans les conditions nécessaires à sa réalisation.

II

ESTHÉTIQUE.

1° DU SENTIMENT ESTHÉTIQUE.

L'étude des sentiments que le beau éveille en nous constitue la *théorie esthétique*, ou tout simplement l'*esthétique*.

L'esthétique, du grec *aisthésis*, qui veut dire sentiment, n'est au fond que l'étude du développement de notre sensibilité et de ses perceptions exquises; en effet, même chez l'exécutant, la volonté s'efface devant l'inspiration, et l'intelligence se réduit à un rôle purement instrumental; la sensibilité la plus délicate commande impérieusement à tous ses actes; dès l'instant qu'il prétend faire jouer un rôle à sa volonté, affirmer son individualité ou l'asservir, dès l'instant qu'il cherche à discuter le beau, il perd de son génie et déchoit de sa gloire.

Voyez l'artiste dans le feu de la composition : il a oublié sa personnalité; il paraît agir dans un milieu matériel; mais son activité s'exerce entièrement dans les sphères de l'idéal; sa main marche, mais il ne la surveille pas ; sa science exécute, mais comme une fonction machinale; son être frissonne sous les influences d'un monde mystérieux qui est pour lui la réalité même; il s'irrite quand son intelligence et sa main n'ont pas précisé cette réalité dans la matière; à la moindre réclamation d'une sensibilité impérieuse, il les gourmande, et elles tremblent comme des esclaves maladroits ou infidèles. La sensibilité n'est donc pas seulement au fond de la contemplation d'un chef-d'œuvre, mais au fond même de son exécution. Au point de vue élevé où nous la considérons ici, il faut l'appeller *Esthésie*.

Le sens esthétique est inné dans toutes les âmes, mais il y sommeille. Il faut une secousse morale qui vienne du dehors pour le réveiller. Cette secousse morale est une grâce, une révélation, une illumination.

En général, l'homme dont l'activité est tout extérieure ne manifeste jamais le sentiment du beau; il peut le posséder, mais il n'en jouit point.

Interrogez un rustre? En fait de peinture, il préférera l'enseigne d'une auberge aux tableaux de Raphaël; en musique, une formidable vocifération, avec un point d'orgue en fausset, lui semblera le *nec plus ultra* de la mélodie; à la vue d'une statue, il dirait volontiers comme le physicien anglais

Davy, mis en présence de l'Apollon du Belvédère : — « Ah ! la belle cristallisation ! » s'il savait ce que c'est qu'une cristallisation. L'idée du beau ne lui vient même pas ; il est rare que le mot lui-même sorte de sa bouche, et quand il l'emploie, c'est généralement pour exprimer la bonté ou l'utilité d'une chose. Pour lui, une belle femme, un beau cheval sont synonymes d'une femme grande et bien portante, d'un cheval vigoureux.

2° DU GOUT ET DE L'AGRÉABLE.

Nous avons dit qu'il fallait à l'homme une secousse morale qui le ravisse à lui-même pour l'élever jusqu'à la compréhension du beau. Cette secousse morale a le plus fréquemmant son point de départ dans une émotion naturelle : la vue d'un paysage grandiose, l'embrassement d'une mère, le premier sentiment de l'amour. A l'aspect d'une riche nature, au premier baiser qui ravissent son âme, l'enfant s'étonne de ne plus s'appartenir et d'avoir, dans le premier oubli de sa propre existence, joui d'une existence double ; il a été heureux, il veut l'être encore. Pour provoquer un nouveau bonheur, il sent qu'il faut plaire, et comme son activité s'est confondue dans une activité supérieure, il cherche à y conformer la sienne. Il est gauche d'abord, il grimace. Peu à peu cependant il s'assouplit, il s'approprie les manières d'être de ceux qui l'entourent ; il les fond dans sa personne. L'harmonie qu'il introduit dans ces éléments, souvent disparates, constitue son originalité. Apprenant ainsi à vivre de la vie d'autrui, il multiplie sa propre activité ; sa sensibilité devient de plus en plus délicate ; elle s'émeut de la sensation la plus fugitive, et, suivant qu'il a été caressé ou choqué, il l'accueille ou la rejette. En un mot, il met en évidence une faculté supérieure qui est le *goût*.

Le goût n'est pas encore le sens esthétique ; l'éducation l'a plus ou moins altéré, souvent même dépravé. Le goût, d'ailleurs, est une faculté égoïste ; tout au plus arrive-t-il à constituer la grâce personnelle et à provoquer chez autrui le sentiment du beau. C'est le goût qui, renforcé de l'intelligence et des connaissances positives, joue, dans l'art, le rôle de critique. Mais comme il s'exerce alors dans des sphères supérieures, comme il nous pousse à multiplier nos sensations, il les épure en les contrôlant et nous rend plus aptes à percevoir le beau chaque fois qu'il se présente, et quelque rapide qu'en soit la manifestation.

Mais il importe de ne pas confondre, ce que l'on fait trop souvent, les effets du goût avec ceux du sens esthétique. Le goût nous pousse à la recherche de l'*agréable*, et si les choses qui agréent aux âmes délicates sont en petit nombre et rentrent le plus souvent dans la catégorie du beau, celles

qui agréent aux gens grossiers ou maladifs dont la sensibilité a été plus ou moins altérée, sont innombrables. Le goût nous porte, en effet, vers les sensations les plus contradictoires; il dépend de nos passions et de nos appétences : il n'a rien en lui-même d'épuré. Dans l'art principalement, il résulte de notre sensualisme : « Qu'un artiste, dit Cousin, se complaise dans la reproduction de formes voluptueuses; en agréant aux sens, il trouble, il révolte en nous l'idée chaste et pure de la beauté. » Or « la beauté, selon Platon, c'est la splendeur du vrai »; c'est la perception d'une nature virginale et sans tache, des formes exquises et chastes de l'idéal. C'est par là que les manifestations du beau sont essentiellement morales, parce qu'elles ont pour objet de dégager l'être angélique de l'être humain, et de nous élever ainsi vers la perfection.

3° CARACTÈRES DU BEAU.

Qu'est-ce donc que le beau, et à quels signes l'inspiré reconnaît-il qu'il l'a perçu? — C'est quand, après son ravissement, il a senti se développer à la fois dans son âme les sentiments de la vérité, de la pureté, de la grandeur, de la variété, de l'ingéniosité, de la vie, de l'unité, du pathétique et de la grâce. Supprimez un de ces caractères, et le beau s'évanouit. Il suffira ici, pour les faire ressortir, d'en signaler les effets les plus élémentaires.

Le beau doit être vrai; il a ses lois mathématiques auxquelles il ne peut déroger sans défaillir. Que dirait-on d'une œuvre picturale où les proportions ne seraient pas dans des rapports rigoureux, où la perspective serait méconnue, où la mécanique des êtres représentés ne pourrait s'imaginer en activité sans faire craindre soit un détraquement, soit des allures vicieuses? Il a été de mode, pendant un temps, d'allonger démesurément les membres des personnages assis, sous prétexte de grâce; le spectateur s'effraie à l'idée de voir de telles figures se redresser; il ne lui en faut pas davantage pour étouffer l'illusion même que l'artiste prétend solliciter par cet artifice.

Le beau doit être pur : les couleurs simples sont les plus agréables à l'œil; les sons purs, les plus doux à l'oreille. Ce que nous apprécions le plus dans la nature ce sont les ciels bleus, la lumière rayonnante, la limpidité de l'atmosphère; les minéraux les plus estimés sont le diamant et le rubis; les animaux les plus admirés, ceux dont la robe présente les teintes les plus nettes et les plus brillantes; enfin les carnations fraîches de l'enfant et de la vierge éveillent en nous je ne sais quelles sensations joyeuses. La pureté entraîne la simplicité; elle a horreur du bariolage.

Le beau doit être grand, non de cette grandeur qui exagère la perception, mais qui ajoute l'idée de puissance; dépouillé de sa qualité d'ampleur, eût-il toutes les autres qualités réunies, il n'est plus que joli. En France, et chez les femmes surtout, l'idée du joli se confond trop souvent avec le sentiment du beau.

Le beau doit être varié sous peine de ne pas engager l'attention dans une contemplation plus profonde. Sans variété, la perception du beau est toute superficielle: elle se réduit à une simple constatation. Est-il nécessaire de dire que cette variété doit être harmonieuse et concourir dans toutes ses parties à l'unité dont nous parlerons tout à l'heure? La nature est variée à l'infini. Cesse-t-elle pour cela d'être une, vraie, pure et grande?

Il est évident que c'est dans cette recherche même de la variété harmonieuse que prend naissance le caractère de l'ingéniosité. Mais l'ingéniosité est un caractère distinct par lui-même. En effet, il donne naissance à des combinaisons d'effets nouveaux et imprévus; c'est d'elle que procède surtout l'art des contrastes.

Le beau doit être vivant, c'est-à-dire palpiter sous le sens. Comme tout vit dans la nature, même ce qui semble mort, comme on perçoit sous la masse la plus inerte en apparence, un fourmillement d'êtres, comme la matière, outre son existence propre, semble acquérir une existence nouvelle quand elle a passé par les mains de l'homme, on peut assigner à chaque chose un je ne sais quoi de vivant qui semble, à chaque instant, vouloir se dégager de la matière pour s'élancer jusqu'à nous.

Le beau doit être un; il n'admet ni dualité, ni pluralité, ni partage, mais il subordonne ses parties dans une sorte d'hiérarchie que couronne une suprême unité; en lui-même, il accuse quelque chose d'absolu. « L'unité est le caractère de toute beauté », dit saint Augustin. Dans une œuvre d'art, le sujet principal domine, rayonne et prête sa splendeur propre à tous les accessoires quelque importants qu'ils soient.

Mais, si vrai, si pur, si grand, si varié, si vivant, si absolu qu'on le conçoive, il nous laisse froid, lorsqu'il ne s'adresse pas à quelque affection de l'âme. Il faut donc que le beau soit pathétique, c'est-à-dire qu'il nous touche et nous émeuve.

Enfin, et ce qui est la condition particulière à l'esthétique, le beau doit

être harmonieux et caresser notre sensibilité la plus exquise, même quand il se présente à nous sous les formes les plus terribles. En présence d'exigences aussi complexes et, en apparence, aussi contradictoires que celles dont on vient de parcourir l'énumération, l'art doit nécessairement fondre ces caractères dans un accord heureux qui constitue le caractère supérieur de la grâce.

Tels sont les principaux caractères du beau. On a deviné déjà qu'ils se déduisent naturellement des divers ordres de connaissances qui sollicitent nos facultés. C'est aux connaissances exactes que le beau emprunte son caractère de vérité; aux constatations physiques, son caractère de pureté; à la contemplation de l'univers, son caractère de grandeur ; à l'examen des êtres naturels, son caractère de variété ; à l'industrie humaine, son caractère d'ingéniosité; à l'homme, son caractère de vie; à la noologie, son caractère d'unité; à la psychologie, son pathétique; — enfin, l'esthésiologie nous apprend que toutes ces connaissances instinctives ou vérifiées, latentes ou développées par l'étude, doivent concourir dans une alliance heureuse, où tout est harmonieux, où rien ne choque et ne dissonne. C'est ainsi que, de degrés en degrés, nous nous sommes élevés jusqu'aux aurores de la lumière divine. C'est là, c'est dans ces sphères mystérieuses et sacrées, qu'ont été enfantées les grandes œuvres de l'art; c'est là que le génie les a baignées dans les flots de l'idéal. C'est de là qu'il les a rapportées à l'homme, encore ruisselantes d'une splendeur radieuse, comme autant d'évocations vers cette patrie céleste où tout est gloire, ravissement et bonheur.

III

TERPNOGRAPHIE.

C'est donc avec recueillement qu'il faut pénétrer dans ces temples où l'art humain a laissé ses traces, où vibrent les harmonies qui nous rappellent les harmonies du ciel. Là, en nous élevant de la matière à l'homme, de l'homme à l'âme, de l'âme à l'ange, de l'ange à la beauté sans tache, nous classerons tous les chefs-d'œuvre dans un ordre dont les linéaments, quoique longtemps confus, commencent à s'accuser.

Comme le beau s'adresse à la sensibilité, on doit répartir ses produits suivant les organes qu'il affecte. C'est à tort que l'on a prétendu l'exclure de trois de nos sens, le tact, l'odorat et le goût. On peut avoir raison quand on veut parler de ces sens dans l'exercice de leur réceptivité la plus grossière,

mais l'exclusion s'étendrait alors à la vue et à l'ouïe. Nous l'avons fait remarquer déjà, le beau ne pénètre ni par l'œil, ni par l'oreille dans l'âme du rustre.

Il est vrai que si, à la rigueur, on peut établir les droits du tact dans la perception du beau, si les privilèges d'un toucher subtil sont mis en évidence par les œuvres de l'art plastique, il est plus difficile de préciser le rôle que jouent le goût et l'odorat au point de vue de ce sens intime supérieur qu'on appelle le sens esthétique. Nous ne l'essaierons pas ici, car il faudrait entrer dans trop de développements; nous nous contenterons de faire remarquer que les odeurs et les saveurs influent sensiblement sur notre être et déterminent certains états particuliers de l'âme, certaines modifications de notre esthésie. Il y a dans les effets qui résultent, par exemple, de l'aspiration de certains fluides, et de l'ingestion de certaines saveurs, d'autres phénomènes à étudier que les phénomènes physiologiques. Ces phénomènes, pressentis depuis longtemps par les médecins, varient suivant l'état intellectuel et moral de chaque individu.

1° MUSIQUE.

Le sens de l'ouïe est, de tous les sens, celui par lequel le beau pénètre plus facilement en nous. Si la musique n'est pas également appréciée de tous, elle agit néanmoins sur tous, ne fût-ce que par le rhythme. Les animaux s'y montrent sensibles; il semble même que la matière s'anime à ses vibrations. Aux sons de la lyre d'Orphée, les rochers, dit la mythologie ancienne, s'émouvaient.

La musique ne prend pas conseil de notre assentiment, elle s'impose: « elle ravit à l'âme sa liberté contemplative. Le moi n'est pas saisi par tel ou tel point de son existence spirituelle, il est comme enlevé et mis en mouvement tout entier (1). »

Le son en lui-même est un nombre. La physique nous a appris qu'il résulte d'une certaine quantité de vibrations dans un temps donné. Comme tel, il est soumis aux lois mathématiques. En effet, lorsqu'on analyse les procédés de la composition musicale, on y retrouve toutes les combinaisons de l'arithmologie.

La musique est mélodique ou harmonique.

La mélodie est une succession de sons qui se produisent l'un à la suite de l'autre. Un homme qui chante seul ne peut produire qu'une mélodie.

(1) Hégel, *Cours d'Esthétique.*

L'harmonie est une succession de sons qui se produisent simultanément et concourent, par un jeu d'accords, à faire entendre, sans confusion, plusieurs mélodies à la fois.

La musique est vocale ou instrumentale; mais elle n'atteint à ses effets les plus élevés que par la combinaison des voix et des instruments.

Cette combinaison a été connue dans les temps les plus anciens, mais elle paraît s'être longtemps réduite à un simple accompagnement de la voix humaine. Elle se développa avec le sentiment chrétien; saint Ambroise en régla le premier l'emploi dans les églises de Milan, au IVe siècle, et son exemple fut suivi dans la plupart des autres églises. Deux siècles plus tard, le pape saint Grégoire le Grand introduisit dans l'harmonie sacrée les meilleures mélodies, simplifia la notation musicale et créa ainsi le plain-chant. Au XIe siècle, les éléments de la musique avaient été déterminés, la gamme fut constituée, et, avec elle, une instrumentation régulière qui permit l'introduction de l'orgue dans la musique religieuse. L'essor était donné : au XVe siècle, on voit figurer déjà un grand nombre de compositeurs dont les noms sont restés célèbres; mais ces artistes, stimulés par le désir de la popularité, prirent pour thèmes de leurs œuvres des chansons licencieuses, et comme les églises étaient les seuls théâtres de l'époque, ils y exécutèrent leurs compositions. Le scandale devint tel, qu'un instant il fut question d'exclure l'art du culte. Palestrina réhabilita la musique sacrée; il la porta à sa dernière et plus haute expression religieuse; mais, en la soumettant à des règles imprescriptibles, il provoqua indirectement la réaction qui devait donner naissance à l'art profane, c'est-à-dire aux opéras. *Dafne*, *Eurydice*, *Orfeo*, s'affirmèrent comme une restauration du paganisme sensuel en face du mysticisme catholique. Désespérant de surpasser et même d'atteindre les chefs-d'œuvre de Palestrina, les compositeurs cherchèrent à caresser les passions; dans leurs excès mêmes, ils contribuèrent aux progrès de l'art, que Scarlatti, Porpora, Pergolèse, Cimarosa, Paesiello, Piccini, Sacchini portèrent successivement à son plus haut développement. A ce moment, l'Italie semble concentrer tous les talents et toutes les gloires. Cependant l'Allemagne, longtemps bercée aux échos de la musique italienne, commençait à affirmer son génie; ses premiers essais furent des chefs-d'œuvre; il suffit de citer Haendel et Sébastien de Bach, auxquels devaient succéder Haydn, puis Weber, Mendelssohn et Beethoven. Mais tous ces noms sont éclipsés par celui de Mozart qui, fondant dans un éclair de génie, les caractères si tranchés de l'art italien et de l'art allemand, porta l'art profane à son apogée.

2° PLASTIQUE.

L'art plastique est celui dont les produits peuvent être contrôlés par le tact; ses deux grands ensembles de manifestations sont: l'architecture, et la sculpture dont la statuaire est le couronnement.

Il est bien entendu que nous ne parlons pas seulement ici du tact physiologique, mais du tact esthétique, de ce toucher supérieur par lequel notre sensibilité enveloppe complètement l'objet perçu. Le tact matériel n'est pas enveloppant par lui-même, il ne nous fait percevoir que des contacts de surfaces planes, dont l'ensemble, par la simultanéité des sensations, éveille le sentiment de la surface courbe. C'est ce qu'établit nettement la théorie mathématique, à laquelle il faut toujours revenir, quand on veut savoir comment l'entendement procède dans la conception rigoureuse des formes, des nombres et des mécanismes.

L'architecture ne comprend pas seulement l'art d'assembler la matière dans une construction qui réponde en elle-même à l'idée du beau, il faut aussi qu'elle tienne compte des milieux dans lesquels elle la produit. A ce titre elle comprend l'étude des sites décoratifs; aussi la considérerons-nous au point de vue architectonique et au point de vue panoramique. Elle doit s'étendre, non-seulement aux édifices et à leurs milieux, mais encore à toutes les grandes constructions fixes ou mobiles de l'industrie moderne. Qui ne voit l'avenir réservé à l'architecture par les grandes machines dont la science n'a encore produit que le squelette.

La sculpture, considérée en dehors de la statuaire, n'est qu'un art accessoire; elle est subordonnée de tous points à l'art architectural. Mais, quand elle s'élève jusqu'à la représentation de l'être animé, elle peut se dégager de l'architecture, parce qu'elle donne naissance à des monuments complets. La pensée pénètre plus aisément, et se promène plus au large dans une belle statue, que les curieux ne peuvent le faire dans un édifice.

L'architecture a suivi, dès les temps les plus anciens, le même développement que la musique dans les temps modernes. Elle doit son inspiration aux idées religieuses; majestueuse dans l'Inde, colossale et terrible dans l'Asie-Mineure et dans l'Égypte, gracieuse et vivante chez les Grecs; elle semblait avoir parcouru depuis longtemps le cycle de ses transformations, lorsque le sentiment chrétien la régénéra, et, en la portant à sa plus haute expression religieuse, provoqua également la réaction profane de la Renaissance. Les pessimistes affirment que l'architecture a dit son dernier mot, mais la civilisation moderne lui imprime déjà un nouvel essor.

La statuaire, d'abord confondue dans l'architecture, s'est peu à peu affirmée dans l'Asie-Mineure et dans l'Égypte ; mais c'est aux Grecs qu'elle doit à la fois son complet affranchissement et sa dernière expression. Peut-être Michel-Ange aurait-il ébauché une statuaire nouvelle, s'il avait été mieux compris de ses sensuels compatriotes ; peut-être les errements dans lesquels sont entraînés les artistes modernes aboutiront-ils à quelque révélation inconnue ? Nul ne peut prévoir les merveilles que le sens esthétique peut faire surgir encore dans les arts plastiques. L'inspiration n'a point de règles, et, comme son histoire l'affirme, semble se jouer de nos étroites prévisions.

3° GRAPHIQUE.

On confond trop souvent l'architecture et la sculpture avec la peinture dans la dénomination commune d'arts du dessin, sous le prétexte que leurs œuvres sont perçues par l'œil ; mais, comme nous avons déjà démontré qu'il y a une différence entre le tact subtil et la vue, après avoir donné le nom de *plastiques* aux œuvres qui tombent sous le tact esthétique, et qui ont les trois dimensions de la géométrie, nous donnerons le nom de *graphiques* à toutes les œuvres qui ne présentent que deux dimensions et suppléent à la troisième par des artifices.

La vue n'a été qu'un accessoire de la perception des chefs-d'œuvre plastiques. En effet, par elle-même, elle ne constate que des superficies, c'est ce que la peinture démontre en réduisant la perception du tact esthétique à des sensations de surface ; seulement, pour satisfaire aux exigences de ce tact déçu, il faut qu'elle remplace les contours réels par des contours artificiels et appelle à son aide toutes les illusions du trait, de la lumière et de la couleur.

La faiblesse de l'art graphique se révèle par la sécheresse du dessin linéaire. Le trait, dont la grâce est si précieusement recherchée par les artistes, laisse le public entièrement froid et indifférent. C'est le trait cependant qui fait ressortir en peinture les caractères de vérité, de précision, de pureté et de simplicité ; c'est sur lui seul que repose la gravure, dont les produits sont en si grand nombre et si variés ; c'est lui qui, en se renforçant d'ombres, nous donne l'idée des jeux de lumière et produit des effets parfois si saisissants.

L'étude de ces effets nous conduit naturellement à celle des teintes générales, qui sont le point de départ de la peinture, c'est-à-dire des couleurs. Les œuvres picturales sont plus complètes, en un sens, que les œuvres plastiques parce qu'elles renferment en elles-mêmes l'harmonie des

milieux. Dans un cadre restreint, elles font à leur gré, selon l'expression vulgaire, la pluie et le beau temps. Aussi les impressions qu'elles laissent dans l'âme sont-elles plus vives et plus profondes ; malheureusement, cette facilité a engendré des abus, elle a souvent détourné les peintres de la recherche de l'idéal, pour les engager dans la poursuite outrée du pittoresque et les asservir parfois à un réalisme grossier.

De tous les arts, la peinture est celui dont l'appréciation exige une éducation plus complète et une sensibilité plus délicate. Combien de barbouilleurs pour un peintre, combien plus d'amateurs pour un vrai connaisseur ! Que de théories ridicules, de dissertations oiseuses, de proclamations de génies incompris ! Ici, les théoriciens de la ligne pourfendent les théoriciens de la couleur ; là, les doctrinaires du compassé chargent à fond de train les révolutionnaires de l'outré ; plus loin, les fanatiques de l'esprit se ruent avec rage sur les énergumènes de la matière. Sont-ce bien là des artistes, et le sens esthétique trône-t-il au milieu de ce tumulte? Gardons-nous de le croire : les vivants font-ils trop de bruit, allons interroger les morts ; leurs œuvres produiront d'elles-mêmes leur enseignement. S'il nous faut absolument une théorie qui concilie notre foi dans l'idéal avec notre sentiment du réel, les yeux fixés sur un chef-d'œuvre incontesté, nous dirons avec Hégel :

« L'idéal, c'est la beauté dégagée et purifiée des accidents qui la voilent et la défigurent, qui altèrent sa pureté dans le monde réel. L'idéal dans l'art n'est donc pas le contraire du réel, mais le réel purifié, rendu conforme au type divin que l'artiste porte en lui. En un mot, il est l'accord parfait de l'idée et de la forme sensible. La représentation du principe spirituel dans la plénitude de sa vie et de sa liberté, avec ses hautes conceptions, ses sentiments profonds et nobles, ses joies et ses souffrances, voilà le vrai but de l'art, la vérité idéale. Enfin l'idéal n'est pas une abstraction sans vie, une froide généralisation, c'est le principe spirituel, sous la forme de l'individualité vivante. C'est l'infini manifesté dans le fini. On voit dès lors quels sont les caractères de l'idéal. Il est évident qu'à tous ses degrés, c'est le calme, la sérénité, la félicité avec l'affranchissement complet des besoins et des misères de la vie. Cette sérénité n'exclut pas le sérieux, car l'idéal apparaît au milieu des combats de la vie ; mais, jusque dans les plus rudes épreuves, au milieu des déchirements de la souffrance, l'âme conserve un calme apparent comme trait fondamental. »

Telles sont, en quelques lignes, les impressions que laisse en nous la contemplation des œuvres les plus élevées de l'art et surtout de l'art pictural. Nous n'établirons pas ici la classification de ces œuvres en groupes

généreux; elles sont assez connues de ceux qui fréquentent les musées. Avant d'entrer dans cette division, il faut parcourir en son entier le cycle des connaissances humaines.

Les œuvres picturales s'altèrent si vite et s'anéantissent si facilement, qu'il est difficile de se faire une idée de la peinture dans les temps anciens. Les Grecs, qui ont célébré les chefs-d'œuvre de leurs peintres, ne nous en ont laissé aucune trace; or, entre les images plus ou moins coloriées que nous tenons des civilisations plus anciennes, et les fresques de l'époque Romaine, récemment extraites des fouilles de Pompéi, il y a une lacune d'autant plus regrettable qu'on ne peut la combler qu'avec les comptes-rendus imparfaits et trop souvent exagérés des auteurs anciens. Naguères encore, l'histoire de la peinture ne remontait pas au delà de l'*École Byzantine*. Cette école paraît s'être réduite à la reproduction de figures isolées et purement décoratives. Aussi est-ce avec bonheur qu'on salue les premiers essais de l'art italien dans l'*École Florentine*, dont Cimabuë, Giotto et fra Angelico furent les promoteurs, et dont les représentants les plus illustres sont Léonard de Vinci, Michel-Ange et André del Sarte. L'*École Romaine* est personnifiée dans Raphaël, dont la gloire semble encore l'emporter sur celle de tous les autres peintres. L'*École Vénitienne* nous a laissé les œuvres du Giorgione, du Titien et de Véronèse; l'*École Lombarde*, celles du Corrège et du Parmesan; l'*École Bolonaise*, celles des Carrache, du Caravage, du Dominiquin, de l'Albane, etc. Tous ces grands peintres ont fleuri dans l'espace de trois siècles.

En dehors de l'Italie et de la France, par ordre chronologique, il faut ranger l'*École Flamande*, dont les principaux maîtres sont Albert Durer et Hans Holbein, et dont les gloires sont Rubens et Van Dyck; l'*École Espagnole*, à jamais célèbre par les œuvres des Ribeira et des Murillo; l'*École Hollandaise*, par celles des Rembrandt, des Miéris et des Metzu; l'*École Anglaise*, par celles des Hoghart, des Reynolds et des Lawrence.

Chez nous, la peinture s'éveilla sous les auspices du Rosso, du Primatice, de Léonard de Vinci et d'André del Sarte; elle compta successivement pour maîtres Jean Cousin, Vouet, le Poussin, Claude Lorrain, Lesueur; mais bientôt le joli et le maniéré étouffèrent l'art français, que David essaya de retremper dans l'antique. Son école présente de grandes beautés; mais, trop assujettie à la raideur sculpturale, elle détermina une réaction dont Géricault prit l'initiative et que Delacroix poussa à ses dernières violences. Aujourd'hui, de même qu'en philosophie, en musique, en statuaire, toutes les écoles et tous les systèmes sont accrédités. En vain quelques peintres essaient-ils d'élever quelques petites chapelles ou de

creuser quelques tanières, ils ne peuvent faire école et rentrent tôt ou tard dans les errements d'un éclectisme plus ou moins avoué. A vrai dire, l'art, en France comme à l'étranger, cherche une voie nouvelle qu'il n'a pas encore découverte, et ses adeptes dissertent beaucoup plus qu'ils n'agissent.

4° CINESTHÉTIQUE.

La musique est l'élément même de l'esthésie; elle est comme une première secousse imprimée à l'activité; la plastique crée à notre âme une nature spéciale dont la peinture constitue la floraison; mais cela ne suffit pas à nos exigences, nous réclamons quelque chose encore, et d'autant plus impérieusement que notre sens esthétique a été plus vivement sollicité : c'est l'apparition du beau incarné sous la forme et traduit dans l'action humaine idéalisée. Le plus auguste sanctuaire est morne pour l'âme fervente qui n'y perçoit pas son Dieu; la scène la mieux décorée retentira en vain des plus suaves harmonies, elle sera sans âme pour le spectateur tant que l'acteur n'y aura pas fait son apparition.

Transportée dans les sphères du beau, l'action doit être à l'unisson de nos exigences esthétiques. Le beau dans l'acte est la révélation de l'être divin sous la forme humaine; à l'harmonie des allures, les anciens devinaient la présence de l'immortel : *Incessu patuit Dea.*

La primitive et la plus simple expression du beau dans les allures est la danse, « quelque chose d'allé, d'ailé et de sacré », selon l'expression de Platon. La danse, en effet, jouait un rôle capital dans les cérémonies des anciens, mais peu à peu elle perdit son caractère divin pour affecter des manifestations sensuelles et se réduire à une simple provocation à la volupté. Aux derniers temps de la république romaine, elle était tombée dans un tel discrédit que Cicéron s'écriait : « Qui s'avisera de danser s'il n'est ivre ou fou! » Prostituée avec la peinture, à la mise en scène de toutes les débauches, elle ne s'est pas encore relevée dans la civilisation moderne, car nous avons peine à imaginer que la danse puisse être à la fois chaste, gracieuse et digne.

Cependant, en dehors de la danse, il y a dans toute cérémonie, dans toute réunion, un ou plusieurs acteurs gouvernés par un ensemble de règles, par un code de rites, d'attitudes, de gestes, et d'allures dont on ne nie pas l'importance; c'est l'étude de ces lois que nous aurons à poursuivre ici sous le titre de Cinesthétique. L'orateur dans sa chaire, les acteurs d'une cérémonie ou d'une représentation théâtrale y sont assujettis.

Les sentiments qu'éveille en nous la Cinesthétique s'imposent d'autant

plus vivement à tous les hommes que l'harmonie entre l'acteur, la scène et les accords dont elle retentit est plus complète.

III

TECHNESTHÉTIQUE.

1° DE L'INSTRUCTION DANS L'ART.

Sous l'empire d'une émotion puissante, au spectacle des beautés de la nature, au contact d'une des merveilles de l'art, chacun de nous peut s'écrier : « Et moi aussi, je suis artiste ! » Mais, entre la révélation du sens esthétique et sa manifestation, il y a un abîme où disparaissent les individualités les plus énergiques, faute d'avoir su bâtir un pont, c'est à dire créer un chef-d'œuvre, de l'un à l'autre bord.

La Technesthétique nous enseigne par quels procédés le génie peut passer de la conception à la traduction, et, si elle n'est pas la partie capitale de l'Esthésiologie, elle en est la partie indispensable.

La Technesthétique considère à la fois la théorie et la technie, c'est à dire l'exposition des connaissances nécessaires à l'artiste et l'exercice de son instrument. L'étude et l'exécution doivent marcher de pair, celle-là est l'aliment de celle-ci.

Qui ne reconnait au premier abord que l'artiste, indépendamment de son instrument, doit posséder non-seulement des connaissances générales, mais aussi la science d'une infinité de détails. Le besoin de savoir est plus évident ici que partout ailleurs. Tout artiste est une encyclopédie incarnée où la critique constate plus ou moins d'erreurs. Interrogez l'artiste dans sa candeur primitive, il sait tout et vous apprendra tout… quitte à apprendre lui-même, un peu plus tard, qu'il lui faudra tout étudier.

Examinons s'il est un ordre de connaissances auquel l'artiste puisse se soustraire. Est-il musicien ? les mathématiques lui apportent la science des temps, des mesures, des rhythmes et des combinaisons, qui jouent un si grand rôle dans la composition musicale; la physique, la science du son qui constitue la base même de son art; la cosmologie lui révèle les grands phénomènes et les lois générales de l'acoustique; l'histoire naturelle, les phénomènes individuels avec toutes leurs variétés; la technologie lui construit des instruments dont il est forcé de connaître à fond le mécanisme; l'anthropologie lui révèle le plus merveilleux de tous ces instruments, son organisation propre; avec

la noologie, il pénètre dans l'intelligence supérieure des choses et des êtres; avec la psychologie, dans celle des mobiles profonds de l'âme à laquelle il semble exclusivement s'adresser.

2° DE LA TECHNIE ARTISTIQUE.

La technie de l'art comprendra pour nous tout ce qui constitue l'industrie artistique. Il importe ici de distinguer en quoi cette industrie diffère de l'industrie technologique proprement dite.

Cette différence est la même que celle qui sépare l'artiste de l'artisan. L'artiste compose et l'artisan reproduit; mais il y a telles et telles reproductions; les unes sont intelligentes, les autres machinales; les premières sont artistiques, les secondes industrielles. L'art commence là où il y a une interprétation du modèle; une œuvre d'art, même reproduite, sera toujours reconnaissable à ce signe qu'elle est unique, fût-elle imitée, et qu'elle porte en elle-même une originalité qui lui est propre.

Nous nous bornerons à énumérer ici les principales connaissances nécessaires à la composition des œuvres d'art. Ces connaissances, purement instrumentales, sont exclusivement poursuivies par la majorité des artistes, qui limitent leur génie au savoir-faire et leur gloire à la popularité; mais elles sont quelquefois aussi, et à tort, négligées par certains fanatiques de l'idéal qui les considèrent comme l'apanage du *turpe servum pecus*. Ceux-là ne songent qu'à caresser le goût et à flatter les passions; ceux ci, disposés à s'ensevelir dans leurs rêves, hésitent toujours à se manifester au public. Le véritable artiste ne dédaigne rien parce qu'il sait que l'inspiration est en raison même de son développement intellectuel et moral, et que l'exécution est en raison même de son savoir-faire.

3° DE LA TECHNIE MUSICALE.

Les genres dans lesquels se répartissent généralement les œuvres musicales : sont la musique de chambre ou de concert, la musique instrumentale, la musique chorale, la musique dramatique et la musique sacrée.

La musique de chambre est destinée surtout à caresser le goût; ses ressources bornées la réduisent le plus souvent à n'éveiller que le sentiment du joli. La romance ou la chansonnette accompagnées par un instrument, l'exécution des solos, en constituent les principaux éléments. Ici, il s'agit de mettre l'exécutant en relief et de faire valoir son habileté. Cependant la musique de chambre s'élève aux plus belles expressions de l'art dans les trio, les quatuor, et les quintetti de la musique concertante.

La musique instrumentale, dans laquelle il faut ranger la musique militaire, la musique d'orchestre, d'ouverture, etc., s'exécute avec un concours plus ou moins considérable d'instruments. Son expression la plus complète et la plus élevée est la symphonie, dans laquelle Beethoven a excellé.

La musique chorale, dont les orphéons nous présentent aujourd'hui des effets d'ensemble grandioses, s'exécute avec le concours seul des voix humaines, réparties en groupes plus ou moins nombreux et variés.

La musique dramatique embrasse dans une même exécution tous les genres précédents. Elle est la manifestation la plus complète de l'art musical. Elle devrait comprendre la musique sacrée, si elle ne s'en distinguait par un caractère essentiel dont on ne parait pas, aujourd'hui surtout, apprécier assez l'importance. Ce caractère est l'exagération dans le pathétique. La musique dramatique s'empare en effet de l'auditeur pour l'entrainer violemment dans une succession de sentiments où domine le trouble plutôt que le ravissement, l'émotion plutôt que l'extase.

La musique sacrée, au contraire, évite le pathétique ou plutôt le poursuit dans des sphères supérieures où la passion n'a plus aucun empire. Elle ne retentit point dans l'être humain, mais au dessus de lui. Tout ce qui pourrait troubler ou distraire le spectateur lui est étranger. Dégagée de la vie terrestre, compagne des anges, elle ouvre le ciel pour en laisser tomber l'harmonie divine sur l'homme souffrant et prosterné. Par cela même qu'elle est la traduction la plus élevée de l'art, elle compte le moins de chefs-d'œuvre, d'interprètes et d'appréciateurs.

L'artiste qui veut posséder la science musicale proprement dite, c'est à dire devenir compositeur, doit passer par différents degrés d'études dont les principaux sont :

1° La lecture et l'écriture de la notation musicale ;

2° L'exercice de la voix ou d'un instrument quelconque au point de vue mélodique ;

3° L'accompagnement de la voix par l'instrument, qui constitue les éléments de l'harmonie ;

4° Le contre-point ou l'art des parties concertantes ;

5° La fugue, dont l'expression la plus simple est de faire passer tour à tour une mélodie d'une partie dans une autre ;

6° Le canon, qui consiste à faire exécuter simultanément une même mélodie par plusieurs voix ou instruments, mais de telle sorte que chaque instrument exécute une mesure différente de cette mélodie sans contredire aux exigences de l'harmonie ;

7° Les ressources des organes musicaux.

Ces différentes études ne peuvent être qu'indiquées ici. Leurs théories, même sommaires, sont du ressort de l'exposition proprement dite.

4° DE LA TECHNIE PLASTIQUE.

Les genres et les procédés de l'art plastique sont si variés qu'il faut, dans un simple plan, renoncer à en donner une énumération satisfaisante, surtout en ce qui concerne l'architecture. Il y a autant de genres architecturaux qu'on peut compter de siècles et de nations. Si quelques styles sont dominants, comme dans l'art grec, l'art byzantin, l'art arabe, l'art du moyen âge et l'art de la renaissance, ils présentent des caractères tellement divers et des modèles en si grand nombre que l'architecte ne peut guère se soustraire à l'imitation; il meurt presque toujours avant d'avoir seulement possédé l'érudition universelle que comporte sa profession. Cependant les études qui sont spéciales à l'architecte sont, en dehors de la technologie proprement dite, celles de la perspective et des effets décoratifs. Aussi est-il nécessaire qu'il possède une connaissance assez approfondie du dessin, de la sculpture et de la peinture, dont il emploie toutes les ressources.

La sculpture joue le plus grand rôle dans l'architecture; elle y prend toutes les formes; quelle que soit la beauté intrinsèque de ses œuvres, elle doit non-seulement s'enfermer dans les cadres, mais aussi s'assujettir aux contours principaux, et aux effets d'ensemble qui lui sont assignés par l'architecte. A ce point de vue elle est employée comme *ronde bosse*, en se détachant dans l'espace avec ses trois dimensions, ou comme *relief*, en faisant corps avec l'ensemble architectural sur lequel elle se contente d'accuser des saillies. Dans ce dernier cas, on distingue le *bas-relief*, où les saillies sont peu proéminentes; le *demi-relief*, où les figures se dégagent à moitié du bloc; et le *haut relief*, lorsque quelques-unes d'entre elles sortent complètement de la masse, les autres figures y restant plus ou moins engagées.

Quant aux figures et aux formes représentées par la sculpture architecturale, elles peuvent rappeler non-seulement tous les objets matériels connus, mais aussi s'inspirer des combinaisons les plus capricieuses et les moins prévues; elle sont belles dès l'instant qu'elles concourent à l'harmonie de l'ensemble. Ce que nous disons des formes et du dessin s'applique également aux couleurs. Il y a donc une sculpture et une peinture tout à fait spéciales en architecture.

Soit qu'on la considère comme liée à l'architecture, soit qu'on la considère

comme indépendante, la sculpture est assujettie dans l'exécution à des procédés particuliers, et ses œuvres traversent différentes phases avant d'arriver à leur dernière expression. Les plus générales sont le *modelé* et la reproduction.

Dans le modelé l'artiste compose sa première ébauche avec de la cire molle ou de l'argile. C'est la *maquette* destinée à figurer les principaux contours de l'œuvre. La maquette est ensuite reproduite avec une matière pétrissable sur une grande échelle, de manière à donner un modèle aussi complet que possible.

Le modèle est reproduit soit par le coulage, soit par la taille. Dans le premier cas, on en moule les différentes parties, pour y couler le plâtre, le bronze ou une matière pétrissable, dont on rapproche ensuite les empreintes. Dans le second, on procède par la *mise au point*, qui consiste à déterminer dans un bloc les points exacts d'abord des principales saillies, puis des saillies secondaires du modèle; de dégrossissages en dégrossissages, on arrive peu à peu à la reproduction complète à laquelle le sculpteur donne le fini.

L'emploi des teintes et des couleurs dans la sculpture est dangereux. Si le goût de l'ignorant s'accommode de la sculpture coloriée et n'est complètement satisfait que par les figures de cire, le goût de l'artiste se prononce nettement en faveur des œuvres qui présentent une teinte dont l'uniformité est aussi complète que possible. Mais aucune teinte ne vaut la blancheur immaculée, parce que la lumière y met en évidence les saillies et les ombres les plus délicates.

5° DE LA TECHNIE PICTURALE.

Pour le peintre, comme pour le sculpteur et l'architecte, le *dessin* est la condition essentielle et le fondement même de l'art; mais si, dans l'architecture, il tend surtout à la perspective, dans la sculpture à l'étude des jeux de lumière, dans la peinture il tend au *coloris*. On a beaucoup disserté sur la question de savoir si la couleur devait primer le dessin, ou le dessin la couleur; mais cette question est oiseuse. La couleur est elle-même un dessin parfait. C'est la lumière telle que la manifestent les corps naturels, la lumière, avec toutes ses gradations spectrales, qui vient placer chacune de ses nuances à l'endroit précis et accuse chaque objet dans toute sa netteté. Tout point lumineux est nuancé, il a sa place rigoureusement déterminée dans l'ensemble, par cela même, il est assujetti au tracé d'une géométrie mystérieuse.

Un tableau est comme une baie ouverte dans une muraille, le sujet qu'il représente peut se résoudre en un nombre indéfini de points diversement colorés, distribués sur une glace transparente, avec une précision mathématique. Qu'un de ces points ne soit pas à sa place, la scène qu'il représente pèchera par quelque endroit; elle manquera de vérité. L'éclair de génie qui resplendit sur l'ensemble n'en dénature aucun linéament, aucun trait essentiel. L'illusion qu'il produit vient de l'illusion même du peintre; elle sort de son âme et non de sa palette.

L'artiste doit donc posséder si profondément la science du dessin, que lorsqu'il distribue ses couleurs, il les place à l'endroit précis. Mais il doit connaître aussi tous les tons de la gamme des couleurs, afin de les saisir du premier coup, pour les accrocher aux points de repère que le dessin leur assigne.

Les principaux procédés de peinture sont : le *camaïeu*, le *pastel*, l'*aquarelle*, la *fresque*, la *miniature* et la *peinture à l'huile*.

La peinture au camaïeu ou peinture monochrome, se fait à l'aide d'une seule couleur dont les teintes plus ou moins accusées constituent l'image; elle procède par traits fondus et par lavis.

Le pastel s'exécute au moyen de crayons colorés; mais il s'altère facilement, et les vernis dont on a essayé de le recouvrir lui enlèvent sa fraîcheur et son velouté.

L'aquarelle résulte de l'emploi de couleurs à l'eau sur un papier dont la nuance constitue le plus souvent la teinte générale de l'œuvre. Les couleurs à l'eau sont ordinairement transparentes, mais quand elles sont opaques, elles constituent ce qu'on appelle la peinture à la *gouache*.

La fresque est une aquarelle qui s'exécute sur des panneaux de muraille, recouverts d'un enduit particulier. C'est la peinture monumentale par excellence.

La miniature se fait avec des couleurs à l'eau gommée, distribuées à l'aide d'un pinceau très-fin, par petits points, sur vélin ou sur une plaque d'ivoire.

La peinture à l'huile, enfin, s'exécute au moyen de couleurs broyées dans une huile siccative très-pure (l'œillette mélangée de litharge); l'artiste les dispose sur une toile tendue, soit par teintes générales ou *glacis*, soit par masses épaisses ou *empâtements* qu'il fond ensuite les uns dans les autres. Quand les effets généraux sont obtenus, il laisse sécher pour *retoucher* ensuite et faire des *réveillons*, c'est-à-dire, accuser certaines parties d'une manière spéciale. Le tableau terminé présente un aspect terne, *embu*,

qu'on fait disparaître au moyen d'un vernis. La peinture à l'huile est celle qui compte le plus de chefs-d'œuvre.

6° DE LA TECHNIE CINESTHÉTIQUE.

Le développement cinesthétique résulte d'exercices physiques accomplis sous l'influence de l'art, et destinés à transfigurer l'être dans ses actes.

Nous ne décrirons pas ici les procédés de la Cinesthétique, dont les fondements sont la pratique d'une gymnastique noble, et d'une danse où la mimique doit jouer le plus grand rôle. Cette partie de l'esthétique, malheureusement trop peu cultivée et presque entièrement méconnue aujourd'hui, demande une exposition spéciale.

Tout homme poursuit plus ou moins la réalisation d'une personnalité idéale. Mais, suivant le sentiment de sa dignité, c'est à dire suivant le développement de son état intellectuel ou moral, il affirme plus ou moins une originalité propre, une incarnation plus ou moins manifeste de l'être divin qui se meut en lui. Considérés à ce point de vue, les exercices cinesthétiques acquièrent une importance capitale.

Malheureusement le sens esthétique, auquel la majorité des hommes, et même des hommes instruits, reste complètement étrangère, devrait être plus fréquemment sollicité par l'enseignement. Nous avons constaté que la cinesthétique, dont l'étude a pour but de donner au corps humain la beauté plastique, la grâce des attitudes et l'harmonie des mouvements, est tombée dans un tel discrédit, qu'on s'étonne des efforts de ceux qui veulent la remettre en honneur. Une prétendue dignité, qui n'est que de la raideur, exclut tout exercice physique, considère la gymnastique et la danse, comme l'apanage des baladins, et contribue à nous emprisonner dans des costumes ridicules et à nous enchaîner dans des allures guindées. L'art, qui proteste par ses œuvres contre ces tendances, est généralement considéré comme corrupteur, parce qu'il tend à nous ramener vers le nu. Mais d'un côté, on ne considère pas assez que la nudité est l'état vers lequel nous revenons sans cesse, quand notre activité physique atteint un certain déploiement. De l'autre, une fausse pudeur qui confond le déshabillé avec le nu, ne nous permet pas de remarquer que c'est aux artifices du costume que la volupté emprunte toutes ses provocations.

Le nu corrupteur dans l'art est celui qui présente des attitudes de paresse et de volupté, des exagérations de formes et des réminiscences de déshabillé. Mais le nu, quand il est vrai et quand il manifeste la forme humaine dans l'exercice franchement accusé de son activité, ne nous

inspire aucun sentiment que nous ne puissions avouer. La statue qu'on appelle la *Vénus de Milo* est d'une chasteté complète dans sa nudité; elle n'est pourtant qu'une manifestation de la beauté plastique. Coiffez-la d'une cornette, vous la rendrez indécente.

A moins d'interdire à l'art toute manifestation de la forme humaine, il faut nécessairement entrer dans les considérations qui précèdent. Ces considérations doivent être acceptées comme spéciales, à l'étude qui nous préoccupe; hors de l'esthésiologie, et dans l'état actuel des mœurs, on ne peut les rappeler qu'avec une extrême discrétion. Non-seulement notre sensibilité esthétique, mais notre sensibilité la plus grossière ont été tellement perverties par nos vices, qu'il faut traiter l'Humanité actuelle comme un malade à qui la vie en plein air, l'exercice et une forte alimentation sont sévèrement interdits.

V

MÉTHODE.

On classe généralement la poétique dans les beaux-arts, mais il est évident qu'on se place ici au point de vue des connaissances sociales. Nous voulons limiter d'abord la théorie du beau au sentiment supérieur que nous portons en nous-mêmes et aux jouissances personnelles qu'elle nous procure, quitte à en déterminer plus tard les applications dans des ordres de connaissances plus complexes. L'esthésiologie est contenue tout entière dans le moi, ainsi que les théories de l'intelligence et de la morale.

D'un autre côté, la seule branche de la cinesthétique, qu'on ait l'habitude d'introduire dans les beaux-arts, est *la danse*; et ce n'est pas un médiocre sujet d'embarras pour le philosophe que de disserter sur un art aussi frivole. Le quadrille, la valse, les boléros et les jetés-battus des corps de ballet s'accommodent difficilement avec la gravité des spéculations philosophiques. Ramenée à son rang dans un ensemble d'idées plus général, rapportée à la théorie complète du beau dans les allures, en un mot, considérée au point de vue cinesthétique (1), la danse devient digne de notre attention jusque dans

(1) *Cinesthétique*, du grec *cinéô*, se mouvoir; et *esthétikê*, en vue du sentiment du beau.

ses écarts ; alors, peut-être, ne nous sera-t-il pas difficile de lui restituer les caractères d'*ailé* et de *sacré* à travers lesquels Platon l'avait entrevue ?

L'Esthésiologie comprend trois grands ensembles de constatations que nous avons répartis sous les titres d'*Esthétique*, de *Terpnographie* et de *Technesthétique*. — Le premier comprend l'étude en elle-même des différents phénomènes de cette sensibilité supérieure et délicate, à laquelle nous avons donné le nom d'*Esthésie*, et qui transfigure la réalité en y introduisant des perceptions d'un monde parfait ; — le second comporte l'éducation esthétique, et le développement de ce sens critique que nous devons à l'étude des merveilles de l'art ; le troisième, enfin, nous initie aux ressources dont l'homme a disposé jusqu'à présent pour traduire et matérialiser les sensations idéales que le beau a éveillées en lui.

L'Esthétique traitera donc :

1° *Du sentiment esthétique*, c'est à dire des effets que le beau détermine en notre âme ;

2° Du goût et de l'agréable, c'est à dire des appétences qui élèvent l'homme jusqu'à l'appréciation du beau ;

3° Des caractères du beau.

La Terpnographie, ou description des productions de l'art comprendra l'examen au point de vue chronologique des œuvres de :

1° La musique ;

2° L'architecture et la sculpture, que nous avons comprises sous le titre de *plastique*.

En général on a classé l'architecture, la sculpture et la peinture sous la rubrique générale de : *Arts du dessin*, et, par suite, le titre de *plastique* s'est étendu aux œuvres picturales, contrairement à l'étymologie du mot : plastique. — En grec, *plasma* signifie proprement : ouvrage de terre, et *plastiké* : ce qui a rapport à la matière façonnée. — Comme toute matière façonnée relève du tact esthétique et détermine nettement la différence qu'il y a entre l'art, soit architectural, soit sculptural, et la peinture, nous restreignons la qualification de plastique au premier, et nous classerons la seconde dans une catégorie spéciale. Les différentes branches de peinture ayant pour but unique de s'adresser à la vue et d'exclure fatalement le toucher esthétique auquel elles cherchent à suppléer par des illusions d'optique, nous classerons toutes les productions qui en résultent sous le titre d'œuvres de :

3° La graphique.

Le mot *graphique* s'applique en effet, dans la langue française, à toutes les représentations de figures sur des surfaces.

4° La cinesthétique, qui peut être considérée comme le trait d'union entre tous les arts dont nous venons de parler, puisqu'elle nous apprend que le sentiment du beau dans les mouvements a pour inspiration constante une harmonie qui satisfait à la fois l'ouïe, le tact et la vue esthétiques. Pour qui méconnaît cette dernière branche de l'art, l'antiquité ne sera jamais qu'un livre fermé.

La Technesthétique enfin, qui a pour but de nous initier aux procédés et aux genres que nous comprendrons sous le titre général d'instruments, expose les ressources de toute espèce de l'industrie esthétique.

VI

APPLICATIONS.

Nous avons fait remarquer, à la fin de l'*esthétique*, que les caractères du beau se rapportaient aux différents ordres de connaissances que nous avons mentionnés dans ce Plan. Nous avons signalé en outre, au commencement de la *technesthétique* que le musicien, par exemple, doit avoir exploré et même profondément étudié dans beaucoup de détails les sciences positives, afin d'arriver à la possession de toutes les ressources de son art. L'architecte, le sculpteur, le peintre sont également assujettis à ces études; ils en sentent plus fréquemment encore la nécessité. Le mot du poëte latin : « Je suis homme, et rien de ce qui touche à l'humanité ne doit m'être étranger » est vrai surtout pour l'artiste, — d'autant plus vrai que ses productions s'adressent à l'humanité entière, et qu'il n'est pas sollicité par le seul désir de connaître, mais par la nécessité même de prouver qu'il sait Que de belles œuvres avortées, faute des connaissances nécessaires à leur production ! Que d'artistes réduits à imiter, faute d'un savoir qu'ils ont eu le tort de considérer comme étranger à leur profession ! La science est l'aliment du génie, elle est le présent de l'humanité ; l'inspiration est la flamme qui consume cet aliment, le transfigure et le fait resplendir ; elle est cet éclair que Prométhée a dérobé à la divinité.

VII

HISTOIRE.

A côté de l'histoire qu'entraîne nécessairement la description des chefs-d'œuvre de l'art, et qui accompagne chacune des divisions de la Terpnographie, il y a une histoire du développement esthétique dans l'Humanité, qui doit nous édifier sur les sentiments de plus en plus élevés que nous tenons de la tradition. Chacune des merveilles enfantées par l'art a produit des commotions profondes, dont les âmes retentissent à travers les siècles. L'homme, a-t-on dit, est un abîme plus vaste et plus profond que l'océan; c'est aussi un tout cohérent comme lui. Qu'un mouvement se produise en un point de la masse, il détermine des ondulations correspondantes; ces ondulations, qui gagnent de proche en proche, réagissent les unes sur les autres et déterminent un frémissement général qui se perpétue à l'infini. Toute activité plongée dans un pareil milieu tombe donc sous le coup de ces frémissements et en subit l'empreinte indélébile. Suivant qu'elle rayonne dans des sphères plus vastes, elle perçoit des sensations plus nombreuses et qui se traduisent, en raison même de leur complexité, en des nuances plus délicates. L'Esthésie humaine a donc été modifiée par chacune des grandes manifestations de l'art, et ce sont ces modifications qu'il importe de constater dans l'ordre même où elles se sont produites.

Si cette histoire est à proprement parler celle de l'Esthétique, et se présente avec un caractère bien distinct de celui de l'histoire terpnographique, en revanche on doit faire rentrer dans cette dernière tout ce qui a trait à la découverte ou aux perfectionnements technesthétiques.

VIII

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Aucune branche de nos connaissances n'a donné plus de carrière à la critique que l'Esthésiologie. Au plus petit concert, à la moindre cérémonie, à la plus mince exposition de tableaux, surgissent des comptes-rendus de toute espèce, louangeurs ou satiriques, poétiques ou prosaïques, où chaque

auteur fait parade d'une théorie esthétique qui lui est particulière. Le public, en présence d'opinions aussi contradictoires, est disposé à croire volontiers qu'il n'y a aucune théorie du beau, et que si le scepticisme est de mise quelque part, c'est surtout dans l'art. La sagesse populaire, qui s'exprime en proverbes, a dit depuis longtemps : « Des goûts et des couleurs il ne faut point discuter. »

Assurément le goût et la couleur sont choses essentiellement individuelles, et c'est à cette individualité même que chaque amateur en réfère dans ses appréciations. Affaire d'agrément et de mode, car chacun peut en raisonner ou en déraisonner à sa guise ; mais il n'en existe pas moins une théorie du beau à laquelle le véritable connaisseur ne faillira jamais.

Cette théorie est plus ou moins complète suivant que notre sens esthétique a été développé par la sensibilité physique, intellectuelle, ou morale, mais il suffit que cette sensibilité existe pour qu'elle discerne immédiatement le beau de tout ce qui n'est pas lui-même.

Le premier signe qui révèle le connaisseur, c'est la spontanéité avec laquelle il s'éveille à la moindre perception du beau. Son premier mouvement est toujours un enthousiasme. Ce qui est laid lui est indifférent ; le beau seul l'émeut, parce que le beau seul est l'objet de ses désirs. Il faut le contraindre à l'audition, à la vue, ou au tact du laid pour réveiller en lui le sens satirique. Mais alors il tombe dans une sorte de révolte et ne garde aucun ménagement ; il se croit bafoué et proteste contre les souillures au contact desquelles on soumet son esthésie.

Il ne suffit pas cependant de réunir toutes les connaisseurs sous ce signe, car ils se divisent en trois groupes contradictoires au premier abord et, en tous cas, bien distincts. — Le premier de ces groupes voit l'art dans la nature même, c'est à dire dans ses manifestations matérielles les plus harmonieuses ; le tact esthétique joue pour lui le rôle principal dans la traduction du beau. — Le second poursuit l'illusion dans toutes ses influences, cherchant le rayonnement du chef-d'œuvre en dehors du chef-d'œuvre lui-même ; il ne se déclare satisfait que lorsqu'il a pu rattacher tout un monde idéal à l'objet qui sollicite son admiration. Mais cet objet n'est pas en cause ; il suffit qu'il ne contredise en rien la synthèse dont il l'habille. Que le thème lui plaise, l'œuvre lui plaira si elle n'a pas de caractères tranchés. Ce groupe s'appelle à juste titre le groupe des *idéalistes ;* il ne voit dans l'art que le prétexte et la justification de ses spéculations. La musique est de tous les arts celui qui le satisfait le mieux, parce qu'il est le moins défini. — Le troisième, moraliste par essence, cherche sa satisfaction dans

la peinture, à la condition qu'elle lui retrace un des phénomènes de l'activité morale. Il s'émeut plus particulièrement à la représentation de l'homme triomphant dans les angoisses de la lutte; de la femme sereine dans les misères de la maternité; de la famille joyeuse dans sa concorde ou affligée de ses désunions.

Mais sensualistes, idéalistes, moralistes ne voient l'art que sous une de ses faces; ils s'épouvantent du poëte, qui est l'artiste par excellence. Le poëte, « *poiéta*, le créateur », comme l'appelaient les Grecs, le poëte, qu'il manie la lyre ou le ciseau, le pinceau, la parole, la plume, le poëte seul pénètre dans l'essence même du beau, parce qu'il le conçoit animé, actif, vivant d'une existence supérieure et divine. Il se rit des formes immobiles que caresse le sensualiste, des synthèses laborieusement édifiées par l'idéaliste, des précautions du moraliste. Pour lui, la matière est une âme qui sommeille, la nature une métaphysique tangible, le bien un point de départ vers le mieux. — Pendant que le sensualiste place ses jouissances dans la sensation externe; l'idéaliste, dans une activité intellectuelle qui n'a souvent aucune réalité pour base; le moraliste, dans une réglementation qui restreint la perfection à l'humanité, et s'efforce de constituer un mécanisme complexe où l'art ne joue qu'un rôle perturbateur, — le poëte vibre sous les impressions du beau jusque dans les profondeurs de son sens intime; il ne comprend pas les synthèses qui n'ont pas la nature pour base; il pénètre cet univers dans son essence et le transfigure en l'embrasant aux éclairs de son génie. Il voit, avec Platon, l'âme immortelle transparaître à travers le corps périssable comme la flamme derrière l'albâtre. « Il conçoit, selon la sublime expression des Védas, tous les êtres en Dieu, et n'a de mépris pour rien. »

THÉOGNOSIE.

SUPERSTITIONS. — CROYANCES. — FOI.

I

PRÉLIMINAIRES.

Si l'idéal esthétique est une fleur délicate qu'il faut cultiver pour en jouir, l'idéal divin est une plante robuste que rien ne peut étouffer dans le cœur de l'homme; mais, suivant les efforts qui ont pour but de la développer ou de l'anéantir, elle produit des fruits exquis ou des poisons redoutables : c'est la fleur mystérieuse des légendes orientales qui, tour à tour, donne naissance à l'ange ou au démon.

En récapitulant les connaissances qui précèdent, nous serons conduits à les répartir en trois catégories supérieures : celle des faits, celle des lois et celle des aspirations.

La première s'impose à nous par l'évidence mathématique et la rigueur des rapports qu'elle permet de constater dans l'ordre naturel : c'est la catégorie des sciences positives ;

La seconde nous persuade par la raison en nous faisant pénétrer dans l'intelligence même de ces rapports : c'est la catégorie des spéculations ;

La troisième enfin, nous révèle les différents mobiles de notre activité, et nous apprend comment nous sommes dirigés tour à tour par les révélations intérieures de la conscience et par les illuminations extérieures de l'esthésie : c'est la catégorie des inspirations.

De là, trois ordres de certitudes issues de phénomènes qu'on ne saurait nier sans mauvaise foi, et qu'on ne conteste que parce qu'ils semblent en opposition les uns avec les autres. Mais leur coexistence, par cela seul qu'elle semble contradictoire, entraîne la conception d'un monde supérieur où ils sont unis dans une parfaite harmonie.

Nous voilà jetés en dehors de toute vérification, ou plutôt de toute démonstration, dans un univers mystérieux où rien n'apparait sous une forme sensible, raisonnée ou pratique.

C'est en effet l'univers extrahumain des croyances; univers étrange où notre âme sent qu'elle puise sa vie, sans oser affirmer qu'elle y vit; monde des existences éternelles et illimitées, dont l'activité sans fin nous épouvante, et dont la toute-puissance entraine une complexité et une simultanéité d'actes qui confond notre raison.

Cet univers a-t-il une raison d'être? se manifeste-t-il à certains moments dans les ténèbres de notre âme? existe-t-il par une évidence quelconque, et, s'il existe, peut-on le percevoir dans certains aspects d'un horizon assez borné pour la faiblesse humaine?— C'est ce qu'il appartient à la Théognosie d'examiner.

Les croyances commencent, pour l'homme, là où s'arrêtent les certitudes fournies par son milieu naturel ou par l'exercice de son activité propre, soit dans l'ordre de l'intelligence, soit dans l'ordre des faits. Elles sont éveillées par des révélations et reposent sur des aspirations qu'aucune puissance ne pourra étouffer, fût-ce dans l'âme la plus abjecte.

II

THÉOPHANIE.

O terre! vaste ossuaire des générations qui ont précédé la mienne, si tous tes atomes ne sont pas les cendres de mes ancêtres, il n'en est peut-être aucun qui n'ait été pétri dans le souffle et la sève des morts! — *Humus* sacré qui as donné ton nom à l'*Humanité*, est-ce à toi que je dois le sentiment de mon existence? Cette activité qui fait mon orgueil, hier encore je l'ignorais; je me suis senti vivre sans avoir rien fait pour exister. La plus parfaite des créatures, mon semblable, celui-là de qui je tiens par une transmission héréditaire l'admirable organisme qu'on appelle un corps humain, ne m'a

pas révélé le secret auquel je dois l'être. Il ignore ce *fiat* mystérieux de la paternité que je reproduis en l'ignorant moi-même.

Doù viens-je, moi, petit, qu'un berceau renfermait tout à l'heure? Pourquoi dans un corps aussi chétif cette ambition que l'univers ne peut satisfaire ? Où vais-je quand s'ouvre pour moi la porte du sépulcre? Suis-je sorti d'un néant pour rentrer dans un autre néant?... Et si rien de ce qui est moi ne doit un jour survivre à moi-même, quelle est cette puissance effrayante qui se joue ainsi de l'impossible; tire l'Etre de Rien, le fait s'affirmer dans sa force, dans sa conscience et dans sa gloire, pour le replonger presque aussitôt dans le Rien?

1° FAITS THÉOPHANIQUES.

Ici tout reste muet; la nature, la science, la tombe même se taisent. Et pourtant, dans ce silence, quelque chose palpite au fond de mon être : une espérance, un doute, un remords !... Qui me délivrera de cette angoisse? — « Chimère! s'écrie l'athée, tu n'es qu'un accident. Qu'est-il besoin de remonter jusqu'à ta cause? Que t'importent tes conséquences? La machine demande-t-elle qui l'a montée? s'inquiète-t-elle de ce qu'elle va produire? « Elle fonctionne : fais comme elle. — Es-tu content? jouis de l'heure « présente; *carpe diem*, cueille ta journée en son midi. — Souffres-tu? Un « peu de patience, la nuit va venir, et avec elle l'éternel repos. »

Logiciens tranchants, votre système est court; certains veulent le croire bon. Courte et bonne soit donc la vie de vos adeptes. Mais pourquoi ne savent-ils ni jouir ni souffrir? Ils boivent l'existence à larges traits, et, pendant qu'ils font clapper leurs lèvres, un poison subtil les mord au cœur. Ils cherchent à sourire et ne font que grimacer. A peine se sont-ils assis au banquet que le dégoût les prend, et, pour faire bonne contenance, leur seule ressource est de se déclarer blasés. La fleur du plaisir s'est flétrie avant d'avoir même exhalé ses parfums; ils ont beau la presser en fanfarons contre leur poitrine, ce sceptre de leur gloire n'est qu'un brin de fumier.

Que quelque calamité les atteigne, — que dis-je, une calamité? — Qu'une contrariété seulement les effleure : les voilà plongés dans une affliction insensée. Où donc est leur philosophie? Malades au festin, malades à la peine, leur existence est une agonie de tous les instants. Passe encore si, dans ces ivresses et ces défaillances, ils avaient étouffé l'inquiétude qui les ronge; si en cueillant, comme ils le disent, l'heure présente, ils avaient noyé leur angoisse dans un étourdissement suprême! Mais cette foi mystérieuse, ce sentiment du surnaturel qu'ils prétendaient supprimer, ils n'ont fait que le pervertir. Ils ont refusé leur croyance aux fins supérieures de l'âme, ils

la prodiguent à toutes les superstitions. Un pli dans leur main, une amulette, une réussite de cartes, un mot prononcé au hasard, un souffle qui court... il n'en faut pas davantage pour les faire passer par toutes les alternatives de l'espérance et du découragement. Chiromanciens, diseurs de bonne aventure, somnambules, voilà leurs prêtres; as de trèfle, fétiches, abraxas, voilà leurs dieux.

Eh bien! il y a dans ces superstitions qui naissent avec l'enfant, qu'on retrouve sans exception chez tous les peuples, civilisés ou sauvages, qui poussent comme l'herbe dans l'instinct humain, un fait primitif, unanime, incontestable, presque fatal, qui est la conséquence même de l'existence. Dès l'instant que la sensation existe et qu'elle constate une variation, un changement, une instabilité quelconques, l'âme s'émeut et s'inquiète; elle s'agite entre une crainte et un espoir qui engendrent une croyance. L'heure présente est insaisissable, elle est une transition incessante du passé à l'avenir. La pensée même ne peut la fixer sans concevoir le néant. Que rien ne varie dans la sensation : la sensation s'évanouit et l'être s'évanouit avec elle. Tant qu'il y aura une souffrance à repousser, une joie à perpétuer, tant qu'il restera un doute, un regret, un désir, on verra surgir une croyance logique ou absurde, mais toujours spontanée.

Cependant, au dire de quelques penseurs, toutes les craintes, tous les espoirs et tous les problèmes qui en sont issus, problèmes auxquels on a, mais à tort, donné le titre de croyances, ont leur solution dans la nature même et dans l'homme. C'est par une erreur, une incontinence de pensée que nous inclinons au surnaturel. La raison, la science, l'expérience tendent constamment à faire rentrer notre activité dans ses limites. Cette activité même n'est efficace que quand elle s'exerce tout entière dans l'ordre pratique. Nous portons en nous-mêmes les conditions, les moyens et les fins de notre bonheur. Il suffit de déterminer ces conditions, de nous appliquer à y satisfaire pour réaliser une perfection qui n'existe ni en deçà ni au delà de notre milieu.

Salut à vous, maîtres qu'on a justement appelés les sages! vous nous avez appris à pulser notre force dans notre continence, et, en restreignant nos efforts à notre capacité, vous leur avez donné une base, vous nous avez apporté un aliment robuste. C'est par vous que l'homme est parvenu à dompter ce globe, à triompher des résistances de la matière inerte, des enlacements d'une végétation hybride, des violences de l'animalité. Vous avez retrempé notre intelligence dans l'étude, notre corps dans le travail. De vous est née la civilisation qui nous apporte chaque jour une nouvelle conquête; et c'est

avec un orgueil légitime que vous pouvez montrer derrière chacun de vos pas un nouveau progrès.

Mais en multipliant nos connaissances et nos jouissances, en agrandissant sans cesse notre domaine, n'avez-vous pas multiplié nos désirs et nos besoins? A mesure que vous avez reculé le rayonnement de notre activité dans l'indéfini, n'avez vous point agrandi l'infini qui l'enveloppe? Hier l'Humanité gravitait autour d'un point; aujourd'hui elle gravite autour d'une sphère immense. Mais lorsque ma pensée, que vous avez faite si puissante, plonge dans les profondeurs de l'espace et du temps, cette sphère redevient le point de tout à l'heure. A quelque avenir éloigné que votre esprit me transporte, quelles que soient les grandeurs qu'il me fasse entrevoir, m'empêcherez-vous de pressentir des grandeurs nouvelles? Me conseillerez-vous de ne pas sonder le mystère de l'illimité, vous qui le sondez sans cesse et le voyez sans cesse plus vaste et plus profond? — Ah! sans doute, vous n'attendez pas de moi que je vous méconnaisse, que je vous méprise, que je me décourage; vous êtes trop sincères pour me cacher l'évidence à laquelle vous êtes parvenus. Si l'activité de l'homme est nécessaire, si elle est grande, honorable et sainte, ce n'est pas parce que vous lui prévoyez un but définitif; vous savez mieux que tous qu'elle n'a pas de limite dans son exercice humain. Or, pour que je n'y voie pas une fatigue insensée où je ne m'évertuerai davantage que pour moins aboutir, il faut qu'elle ait des mobiles supérieurs, une sanction suprême. Il faut que je la conçoive comme un reflet de cette activité absolue qui porte en elle seule la puissance et l'intelligence de ses fins. Alors seulement, mais alors, je comprendrai que mon âme soit attirée sans cesse vers l'absolu, et que si elle ne trouve pas sa satisfaction dans l'homme, c'est parce qu'elle ne peut la posséder qu'en Dieu.

2° SPÉCULATIONS THÉOPHANIQUES.

Certes, il est bien mal affermi dans sa foi le croyant que la science épouvante et qui s'imagine que chaque découverte de l'intelligence humaine est un attentat contre l'intelligence divine. Cette raison qui nous vient d'en haut, quand elle est sincère, remonte tôt ou tard à sa source. L'univers est un livre fermé pour l'ignorant, mais chacune des lignes de ce livre apporte une révélation au penseur. Il semble, selon la belle expression de Buffon, que « les vérités de la nature ne devaient paraître qu'avec le temps; et le souverain être se les réservait comme le plus sûr moyen de rappeler l'homme à lui, lorsque sa foi, déclinant dans la suite des siècles, serait devenue chancelante. »

Que j'interroge cette terre à laquelle je puise ma vie : chacune de ses molécules porte l'empreinte d'une existence plus ou moins parfaite, mais analogue à la mienne ; pourtant, si nombreuses que ces existences aient été, je conçois sans peine un temps où elles n'étaient pas encore. Au delà de l'homme, au delà des monstres de la faune et de la flore antédiluviennes, au delà des révolutions cosmogoniques dont les premières roches portent l'empreinte, au delà même des mondes primitifs, ma pensée remonte dans l'infini du passé sans trouver la raison d'être de cet univers. En vain la science cosmologique lui assigne-t-elle comme dernier terme de mes investigations la grande loi de l'attraction en vertu de laquelle les mondes se sont constitués. J'admire la simplicité admirable dont découle mathématiquement cet ensemble non moins admirable de rapports, d'ordinations, de phénomènes innombrables et divers ; mais cette unité primordiale, ce principe générateur n'est qu'un effet et non une cause. Je ne vois pas pourquoi l'attraction a prévalu plutôt que tout autre mode de l'action? Il n'y a là qu'un thème, c'est-à-dire un point de départ choisi entre mille autres. Plus la science positive me démontre que ce thème s'exécute comme une harmonie indéfinie, avec ses variations infiniment complexes et infiniment délicates, à travers les temps et les espaces, plus je suis porté à reconnaître derrière cette activité qui se résume dans l'unité, une personnalité incessante et suprême qui est l'âme de tous ces phénomènes, qui les sollicite incessamment, qui les maintient dans des rapports rigoureusement mathématiques, et qui les développe à travers le temps, sans faillir à elle-même, en les conduisant à une fin que je ne puis sonder.

Autour de la nature comme autour de mon être, je trouve donc l'attestation d'une existence non moins indépendante de l'univers que de la mienne, et plus je pénètre avec Newton dans l'intelligence de ce mécanisme supérieur dont les origines aussi bien que les fins sont un mystère, plus je me sens disposé à m'incliner avec lui chaque fois qu'on évoque l'idée de Dieu.

Ce que nous venons d'exposer ici, relativement à l'étude supérieure des phénomènes naturels dans leurs ensembles mathématiques, physiques et cosmologiques, peut s'étendre à toutes les autres branches de nos connaissances, et comme il n'en est pas une seule qui ne commence par un acte de foi et ne se termine par un mystère, plus nous étudierons ces phénomènes, soit dans leur ensemble, soit dans leurs détails, plus nous verrons apparaître la personnalité divine.

3° ASPIRATIONS THÉOPHANIQUES.

Mais si les faits, si le raisonnement murmurent à mon oreille et font retentir dans ma pensée ce mot suprême qu'aucune voix humaine ne prononce sans provoquer une émotion, une colère ou un amour, c'est surtout dans mes aspirations que je trouve la révélation la plus manifeste de l'existence de Dieu. Le bonheur, la perfection, l'absolu qui me font soupirer sans cesse en sont les témoignages les plus évidents. Ici la réaction conclut comme l'action, car plus mes calculs sont déjoués, moins je réussis dans mes entreprises, plus je constate mon impuissance, et plus je suis entraîné à confesser une intelligence infaillible, une action toujours féconde, une puissance sans bornes. Je comprends sans peine que le mal, l'erreur et le vice procèdent de l'être relatif quand il cesse, par une défaillance quelconque, de se conformer à l'être absolu. Évidemment l'inquiétude, le désir inassouvi et sans cesse renaissant, l'infirmité de ma nature, les souffrances qui m'assaillent et sont autant de témoignages de ma faiblesse, n'auraient aucune raison d'être si je ne concevais une existence où rien de tout cela ne se produit. C'est parce que j'ai l'idée du parfait, que l'imparfait me fait souffrir, et cette idée du parfait, qui me préoccupe sans cesse, ne peut sortir de moi-même. Cette idée du parfait, qui se traduit par le mot Dieu, comporte, ainsi que le dit fort bien Descartes, « une substance infinie, éternelle, immuable, indépendante, toute connaissante, toute puissante, et par laquelle moi-même et toutes les autres choses, qui sont, ont été créées et produites. Or ces avantages sont si grands et si éminents que, plus attentivement je les considère, et moins je me persuade que l'idée que j'en ai puisse tirer son origine de moi seul, et, par conséquent, il faut conclure que Dieu existe. Car, encore que l'idée de substance soit en moi, de cela même que je suis une substance, je n'aurais pas néanmoins l'idée d'une substance infinie, moi qui suis un être fini, si elle n'avait été mise en moi par quelque substance qui fût véritablement infinie. » Le temporaire, le limité, le relatif ne peuvent être conçus que comme des parties de l'éternité et de l'absolu. Je n'aurais aucune connaissance des premières idées, si je n'avais, au préalable, le sentiment des secondes, et ce sentiment, il faudrait que je fusse bien fou pour imaginer qu'il résulte de ma nature même, car ce serait imaginer que je suis absolu.

Hélas ! que j'en suis loin !

En moi, comme autour de moi, la vie éclate de toutes parts, et ses manifestations sont indépendantes de ma volonté. En supposant même que tout ce qui m'entoure ne soit qu'illusion, cette illusion même m'est imposée. Je

ne puis raisonnablement dire que j'ai tiré le sentiment de mon existence de moi-même ; sans parler de mon corps, cet organisme merveilleux que je tiens d'une transmission humaine, l'effort par lequel ma pensée seule serait devenue de rien quelque chose aurait été tellement prodigieux, qu'il dominerait toutes mes autres connaissances, il dirigerait tous mes actes, il inspirerait toutes mes spéculations. J'ai beau m'interroger, ce fait m'échappe, et si j'existe, je suis forcé d'avouer que je n'y suis pour rien. Cela devient d'autant plus évident que je remonte de plus en plus dans mon passé. Hier j'étais moins initié à l'existence qu'aujourd'hui, moins savant, moins exercé ; je possédais moins de choses, je me possédais moins moi-même Toute ma force, toute ma science, toute mon activité, je les ai péniblement acquises et comme empruntées à différents milieux qui m'ont précédé.

Ce fait qui m'a tiré du néant à l'être à travers un chaos au milieu duquel je me débats encore, comporte l'idée d'une puissance si grande que je n'imagine rien au delà. Or, ce fait existe, puisque j'existe ; la puissance suprême qui l'a produit existe, puisque le fait a été produit, puisque j'en suis la preuve vis à vis de moi-même. Et si je vis actuellement, c'est parce que je participe à une existence qui est le fondement de la mienne, et qui lui est antérieure de toute éternité ; car ne pouvant concevoir que, de moi-même, j'ai pu de rien devenir quelque chose, je ne puis concevoir que l'Être par essence ait pu, à quelque moment que ce soit, n'avoir pas été.

La première et la plus directe perception que nous ayons de cet Être supérieur est dans notre existence même ; elle domine toutes les constatations des sens, de la raison et des fonctions de notre activité. Elle nous présente du même coup l'idée de Dieu avec son caractère de toute-puissance et d'éternité. Elle suffit à tout homme sincère pour le prosterner dans une adoration suprême.

Mais ici surgit un problème immense : l'Être qui m'a tiré du néant est-il essentiellement distinct de moi ? Est-il absolu dans le présent comme il l'était dans le passé ? Mon existence ne compromet-elle point la sienne, et ne suis-je pas destiné à m'identifier avec lui dans les temps futurs de l'éternité ? Ma raison m'affirme, à la vérité, que Celui qui a été de tout temps ne peut cesser d'être, qu'à Celui qui est tout-puissant on ne peut rien ôter de sa puissance et l'on ne peut rien y ajouter. — Mais alors pourquoi suis-je, misérable, et n'existant que d'hier ? Pourquoi ce monde où je me débats dans la souffrance et la joie, entre des langes et un linceul ?... Et avant de répondre à ces questions : — Qu'est-ce en réalité que la nature et l'homme quand je les considère sans l'éblouissement des splendeurs divines ?

III

THÉODICÉE.

Nous ferons remarquer que, dans tout ce qui précède, la justification de notre croyance en Dieu a été poursuivie autour de nous, soit dans le passé, soit dans l'avenir, à l'origine et à la fin des êtres, d'une façon en quelque sorte extérieure, et sans aucune sanction en nous-mêmes et dans notre milieu.

C'est précisément dans ce milieu que l'idée de Dieu a été l'objet des plus vives négations, parce que la nature, l'être et les conditions de l'existence semblent reléguer la perfection dans l'idéal, c'est à dire dans le monde des chimères, et affirmer que la réalité par elle-même est imparfaite et relative. Qu'est-ce que le relatif? dit-on. — C'est la négation de l'absolu, comme le fini est la négation de l'infini ; l'erreur, de la vérité ; le mal, du bien. Or puisque tout ce qui s'affirme autour de nous est relatif, fini, temporaire, imparfait, puisque l'erreur et le mal existent, la réalité constatée nie l'idéal invoqué. Dieu, absolu dans l'espace, dans le temps et dans la perfection, ne saurait souffrir tout ce qui n'est pas lui. Il faut qu'il soit tout, et alors l'homme n'est rien ; sinon l'homme est tout, et Dieu n'est rien ; or je suis, donc Dieu n'existe pas, ou Dieu et moi ne sont qu'une même chose.

Ce dilemme repose sur un argument vicieux : la contradiction inconciliable de l'absolu et du relatif ; et cet argument persiste au fond de la doctrine de tous les philosophes qui se sont étudiés à prouver l'existence de Dieu. Dans sa démonstration, qui résume toutes les autres, Descartes fait remarquer que nous n'avons l'idée du fini que parce que l'infini existe : l'infini est donc la plus haute réalité que puisse concevoir notre esprit. Rien n'est plus exact. Mais ce qui est faux, c'est que nous n'ayons l'idée du fini que par la négation de l'infini ; de là cette conclusion monstrueuse que la réalité seule est en Dieu, conclusion qui a engendré les systèmes de Malebranche et de Spinosa, et qui contredit immédiatement la démonstration précédemment établie de ma propre existence ; de là un problème effrayant : la coexistence de Dieu et de l'homme, de l'idéal et du réel, du bien et du mal qui réagissent l'un sur l'autre sans qu'on puisse leur concevoir aucun intermédiaire ; de là cette impuissance avouée de la philosophie moderne à concilier la matière et l'esprit. Anathématisés par le croyant, qui les accuse

d'avoir outragé Dieu en cherchant à le faire constater par la raison humaine, bafoués par le sceptique, qui les accuse d'avoir introduit une absurdité dans la science, les philosophes suivent cependant leur route, cherchant une solution qui leur échappe, parce que l'énoncé du problème est vicieux, mais convaincus au fond du cœur que la contradiction n'existe pas.

Et, en effet, la contradiction n'existe pas.

Quelle précipitation a-t-on mise à conclure que le fini était la négation de l'infini ?

Autant conclure que la partie est la négation du tout. Une investigation des sciences exactes, trop négligées par la philosophie moderne, établit nettement, comme on a pu le voir au commencement de ce livre, que l'idée de durée conduit nécessairement à l'idée d'éternité, l'idée de volume à l'idée d'illimité, l'idée d'action relative à l'idée d'action absolue.

Le temporaire, le fini, le relatif ne sont pas des négations, mais des parties de l'éternité, de l'infini, de l'absolu. Cet univers sensible est constitué non pas sur l'action absolue, mais sur un de ses modes, qui est l'attraction ; et si l'activité divine n'est pas contenue tout entière dans cette manifestation infinitésimale d'elle-même, au moins y est-elle contenue partiellement ; et notre raison est légitimement appelée à la constater dans les phénomènes du milieu où elle s'exerce.

1° THÉODICÉE NATURELLE.

Nous sommes donc conduits à étudier la nature et tout ce qui tombe sous le contrôle de notre sensation externe comme un témoignage de l'existence de Dieu. Plus nous pénétrerons dans l'intelligence de cet agencement merveilleux, qui n'est pas un mécanisme mais une organisation admirable, plus notre intelligence s'illuminera des splendeurs de l'intelligence divine. *Cœli enarrant gloriam Dei*, a dit le Psalmiste : les cieux racontent la gloire de Dieu ; la terre elle-même en est le témoignage, car elle fait aussi partie des cieux, et tout ce qui vit et respire, et se meut avec elle. Vue à travers Dieu, c'est-à-dire en dehors de nos appétits personnels et des satisfactions d'un égoïsme étroit, la nature apparaît sous son vrai jour, avec ses caractères divins, sa fécondité sans cesse renaissante, son économie si admirable, que rien ne s'y perd et que le moindre de ses atomes s'y transforme à chaque instant pour participer à des myriades d'existences où ne s'altère jamais son caractère d'unité et d'indivisibilité fondamentales. Les lois de ses combinaisons portent en elles-mêmes le cachet d'une infaillibilité suprême, car à peine la raison les a-t-elle découvertes qu'elle ne peut plus comprendre

comment ces combinaisons pourraient être autrement qu'elles ne sont et produire des effets différents de ceux qu'elle constate. Chacune des vérités de la science n'est pas autre chose qu'une compréhension de l'esprit de Dieu. La nature, en effet, ne nous paraît pécher par quelque endroit que lorsque nous prétendons la rapporter à notre personnalité. Or qui ne sait aujourd'hui que la science est impersonnelle, et pourquoi ne pas reconnaître que sa personnalité est en Dieu.

Cela est si vrai que notre action sur la nature, pour être efficace, doit s'inspirer de l'intelligence divine, et agir rigoureusement dans le sens de l'organisateur suprême. Notre industrie est toujours bornée ; on le reconnaît bien à la différence des machines et des organismes, mais elle est toujours une application plus ou moins grossière de l'activité de Dieu. En un mot, la matière ne se plie à l'effort humain que quand cet effort est une délégation de la force qui régit tout.

Etudions donc, car la science est sainte et nous rapproche chaque jour davantage de la perfection ; le vrai savant porte avec lui quelque chose de sacré. Mais étudions en rapportant sans cesse notre étude à Dieu. Chaque fois que nous la rapporterons à nous-même, notre science sera stérile et n'engendrera que l'erreur : c'est ce qu'il sera facile d'établir dans l'ordre spéculatif et dans l'ordre moral.

2° HYPARCTOLOGIE.

Chaque fois que l'homme édifie ces univers imaginaires que les philosophes appellent synthèses, il cherche à produire chimériquement ce que Dieu produit virtuellement. Il atteste, par cet imitation même, l'influence de l'action divine sans cesse créatrice, conservatrice et transformatrice. On ne peut concevoir pourquoi cet effort suprême dans lequel l'homme combine des mécanismes intellectuels et agence des idées, serait plus condamnable que l'effort de l'homme qui cherche des outils nouveaux et pétrit des molécules matérielles qui n'ont peut-être au fond, et à l'état d'atomes, qu'une réalité idéale. Le philosophe obéit en cela à la sollicitation divine ; et, chaque fois que ses synthèses sont rigoureusement constituées, il en trouve tôt ou tard la vérification dans cet univers qui le contient, lui, sa raison et son activité tout entière.

Mais ce qui constitue le vice philosophique, c'est de considérer ces synthèses comme entièrement indépendantes de l'œuvre virtuelle de Dieu, ce qui tend indirectement à les rapporter à l'homme : on tombe ainsi dans un



idéalisme qui fait sourire, ou dans un matérialisme qui révolte. Dans le premier cas, on réduit les faits de l'univers à n'être plus que des phénomènes, c'est à dire des apparences ou des illusions ; et la science ne tarde pas à protester, car, par une sorte de prévision divine, la réalité des choses est toujours distincte de la manière dont elles se manifestent. L'idéaliste, quand il ne voit que des phénomènes, des rapports entre les phénomènes, et croit avoir tout fait parce qu'il a réduit l'univers à l'état de synthèse, se trouve démenti par les vérités qui ressortent de l'étude. Le savant n'a pas de peine à prouver que la réalité est si peu conforme au phénomène, qu'il faut à l'homme une perspicacité profonde doublée d'une patience à toute épreuve, pour arriver à dégager le fait en lui-même de l'hallucination persistante qui le manifeste à nos sens.

Réduit à l'état de synthèse idéale, le ciel se présenterait, ainsi que le dit fort bien Ampère, comme une voûte bleue semée de points brillants, et ces étoiles, « ce disque éclatant qui, périodiquement, nous ramène le jour, cette lumière plus douce qui se montre chaque nuit sous une forme nouvelle, auraient la même existence phénoménique. Mais comme le mouvement de la terre et des planètes autour d'un soleil un million de fois plus gros que notre globe, n'existe nulle part dans le monde des phénomènes, que, dans ce monde, les planètes ne décrivent pas des ellipses, que les aires n'y sont pas proportionnelles aux temps, qu'il n'y a point d'attraction en raison inverse du carré de la distance, etc., » l'idéaliste se trouve n'être plus qu'un ignorant, et pour avoir raison dans son orgueil, il est conduit à nier la réalité de la matière.

De même, quand le philosophe, passé à l'état de savant, veut tout rapporter à lui-même, et se considère comme l'être par excellence, il est conduit à dire que les sensations extérieures et les rapports qui en résultent ne sont que des vues de son esprit, en sorte que ces rapports n'existeraient que par cela même qu'il les aurait découverts. Alors « il faudrait soutenir que ce n'est que depuis Newton que les planètes s'attirent en raison directe de leur masse, et en raison inverse du carré de leur distance, etc., conséquences, dit Ampère, qu'aucun mathématicien, aucun physicien ne sera tenté d'admettre. »

Ces démentis infligés par la science à la spéculation qui méconnaît Dieu se retournent contre le savant lui même, lorsqu'il s'attribue l'intelligence efficace ; je veux dire lorsqu'il suppose que ses découvertes, en attestant la puissance de la raison humaine, affaiblissent d'autant la toute-puissance divine. Cet aveuglement de l'orgueil, s'il a dicté le mot attribué à Laplace

présentant sa Mécanique céleste à Napoléon qui lui demandait pourquoi il n'avait pas inscrit le nom du Tout-Puissant au frontispice de son œuvre : « Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse! » expliquerait la conduite de l'Empereur lorsque, dans l'enivrement de sa fortune, il tirait cavalièrement l'oreille des membres de l'Institut. Ce mot ne serait en effet qu'une polissonnerie; il n'a pu être prononcé que dans l'intention de faire la cour au souverain qui s'emportait contre les idéologues; mais il ne pouvait sortir de la conscience du grand mathématicien qui établissait pour la première fois la rigueur des rapports, l'ensemble admirable des lois et la souveraine unité auxquels sont assujettis les mondes dans leurs gravitations majestueuses à travers les cieux.

On peut donc dire que sous chaque synthèse philosophique rigoureusement établie, il y a une réalité, et sous chaque réalité, une présence de l'action divine.

C'est ce qu'Ampère propose de démontrer dans cet ordre de connaissances théognosiques qu'il a signalé le premier, et qu'il intitule *hyparctologie* (science de ce qu'on trouve en dessous) (1). Aujourd'hui, les philosophes l'appelleraient : la recherche des *substratums*.

Cette étude nous conduit à creuser le fini pour découvrir l'infini; elle a pour but de nous mettre en garde contre les illusions de l'idéalisme, en les soumettant au contrôle de la science, et de rectifier le matérialisme scientifique lui-même, en l'empêchant de s'en tenir à des constatations, c'est à dire à de simples effets, pour le ramener sans cesse à l'intelligence des causes. C'est ainsi que la spéculation humaine devient féconde, car elle apprend ainsi à se baser d'abord sur la réalité, et à baser ensuite la réalité sur l'idéal divin qui s'y manifeste avec les caractères d'infaillibilité, de simplicité et de suprême unité.

3° THÉODICÉE MORALE.

Étudiées d'en haut, la nature nous révèle donc l'économie éternelle; la zoologie, l'activité infinie; la science, l'infaillibilité et l'unité suprêmes; l'art nous a élevés peu à peu jusqu'au sentiment de la perfection; mais quand, sous ces éblouissements de la contemplation divine, l'homme se replie sur lui-même, il se reconnaît comme le témoignage incarné de la bonté de Dieu. Puis-je comprendre, en effet, que l'Être souverainement harmonieux — vivant d'une vie éternelle, illimitée — infaillible et tout-puissant dans son activité absolue — parfait en lui-même — ait pu m'admettre à la par-

(1) Du grec *arkè*, principe et *hypo*, dessous.

ticipation de sa gloire par un autre effort que celui d'un amour ineffable? Ce don d'une personnalité distincte et indépendante de la sienne ne dépasse-t-il pas toutes les munificences?

Assurément, la seule constatation du Moi, quand je le rapporte à Dieu, doit suffire pour me plonger dans une reconnaissance sans bornes. — Mais à côté de cette bonté infinie, pourquoi la souffrance, pourquoi le mal? Pourquoi, en me tirant du néant à l'être, Dieu m'a-t il laissé sur le chemin de l'imperfection?

Je remarquerai d'abord que, si Dieu m'avait créé parfait, il n'aurait pu me créer autre que lui-même, et que par conséquent, confondu du premier coup dans son unité, je n'aurais pas eu de personnalité. J'aurais donc ignoré du même coup, la bonté divine et le don de mon être. Par cette distinction même de la personne humaine et divine est né l'amour ineffable qui les relie l'une à l'autre, et les transfigure dans un suprême ravissement.

D'un autre côté, le mal ne vient pas de Dieu; il ne vient que de l'homme. La science positive nous démontre chaque jour que c'est par une ignorance, une révolte contre les lois naturelles, un défaut d'activité dans l'administration de notre milieu, que naît le mal physique. Il ne sera pas difficile de démontrer que le mal moral est toujours le résultat d'une dérogation aux inspirations de notre conscience. Notre conduite dans le Moi est tracée d'avance aussi bien que dans le Non-moi.

Je ne perçois pas d'abord ces rapports merveilleux, je ne puis réaliser tout d'un coup les conditions de mon bonheur; mais quand je me consulte avec sincérité, je trouve dans mes erreurs et dans mes soufrances une nouvelle preuve de la bonté de Dieu. En effet, quelle gloire ne tiré-je pas de chacune de mes améliorations? Ma souffrance d'hier, dissipée par l'effort d'aujourd'hui, est l'attestation d'un triomphe : c'est par un chemin semé de victoires que Dieu m'appelle à lui; et si, aspiration suprême, après des efforts sans nombre, ma personnalité s'identifie avec la personne divine, elle laissera, à travers les temps et les espaces, sa trace radieuse, son empreinte indélébile, son attestation toujours palpitante, dont je pourrai éternellement jouir en Dieu.

IV

TÉLEUTIQUE.

Toutes les considérations qui précèdent comportent des lumières si vives, que sans la Théognosie, nous comprenons à peine comment l'homme vivrait, puisqu'il lui faudrait se considérer comme le jouet d'une fatalité morne ou d'une persécution à laquelle il essaierait vainement de se soustraire. Mais quand surgit l'idée divine, avec ses réalités supérieures, tout ce qu'il y a de vivace en nous s'épanouit dans une allégresse semblable à celle de la nature aux premiers rayons du soleil. La raison suprême, la puissance infinie, et cette bonté ineffable qui couronne tous les attributs de l'être par excellence me font conclure à l'immortalité du Moi. Je comprends invinciblement que quand Dieu produit un être, c'est pour l'éternité, parce que son œuvre ne peut être finie et qu'il le produit en vue d'un bonheur sans bornes, en vertu de sa suprême bonté. Je n'aurais à la vérité qu'à me laisser faire, si ma personnalité n'était pas distincte, et si je n'avais la conscience de ma liberté et de ma volonté. Mais comme je me sens impérieusement sollicité à agir, il importe que je connaisse mon but, c'est-à-dire les fins vers lesquelles mon activité doit tendre. Cet ordre d'études constituera ce que j'appellerai la *Téleutique*, ou recherche des fins.

1° TÉLEUTIQUE NATURELLE.

Quand j'interroge la nature à ce dernier point de vue, une série de faits hyparctologiques à la manifestation desquels je n'avais accordé qu'une médiocre attention dans l'étude des sciences positives, prend tout à coup une importance capitale, et, sous les apparences du changeant et du variable, atteste une réalité supérieure qui achève de me démontrer la puissance divine.

Les Védas, avons-nous dit, pour dévoiler l'être suprême, imaginent que les Dieux de la nature, après avoir triomphé des mauvais génies, s'attribuaient l'honneur de la victoire, lorsque se manifesta une apparition adorable dont le rayonnement éclipsait leur gloire. Ils voulurent *la* connaître, mais *Elle*, pour les confondre, posant devant eux un brin de paille : Dieu du feu, dit-*Elle*, brûle cela ; Dieu du vent et des tempêtes, enlève cela ! — et ces puissances terribles échouèrent devant un fétu. — Puis, le Dieu de l'espace prétendait la saisir, et *Elle* s'évanouit... Alors une reine, dans toute la splendeur de

sa beauté, leur apprit que cette adorable apparition était celle du Dieu des Dieux. « Cet être suprême, ajoutent les Védas, est appelé l'*Adorable ;* toutes les créatures chérissent celui qui le connait. »

Cet apologue hindou contient la morale de tous les efforts de l'Humanité moderne. Le physicien et le cosmologue, qui semblent posséder le secret des grandes puissances naturelles, n'ont pu réussir à éliminer un fétu; toutes les flammes, tous les éclairs, toutes les foudres de la chimie ont dû renoncer à anéantir une molécule matérielle ; toutes les synthèses de la spéculation dans le vide n'ont abouti qu'à faire évanouir le rayonnement de la synthèse divine. Le grain de poussière, le fragment le plus minime du minéral le plus grossier ont confondu la puissance positive, en lui apprenant qu'ils étaient marqués du signe de Dieu; et les penseurs qui voudront connaître la grandeur suprême n'apprendront son nom qu'en rencontrant le beau incarné, l'idéal esthétique : cette reine des Védas, parée de robes d'or, qui fait naître l'amour.

La matière inorganique s'est donc affirmée comme indestructible. Mais cette persistance morne des corps simples qui semblent confesser leur réalité divine, prend un tout autre caractère quand elle se manifeste dans la vie des corps organisés. Les plantes, les animaux se reproduisent à l'infini, et de leur décomposition même surgissent les aliments de la plante et de l'animal nouveau. La somme de vie dont la nature est dépositaire semble demeurer la même à travers tous les phénomènes changeants, toutes les morts qui la frappent à chaque seconde et dans des milliers d'endroits à la fois. L'être subtil change incessamment de corps, mais je le vois se multiplier sans cesse. Tout ce qui m'entoure m'affirme que si des milliards de corps ont été détruits, les myriades d'êtres qui les animaient n'ont subi aucune atteinte.

La nature n'est donc qu'un livre où le penseur voit rayonner à chaque instant le nom de Dieu, et plus ses phénomènes sont changeants, périssables, transitoires, plus il constate sous leurs manifestations une permanence où l'œuvre divine se dégage avec ses caractères d'éternité et d'infini. En admettant même avec le matérialiste que je sois matière, je suis immortel avec la matière dans mes éléments simples, puisque mes éléments simples sont indestructibles, et que chacun de ces éléments matériels, martyrisés dans les creusets, semble crier à ceux qui cherchent à les détruire : — Néant, tu n'es qu'une absurdité !

3° TÉLEUTIQUE MORALE.

J'ignore si la matière puise en elle-même le sentiment de son être. Ce que

je sais, c'est que ce sentiment est en moi ; c'est ma conscience, dont la réalité est supérieure à toutes les réalités que je puis concevoir.

J'ignore également quelles sont les fins de la nature. Ce que le savant m'apprend, c'est que la terre a traversé déjà des évolutions dont il est facile de reconstituer l'histoire. Mais, que ces évolutions poursuivent ou non les cycles de transformations d'une existence prévue à travers l'éternité, elles n'en donnent pas moins naissance à des êtres conscients comme moi. Tout ce grand travail n'eût-il produit qu'une âme, il me satisferait.

Je suis donc en possession de moi-même. Je sais que mon être est immortel, puisque tous les autres êtres s'affirment immortels à travers leurs manifestations changeantes ; et, puisque je suis prédestiné à persister dans l'éternité des temps, à rayonner dans les infinis de l'espace, je ne puis me soustraire aux conséquences de mes actes, car chacun d'eux apporte une modification quelconque, si légère qu'elle soit, mais une modification incontestable, dans l'éternité et dans l'infini.

Il faut donc que mon activité se conforme à des lois qui ne sont pas contenues dans la seule évolution de mon existence humaine. C'est à ce point de vue que se constituent les connaissances de la téleutique morale ; ces connaissances me conduiront, de progrès en progrès, jusqu'à ma fin, qui est la perfection.

3° TÉLEUTIQUE DIVINE.

Dans la téleutique morale je n'ai envisagé que mes fins propres, mais je dois considérer également les fins de tous les autres êtres. Or, comme d'un côté, ces fins sont également la perfection ; comme de l'autre, il ne peut y avoir plusieurs sortes de perfections, car ce qui est parfait est absolu, je considère l'être essentiellement parfait comme la fin de tous les êtres. Je conclus que *nous* devons agir sans cesse, non plus seuls et par des efforts isolés, mais dans une communion qui nous *relie* à toutes les âmes et qui *relie* toutes les âmes en Dieu. De là, la *Religion* qui m'apparaît comme le seul instrument des fins universelles.

V

MÉTHODE.

Il faut donc comprendre sous le titre général de Théognosie toutes les études qui ont pour but de constater, de justifier et d'épurer nos croyances.

Ces croyances sont antérieures dans l'homme à la raison même, et dominent si impérieusement notre existence que nous y ramenons tout. Il n'y a pas de vérité dont la constatation ne soit précédée d'un acte de foi. Il faut que je croie d'abord qu'une chose est, pour que ma raison vérifie son existence; ou si l'on aime mieux, il faut qu'une chose s'impose à moi pour que j'arrive à la connaître. Il en est de la question de Dieu comme du plus simple théorème mathématique, elle ne prendra consistance dans l'esprit que lorsque l'esprit se sera préalablement incliné devant elle.

C'est par la *Théophanie* ou l'*apparition de Dieu* dans l'immensité, dans l'indéfini, dans cette série illimitée de progrès qui me fait concevoir l'infini, qu'il faut aborder l'étude de la Théognosie ; cet ordre de connaissances me sera complètement étranger tant que je n'aurai aucune révélation préalable de la perfection divine. Or, comme c'est par ma faiblesse même que j'arrive à imaginer la toute-puissance, c'est en dehors du Moi et du Non-moi relatifs que je chercherai ce qui n'est ni en moi, ni relatif à moi-même. Il est vrai que, dans ce premier ensemble d'études, il me faut oublier non-seulement ma propre personnalité, mais aussi le milieu dans lequel elle s'affirme; et je ne puis que me résigner difficilement à ce renoncement, car il me semble une négation de mon être. Le premier sentiment que l'idée de Dieu éveille dans l'âme est un sentiment de crainte et d'épouvante; mais les livres saints l'ont dit depuis longtemps: *Timor Domini, initium sapientiæ*; la crainte du Seigneur est le commencement de la sagesse.

La *Théodicée*, qui est l'étude des *lois divines*, m'apprend alors à me rassurer en me montrant comment le fini et l'imparfait se relient à l'infini et au parfait; je retrouve le Moi et son milieu dans un des rayonnements de l'activité suprême. La recherche de Dieu dans ses œuvres me rend le sentiment de mon activité propre et sollicite incessamment mes efforts, en me révélant les conditions de l'efficacité de mes actes. Puis, quand je me replie sur moi-même, je sens surgir cet amour divin, qui est le premier gage de la félicité suprême, vers laquelle mes désirs m'entraînent sans cesse. Ce que j'appelai, dans mon étroite sagesse, la misère, la souffrance, le mal, se transfigure pour m'apparaître comme l'élément de ma perfection: *In hoc signo vinces*; l'instrument de ton supplice est le gage de ton triomphe.

La *Téleutique*, qui traite des *fins suprêmes*, me révèle alors distinctement que la nature et l'être poursuivent, à travers des transformations mystérieuses, une existence qui n'est pas contenue dans les phénomènes d'une manifestation éphémère, et que l'activité de tout ce qui existe porte le sceau

d'une persistance immortelle dont la seule raison possible est la perfection. On conçoit dès lors comment tous les êtres sont conduits à se confondre dans une communion universelle qui les relie devant Dieu. On comprend la nécessité, ou plutôt la fatalité de ce sentiment religieux qui cherche à sanctifier la nature dans l'homme et l'homme dans l'Humanité, pour que leur activité s'alimente à sa véritable source et se traduise à la façon d'un rayonnement de Dieu sur le globe.

Nous ferons remarquer ici que l'ensemble des connaissances théognosiques se borne à l'exposition des efforts qui procèdent de l'âme dans son aspiration vers Dieu. Quant aux faits par lesquels Dieu descend jusqu'à nous, ils ne constituent plus un ordre de connaissances ou de critique, mais une simple exposition doctrinale devant laquelle le croyant s'incline sans discuter. Ici la raison s'efface et se récuse, car elle sent qu'elle perdrait sa virtualité en sortant des sphères qui lui sont assignées. Seule la foi, plus ou moins ardente que la raison suscite, suivant qu'elle a été plus ou moins épurée par l'étude, la foi persiste comme la plus haute expression de l'âme, et la seule base des rapports sociaux. On constate facilement que dans l'ordre positif, dans l'ordre intellectuel et dans l'ordre moral, l'être tend à s'isoler. Le savant, le penseur, le sage, l'artiste même, vivent à l'écart. Le croyant seul, parce que sa raison chancelle, cherche un appui dans ceux qui croient comme lui. Mais le sentiment social ne commence à prendre consistance dans notre cœur que quand l'amour commence à y déborder et à rejaillir sur nos semblables.

VI

APPLICATIONS.

Il est inutile de les indiquer ici puisque la Théognosie est une vérification de toutes les connaissances qui précèdent, dès l'instant qu'on les examine sous leur véritable lumière, qui est Dieu. Celui qui aura envisagé avec un peu de réflexion et de sincérité ces linéaments de l'étude théognosique reconnaîtra aisément que la nature et l'homme sont un livre fermé pour celui qui n'en possède pas la clef mystérieuse et divine.

VII

HISTOIRE.

L'histoire de la Théognosie prend naissance aux origines mêmes de l'Humanité, et c'est jusqu'à l'Inde antique qu'il faut remonter pour en avoir une notion satisfaisante. On la retrouve ensuite dans les évolutions mystérieuses de la théocratie égyptienne et de la petite république hébraïque. Plus tard, elle nous initie à l'intelligence des mythes de la Grèce, dont Bacon, le premier, a essayé de donner une interprétation. Mais elle prend tout son développement dans l'examen des discussions qui ont donné corps à la grande doctrine du catholicisme, dont le moyen âge semble avoir perdu la clef et ne plus posséder qu'un sentiment instinctif. Dans les temps modernes, elle se rattache d'un côté à l'histoire, souvent mal interprétée, des révolutions religieuses, et de l'autre, aux efforts de tous les penseurs qui ont considéré la raison humaine comme le plus puissant moyen qui nous ait été donné par Dieu d'épurer nos croyances et de nous élever à des conceptions de plus en plus élevées des fins de l'être. Bacon, Pascal, Bossuet, Fénélon, Clarke, Leibnitz, Volf, etc., sont les véritables pères de la Théognosie moderne.

Pour celui qui a suivi, ne fût ce que superficiellement, les phases de ce grand mouvement intellectuel, il est étrange d'entendre dire que l'idée de Dieu s'obscurcit tous les jours ; jamais, au contraire, elle n'a rayonné d'un éclat plus pur dans l'intelligence humaine.

VIII

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Les questions théognosiques sont d'autant plus délicates à traiter que chacune d'elles trouve un retentissement dans les esprits. Tel le tonnerre, quand il retentit dans les montagnes, s'y répercute d'échos en échos en grondements infinis, comme si chaque géant de granit répétait à son tour la grande voix du ciel. Ici, en effet, nous sommes dans les cimes du monde intellectuel, et la moindre évocation de l'idée de Dieu fait surgir d'indéfinissables clameurs dans chaque assise de la hiérarchie des êtres.

Il importe donc de déterminer ce que nous entendons par théognosie : c'est par cette détermination que nous apprendrons à discerner les différents ordres de sentiments que l'évocation du nom de l'Être suprême provoque dans les intelligences. La théognosie a pour but la recherche des fins de l'homme, et c'est par là qu'elle relève de la raison humaine. Il est vraiment surprenant d'entendre affirmer par certains croyants que le raisonnement et l'expérience n'ont rien à voir dans de telles questions, lorsque les faits, l'histoire et tous les efforts mêmes de ceux qui ont constitué les doctrines religieuses protestent énergiquement contre leur affirmation. Il faut reléguer ces partisans fougueux de l'intolérance et du fanatisme au nombre des enfants terribles de la foi ; il ne sera pas difficile de trouver, dans toutes les doctrines, les dispositifs des jugements qui les condamnent. L'idée de Dieu ne s'impose pas par la violence, mais par l'évidence ; or l'évidence relève de la raison. L'athée ne me fait pas horreur, il éveille en moi un profond sentiment de commisération : c'est un aveugle qui nie le jour, et son infirmité m'apparaît d'autant plus cruelle que la gloire de Dieu m'apparaît plus rayonnante.

La charité, l'amour ardent que la foi m'inspire, la joie profonde qu'éveille en moi le spectacle des splendeurs suprêmes, joie que je voudrais faire partager à tout ce qui m'entoure, ne sauraient justifier la moindre violence de ma part, et si je me reconnais impuissant à donner à mon semblable le sens qu'il n'a pas, je ne prétendrai, par aucun moyen, lui faire confesser qu'il le possède, tant qu'une illumination d'en haut ne lui révèlera pas le sentiment de cette possession. On a souvent condamné la doctrine catholique de la Grâce, mais c'est cette doctrine même qui régit les rapports du croyant et de l'incrédule, et y introduit une sorte d'harmonie.

Que l'athée, s'il y a réellement des athées, vive donc au milieu des ténèbres intellectuelles, puisqu'il appartient à Dieu seul de dessiller les yeux de son âme. Nous qui avons le bonheur de voir, tendons-lui une main secourable lorsqu'il s'égare dans les régions de la foi. Ne le rejetons pas de notre milieu, mais assistons-le dans sa marche. Plus notre sollicitude pour lui sera grande, plus tôt il arrivera à reconnaître dans la charité humaine le reflet de l'amour divin. Evitons surtout que cette charité ait quelque chose de dédaigneux, et ménageons toujours dans sa personne cette infirmité dans laquelle nous avons été plus ou moins plongés nous-mêmes avant de nous être élevés jusqu'à la contemplation des lumières divines. L'athée n'est pas plus dangereux dans le monde moral que l'enfant dans le monde matériel. Sa puissance ne s'étend pas au delà de son égoïsme, et son égoïsme se contentera de hochets.

Le fanatisme et l'athéisme sont les deux pôles du monde divin. — A peine la vie se manifeste t-elle autour de ces points glaciaires sur lesquels éclatent parfois en crépitements sinistres des lueurs éphémères et soudaines analogues à celles quo la cosmologie appelle des aurores boréales. Tout se cristallise à mesure qu'on approche de ces zônes où la mort semble avoir établi son empire. La vie et son activité rayonnent d'autant plus énergiques qu'elles sont plus éloignées de ces deux termes extrêmes.

Comme si la terre elle-même, dans son état actuel, nous présentait l'image du monde moral, nous nous étonnerons de ne pas voir l'intelligence des masses s'emparer de son véritable domaine et s'affirmer dans les régions équatoriales de la foi. Nous vivons timides et sans cesse défaillants dans des latitudes, hélas trop tempérées, où les religions ne sollicitent notre âme que par des moyens dont l'ingéniosité semble accuser seule l'intervention de Dieu. De là cette tiédeur dans nos croyances, cette hésitation constante à nous livrer aux ravissements de l'amour divin. De toutes parts surgissent des scrupules honteux : le croyant redoute les lumières trop crues de la raison, l'incrédule les flammes trop ardentes de la foi ; des nuages s'interposent à chaque instant entre Dieu et l'Humanité. Le professeur défend de croire sans chercher à justifier notre croyance ; car, dit-il, vous croirez plus facilement à ce qui est faux qu'à ce qui est vrai, et vous serez le jouet de toutes les erreurs et de toutes les impostures. D'un autre côté, le prêtre nous apprend qu'il est un ordre de phénomènes où tout se dérobe à l'analyse et qu'il faut accepter sans discussions. Le professeur a raison, le prêtre a raison comme le professeur : tous deux sont nos pères spirituels, et nous ne savons comment concilier leurs préceptes contradictoires. La Théognosie seule peut mettre fin à cet antagonisme, parce qu'elle contient le dernier mot de la science, de même qu'elle établit toutes les justifications de la foi.

Elle recueille ces étincelles que la science fait jaillir de l'étude de la nature et de l'homme, elle les vivifie au souffle de l'amour ; elle fait resplendir leur lumière en épurant les aspirations de l'intelligence ; elle alimente leur flamme des mystères qu'un amour ineffable dépose comme autant de germes miraculeux dans les entrailles de la conscience. Elle nous apprend que la science, quand elle prétend anéantir la foi, s'anéantit elle-même ; et que la foi, quand elle prétend supprimer la science, creuse un abîme entre Dieu et l'humanité. Elle investit le savant d'un sacerdoce et le prêtre d'un professorat. Exclusives, la science et la foi concourent à la même impiété — ravir à la créature l'intelligence du créateur — au plus grand crime que l'homme puisse commettre ici-bas, à celui qui trouble le plus profondément la cons-

cience humaine, à celui dont la blessure atteint l'essence même de l'être : cette charité qui est le ressort de tous les actes héroïques de l'homme, cette lumière intérieure qui est le reflet de l'activité suprême et qui est appelée à chercher son propre foyer au point précis où viennent coïncider les rayons divins. En termes plus humbles, la Théognosie, en nous révélant que le dernier mot de la nature et de l'être est l'action, nous engage à développer sans cesse notre activité physique, intellectuelle et morale. Par elle le travail et l'étude sont saints, par elle la souffrance devient vénérable et sacrée. D'autre part, en nous montrant que nos fins sont dans la perfection divine, elle nous apporte la force qui entretient cette activité. C'est par elle seule que l'homme peut entrer dans la plénitude de ses aspirations, réaliser l'efficacité de ses actes, se retremper sans cesse dans la perspective de ses fins. Elle n'est en elle-même ni la science ni la foi, elle est ce lien mystérieux qui nous rattache à Dieu, lien que l'intolérance et le scepticisme chercheront toujours à briser, et que l'humanité renouera sans cesse à travers les temps et les espaces, tant qu'il y aura des aspirations généreuses qui monteront de la terre, et des rayonnements d'amour qui descendront des cieux.

LITTÉRATURE.

LA PAROLE, L'ÉCRITURE, LES LANGUES.

I

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

La Théognosie a été le point culminant de l'étude. Nous avons gravi péniblement la montée qui nous conduisait de la nature à l'âme et de l'âme à Dieu. Nous allons redescendre le versant, qui nous engagera dans les relations sociales, au milieu des tumultes de l'action humaine.

Jusqu'ici, dans l'ordre même des sciences positives, notre activité a été en quelque sorte éducatrice. Il s'agissait, en effet, de préparer l'athlète à l'action et à la lutte.

Maintenant nous allons l'investir de ses armes, qui sont le verbe, la tradition, la connaissance des milieux sociaux et des rôles qu'il peut y jouer.

Enfin, quand nous aurons pris part au grand mouvement humain, nous résumerons nos études, nos spéculations et nos efforts dans l'enseignement des générations qui sont appelées à nous succéder.

De la constatation de cette paternité suprême, qui est Dieu, — à cette fraternité humaine qui formule, dans les bégaiements de la littérature, dans les enseignements si contradictoires de l'histoire, dans les conflits des intérêts et des ambitions sociales, le gouvernement de l'humanité, — il y a une grande chute, mais, en compensation, des enseignements féconds et des connaissances supérieures que l'homme, dans son isolement, ne pourrait jamais acquérir.

On conçoit facilement que, dans une existence patriarcale, et à travers des

temps plus ou moins longs, l'esprit parvienne à s'élever de lui-même par de longs et pénibles efforts, jusqu'aux sciences de la nature et de l'homme. Il l'a fait sans doute à l'origine des sociétés; mais comme la vie humaine est trop courte pour qu'un tel développement puisse être contenu dans une seule existence, il a fallu nécessairement qu'il y eût, de père en fils, une transmission d'enseignements de plus en plus élevés.

Cette transmission s'est opérée à l'aide du langage.

Considéré à ce point de vue, le langage apparaît avec un caractère si merveilleux, qu'un grand nombre de philosophes ont cru pouvoir affirmer qu'il venait directement de Dieu : ils ont raison assurément, s'ils entendent parler de ce retentissement mystérieux de l'activité divine dans l'activité humaine, auquel les livres saints ont donné le nom de Verbe ; ils ont tort, s'ils entendent parler de l'effort qui a constitué les langues, et qui est un effort purement humain. Toutes les langues sont en elles-mêmes imparfaites et insuffisantes, comme ce qui procède de l'homme relatif et borné. Elles affectent chacune des caractères différents, suivant les milieux naturels, les activités et les aspirations des sociétés où elles ont pris naissance. C'est ce qu'il appartiendra à la philologie de nous démontrer.

II

LOGIE.

1° DU LANGAGE NATUREL.

Il est facile de concevoir que les premières expressions orales de l'homme primitif, comme celles de l'enfant, sont purement imitatives et qu'elles ont pour but de reproduire, d'une façon plus ou moins imparfaite, tous les phénomènes acoustiques de la nature. Le langage imitatif persiste au fond de toutes les langues; on le retrouve chez les peuples sauvages à son plus haut point de développement. Là, tous les bruits, tous les cris, tous les grondements, tous les gazouillements ont leur interprétation distincte. A ces résonnements grossiers et primitifs de la nature viennent s'ajouter ceux qui ont pour but de reproduire les phénomènes de la sensation; mais, dans cette dernière catégorie, il faut exprimer une infinité de faits muets, comme ceux du goût, de l'odorat, de la vue, etc., alors l'homme se sert d'expressions conventionnelles qui n'ont pas leur type dans la nature.

Cette dernière constatation suffirait à expliquer pourquoi le langage imi-

latif n'est pas un langage universel, puisqu'une grande quantité d'expressions n'ont pas de traduction sonore dans l'ordre physique; nous ferons remarquer, en outre, que les milieux naturels diffèrent eux-mêmes notablement les uns des autres. Il suffit de passer d'une vallée dans une plaine pour que non-seulement les cris des animaux, mais leur retentissement, et celui même des bruits cosmologiques soient complètement dénaturés. Ajoutons enfin que chaque homme donne un caractère particulier et en quelque sorte personnel à une même mélopée. Il résulte évidemment de tout ceci qu'un langage quelconque, si rapproché qu'il soit de la nature, demeurera inintelligible tant qu'on ignorera les conventions sur lesquelles il repose.

Toutes les langues sont naturelles quand on les considère dans leur origine parlée. Elles sont vagues comme tout ce qui se rattache, de près ou de loin, à la musique. Elles commencent toutes par la poésie. Les premières traditions orales ont une mesure et un rhythme bien définis, et il ne serait pas difficile d'y retrouver des mélodies, pour la plupart étranges mais cependant caractérisées

Ce qu'il importe de constater dans le langage naturel proprement dit, c'est qu'il procède par phrases et non par mots. Les langues américaines en sont le témoignage. Mais, sans aller si loin, il suffit d'étudier chez les enfants les premiers bégaiements de la parole; chez eux tout se tient et le langage est, selon l'expression heureuse des philologues, *agglutiné;* plus tard il se résout en ses éléments et prend le caractère *monosyllabique;* mais il ne devient parfait qu'à l'état de *flexion*.

2° DU LANGAGE RAISONNÉ.

Le besoin de précision introduit dans les expressions orales des distinctions de *sortes*, de *nombres*, de *genres* et de *cas* :

1° Il faut distinguer la chose des qualités qu'on lui attribue, de l'être et de l'acte qui la produisent, de l'état dans lequel elle persiste. Aussi retrouvons-nous dans toutes les langues cinq grandes sortes d'expressions : le nom de la chose ou *substantif;* — la qualité qui la caractérise et qui est comme le signe qu'on y ajoute : *adjectif;* — l'être qui la produit et qui apparaît comme auteur : *pronom;* — l'action elle-même, soit dans le présent, soit dans le passé, soit dans le futur : *verbe;* — la qualité de l'action dans laquelle la chose persiste et qui est une qualité du verbe : *adverbe*.

Si nous ajoutons à ces sortes de mots, toujours variables, celles qui ont pour but de relier les expressions entre elles, *conjonctions*, qui déterminent

leurs rapports, *prépositions*, et qui les entremêlent d'exclamations soudaines, *interjections*, nous obtiendrons les différentes espèces de mots qui constituent toutes les langues.

2° Les nombres ont pour but d'exprimer si la chose, sa qualité, la personne et l'acte qui la produisent sont uniques ou multiples. Dans le premier cas le nombre est dit *singulier*, dans le second *pluriel*. Il y a des langues où l'on exprime d'autres conditions du nombre; nous nous contenterons de citer le grec, qui exprime la dualité ou *duel*.

3° Les genres définissent en quelque sorte le sexe de l'expression : ce sont le *masculin* et le *féminin*, auxquels il faut ajouter le *neutre*, qui n'est ni masculin ni féminin.

4° Les cas sont exprimés en français par l'article; dans la plupart des autres langues, par des inflexions régulières auxquelles on a donné le nom de *déclinaisons*. On peut considérer la déclinaison comme une incorporation des articles dans les mots.

La manière de combiner les différentes expressions du langage constitue l'étude de la syntaxe (du grec *syntaxis*, disposition d'ensemble). La syntaxe varie suivant les langues, aussi ne pouvons-nous que la mentionner ici.

Quand on étudie les différents langages usités jusqu'à nos jours, on s'étonne de les trouver vagues, équivoques et mal définis. Un même mot sert à exprimer plusieurs idées différentes, suivant qu'on le transporte dans les ordres physique, noologique, psychologique, esthétique et théognosique; c'est ainsi que le mot *action* se présente tantôt comme un résultat de mouvement, tantôt comme un résultat de la pensée, de la volonté, du sentiment, ou, dans son sens absolu, comme l'expression même de l'existence de Dieu. Nous l'avons nous-même employé avec toutes ces significations diverses, parce que les milieux dans lesquels il a été successivement introduit suffisaient à le définir. Mais quand il est prononcé devant l'ignorant, sans préparation préalable, il exige une définition particulière, suivant l'acception qu'on lui attribue. Faute de définition, on voit se perpétuer des discussions qui n'auraient aucune raison d'être si l'idée était précise. Chaque science a donc constitué un vocabulaire qui lui est propre, mais qui surcharge les langues vulgaires d'expressions techniques dont le nombre, l'étrangeté, et l'étude qu'exige leur compréhension, épouvantent celui qui veut s'instruire. Les moyens à l'aide desquels on pourrait, à l'aide de sons

vocaux, exprimer toutes les idées constituent un ordre d'études spécial qui semble absurde au premier abord, mais dont il faut néanmoins se préoccuper.

Nous chercherons à ébaucher cet ensemble de connaissances dans notre Exposition. Il constituera la traduction acoustique des catégories introduites dans l'Idéologie.

3° DE L'ÉLOQUENCE.

Lorsque l'homme s'est exercé à énoncer toutes les idées, toutes leurs nuances, tous leurs modes; lorsqu'il a appris à en traduire les combinaisons, il a acquis l'instrument du langage; il peut, à son gré, faire comprendre à ses semblables les sentiments, les volontés, les désirs qui sont les mobiles de son activité. Cependant il n'est pas encore parvenu aux fins supérieures de l'expression orale qu'il doit chercher dans l'Esthésie. Il aura beau se montrer précis, habile, ingénieux, passionné, il ne produira pas sur ses auditeurs ces effets puissants, profonds et durables qu'engendre l'éloquence, et qui demandent une étude particulière. L'Esthésiologie introduite dans la parole donne naissance à un art particulier dont la théorie s'appelle *la Rhétorique*, et dont les effets, qu'aucune technie ne peut mécaniquement produire, ont pour but de relier les esprits dans une communion supérieure, au moyen de ces chaînes d'or qui, selon l'expression des anciens, rattachaient les hommes à la divinité. L'éloquence, en effet, est la plus puissante manifestation de l'âme, parce qu'elle en est le mouvement même et « un mouvement continu », selon l'expression de Cicéron.

Nous n'accepterons qu'avec réserve les divisions introduites dans l'éloquence. On peut, il est vrai, l'analyser sous un quadruple point de vue : le noologique, qui a pour but la vérité, la logique et la parfaite unité du discours; — le psychologique, qui y introduit la passion et le pathétique; — l'esthésiologique, qui le revêt de toutes les beautés de l'expression artistique; — le théognosique, qui réveille dans l'auditeur ce sens divin dont il tient ses mobiles intimes et où il voit la fin suprême de ses aspirations. Mais ces distinctions ne créent point des genres indépendants les uns des autres; car le but de l'éloquence étant la persuasion de l'auditeur, il faut que celui-ci soit tout ensemble convaincu, ému, séduit et emporté par une de ces forces surnaturelles qui procèdent de l'action divine. C'est donc à la fois à la raison, à l'âme, à l'esthésie et à ce Dieu mystérieux qui agit en nous, que l'orateur, même dans les circonstances les plus humbles, est tenu de s'adresser.

III

GRAPHIE.

Si la parole a pour objet de traduire la pensée à l'aide de sons vocaux, elle ne s'adresse qu'à un seul de nos sens, l'ouïe ; elle n'agit pas au delà d'un milieu et d'un temps bornés ; elle ne peut, par conséquent, transmettre le discours, dans son intégrité, à tous les hommes, dans tous les espaces et à travers tous les temps.

L'écriture, au contraire, est une parole qui s'adresse à la vue par des signes ; elle confirme le discours en le faisant vérifier par un sens nouveau ; elle permet de le transmettre à l'Humanité entière, non-seulement dans le présent, mais dans l'avenir : c'est la fée qui apporte à la pensée humaine le don d'immortalité.

1° DES SIGNES SCRIPTURAUX.

La plupart des figures employées jusqu'à ce jour dans l'Humanité, pour rendre la pensée visible, sont distribuées en deux grandes catégories : la *phonétique* et l'*idéographique*, auxquelles nous ajouterons une troisième, à peu près inconnue, et que nous appellerons la *typtique*.

L'écriture phonétique n'est pas autre chose qu'une notation, à l'aide de signes conventionnels qu'on appelle *lettres*, des différentes expressions de la voix humaine. Elle est en usage chez tous les peuples de l'Occident ; elle permet de reproduire les sons tels qu'ils ont été émis par une parole primitive dans leur ordre rigoureux et avec toutes leurs nuances. Ici l'écrivain comme le lecteur sont censés parler, le premier avant d'écrire, le second avant de comprendre. La vue ne joue qu'un rôle accessoire.

L'écriture idéographique, en usage dans l'Orient, ne considère pas la vue comme un canal intermédiaire, mais comme le canal principal de la transmission des idées et de leurs combinaisons. Elle a pour but de représenter les objets matériels à l'aide de quelques linéaments simples ; mais lorsqu'il s'agit de les nuancer, d'exprimer l'action et ses modes variables, elle est généralement impuissante. A plus forte raison doit-elle renoncer à traduire les phénomènes qui tombent sous d'autres sens que la vue dans l'ordre naturel. De même elle ne peut exprimer la pensée dans son essence qu'à l'aide de conventions plus ou moins compliquées et toujours matérielles. C'est

ainsi que la force étant représentée par un lion, la puissance par un éléphant, la soudaineté par un aigle, l'homme est toujours porté à confondre la pensée avec son symbole, et à diviniser les êtres de la nature. De là le fétichisme constaté chez tous les peuples qui ont une écriture idéographique; et, à côté de ce fétichisme vulgaire, des tendances au mysticisme chez les penseurs, car cédant à la réaction, ceux-ci ne voient plus la nature en elle-même, et réduisent chaque phénomène à l'état d'idée pure.

D'un côté, il faut souvent faire, avec la notation phonétique, beaucoup de bruit à l'oreille des Occidentaux, avant de leur faire pénétrer une pensée dans l'esprit; de l'autre, avec la figuration idéographique, l'intelligence des Orientaux ne se dégage guère de la matière que pour tomber dans un idéalisme qui se spiritualise jusqu'à l'insaisissable. L'écriture qui parlerait aux yeux et à l'oreille, et ferait saisir du premier coup l'idée au sens intime, est encore un problème irrésolu. La précision est une des conditions essentielles de la solution que les algébristes poursuivent dans les formules, non-seulement des mathématiques pures, mais des mathématiques appliquées à tous les ordres de connaissances. Il y a, en formation latente, dans les développements de l'esprit humain, une idéographie abstraite que nous appellerons *typique*, et dont nous essaierons, mais imparfaitement, de donner une notion.

2° ORTHOGRAPHIE.

En attendant une notation satisfaisante, non plus du son et de la forme, mais de l'idée elle-même, nous devons conserver avec soin l'orthographe des mots qui complique l'écriture d'éléments étrangers, et que l'ignorant considère comme superflus, mais qui conserve à chacun d'eux son type originel et la pensée qui a présidé à sa formation. Celui qui pénètre dans l'intelligence de l'orthographe pénètre en même temps dans l'intelligence des différentes langues qui ont concouru à la formation de la sienne.

Il faut donc ranger dans l'*orthographie*, ou simplement dans l'*orthographe* conçue dans son acception la plus complète, tout ce qui a trait à l'étymologie, aux nuances des synonymes et aux différentes recherches des grammairiens, qui jettent de si vives lumières sur la constitution de chaque langue.

3° BELLES-LETTRES.

Nous comprendrons sous le titre de belles-lettres une sorte de terpnographie littéraire, ou d'analyse des chefs-d'œuvre de la littérature, qui se

divisera en trois grands ensembles : la Poétique, la Critique et le Romanesque ; ce dernier est un intermédiaire entre la Poésie, qui est toujours synthétique en elle-même, et la Critique, qui est toujours analytique.

Cette étude, accomplie dans l'ordre chronologique, constituera les rudiments de l'Histoire littéraire.

IV

LINGUISTIQUE.

L'exposé, tout sommaire qu'il soit, des faits qui précèdent laisse entrevoir, à travers la complexité des études et des préoccupations littéraires, un *desideratum* profond ; celui d'une langue universelle qui donnerait à l'intelligence de toutes les sociétés la même expression, et établirait ainsi entre tous les esprits un lien humanitaire. La constitution d'une langue universelle a préoccupé et préoccupe tous les penseurs ; de là les travaux linguistiques qui, malgré leur complexité et leur aridité, empruntent à leurs aspirations une importance capitale. L'étude des belles-lettres dans chaque société nous apprend que les chefs-d'œuvre appartiennent à toutes les langues ; mais les traductions ne peuvent que nous donner une jouissance imparfaite des beautés de la littérature étrangère. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer deux ou trois traductions d'un même chef-d'œuvre étranger : chacune d'elles a la prétention d'être exacte, et pourtant elles se contredisent. Si l'auteur même est vivant et possède la connaissance de la langue dans laquelle il a été traduit, il se plaint presque toujours d'avoir été mal interprété. « *Traduttore, traditore*, dit le proverbe italien ; le traducteur est un traître. » Aussi le lecteur cherche-t il d'abord à posséder une notion, même superficielle, de la langue dont il étudie le chef-d'œuvre ; mais, faute de pouvoir pénétrer le mécanisme de cette langue, car il sait qu'il ne possède même pas complètement la sienne, il cherche à en pénétrer le caractère. Dans le premier cas, il demande aux érudits de lui enseigner les rudiments d'une grammaire universelle ; dans le second, il compulse toutes les monographies qui peuvent lui révéler le génie de chaque société.

1° GLOSSOLOGIE. — GRAMMAIRE GÉNÉRALE.

La constitution d'une grammaire universelle repose sur la comparaison des vocabulaires et des grammaires des diverses langues, comparaison qui fera l'objet des connaissances *Lexiologiques*, du nom qu'Ampère lui-même

leur a donné. La lexiologie étend l'ensemble des études que nous avons comprises sous le titre d'*Orthographie*, dans le précédent chapitre, à l'examen de toutes les langues. Elle ne se contente donc pas de rechercher l'étymologie, les synonymes, les significations originelles de chaque mot dans une langue, mais elle poursuit cette recherche dans tous les idiômes, en constatant les changements de signification qu'éprouvent certains mots en passant d'une société dans une autre.

« Quand on a acquis les notions précédentes sur plusieurs langues, on peut les comparer entre elles pour établir leurs rapports et en déduire les lois générales du langage ou la *Grammaire générale*. Cette comparaison nous fait aussi connaître les lois particulières d'après lesquelles certains sons éprouvent des modifications déterminées dans tous les mots qu'une civilisation emprunte à une autre : elle nous conduit à la connaissance de tous les faits relatifs à la filiation et à la classification naturelle des langues. On connaît les beaux travaux des philologues de toutes les nations sur ce sujet.

2° BIBLIOLOGIE.

La connaissance du génie d'un peuple repose sur la connaissance même des œuvres auxquelles ce génie a donné naissance. Il importe, non-seulement d'en dresser le catalogue et d'en faire le compte rendu, mais d'expliquer les étrangetés et d'éclairer les obscurités par des gloses et des commentaires de tout genre. Chaque savant en particulier ne peut se livrer qu'à une exploration partielle de cet ensemble immense de travaux; cependant, si peu qu'il fasse, il laisse une trace durable. Ce travail est surtout nécessaire à l'écrivain, parce qu'il lui fournit un aliment inépuisable On comprend qu'il ne s'agit plus ici d'une simple exposition de chefs-d'œuvre littéraires, mais d'une étude approfondie des différentes productions immédiates de l'intelligence.

3° PHILOSOPHIE DES LANGUES.

Les recherches de la glossologie « préparent, dit Ampère, la solution des questions suivantes qu'on peut faire relativement aux langues : Quelle est leur origine? Ont-elle été inventées par les hommes, et, si elles l'ont été, comment ont-elles pu l'être? Y a-t-il une seule langue primitive dont toutes les autres sont dérivées, ou y en a-t-il plusieurs essentiellement différentes? Comment les langues sont-elles sorties les unes des autres?... »

Enfin, questions finales, est-il permis d'espérer qu'un jour l'Humanité sera dotée d'une langue unique? Quelles seraient les conditions de cette

langue ? Quels en sont les principaux problèmes ? Quels travaux ont concouru jusqu'à présent à les résoudre? — Bien que la plupart des philosophes nient la réalisation de cette entreprise immense, la constitution d'une langue universelle a fait naître trop de tentatives extraordinaires et d'efforts prodigieux, pour qu'il soit permis de les passer sous silence dans une exposition des connaissances humaines.

Nous dirons plus : la langue universelle existe, mais ce n'est point dans l'ordre sensitif ni dans les expressions actuelles de l'humanité. Elle existe dans une réalité profonde et suprême, car elle est cet intermédiaire merveilleux par lequel l'enfant arrive à comprendre la parole de sa famille, et l'homme le langage des sociétés étrangères. Elle existe, puisqu'elle a permis à la littérature moderne de restaurer, sans truchements, les littératures qui ne sont plus, jusque dans leurs nuances les plus délicates. Elle existe avant tous les hommes, car les hommes n'auraient jamais, sans elle, bégayé le Verbe divin dont les langues ne sont que les idiômes enfantins et grossiers.

A ce point de vue, le Verbe est aussi nécessaire à la manifestation de la pensée humaine que la nature à la manifestation de l'homme. En nous dégagant de la technie du langage pour en étudier la théorie, nous reconnaitrons que la parole est la seule manifestation sensible de tout ce qui ne relève pas de l'ordre sensitif; qu'elle est, selon l'expression de M. de Bonald : « cette lumière du monde moral qui éclaire tout homme venant en ce monde, lien de la société, vie des intelligences, dépôt de toutes les vérités... Tous les jours, elle tire l'esprit de l'homme du néant, comme aux premiers jours du monde elle tira l'Univers du chaos. Elle est le plus profond mystère de notre être ; et, loin d'avoir pu l'inventer, l'homme ne peut même pas la comprendre. »

V

MÉTHODE.

Le langage doit donc être considéré dans sa triple expression : 1° comme un écho des bruits de la nature ; 2° comme une traduction de l'âme ; 3° comme un retentissement de l'activité divine.

Traduit par la voix humaine dans l'ensemble des expressions parlées, LOGIE, le langage sera tour à tour *naturel*, c'est à dire imitatif; *raisonné* ou

intelligent, c'est à dire destiné à exprimer les vérités qui sont perçues par l'esprit et les différents modes d'activité de l'âme ; *éloquent*, c'est à dire inspiré par une activité qui n'est plus dans l'homme, puisqu'elle le jette toujours hors de lui-même et le fait agir au delà des limites assignées à son individualité. Il apparaît alors comme une révélation partielle, temporaire et locale de la vie unique, éternelle et infinie qui régit tout ; révélation d'autant plus nette que la lumière est plus vive, et qu'elle fait converger en un même point un plus grand nombre de rayons du soleil divin.

Etudié dans son expression visuelle, GRAPHIE, le langage, traduit par l'écriture, prendra la forme *idéographique* ou la forme *phonétique*, dont la science semble poursuivre actuellement la réunion dans la *typtique*. La grammaire écrite, *orthographie*, nous apprendra quelles sont les lois qui président à la combinaison des signes scripturaux, à la composition des mots, à l'ordre des phrases et à la méthode qui doit présider à leur agencement. Ici l'écrivain et l'orateur devront chercher dans l'étude de la *Littérature proprement dite* les ressources dont l'Humanité a doté leur art, et qui leur permettent d'accuser leur pensée dans toute sa plénitude, avec précision et avec grâce.

Enfin, la LINGUISTIQUE nous apprend que toutes les langues ont des filiations entrecroisées comme les mailles d'une tapisserie. Il est peut-être utile de leur chercher une origine commune qui est la pensée même, en dehors de son expression parlée ou écrite, dans une manifestation qui s'adresse au sens intime de tous les hommes et qui procède d'une activité supérieure dont la Théognosie nous a révélé l'existence. Les essais de *grammaire générale*, une *bibliogie* universelle, nous initieront à la *philosophie des langues*.

VI

APPLICATIONS.

Les mathématiques ont commencé à ébaucher, avec le langage algébrique, une écriture dont la précision ne laisse que peu de choses à désirer et que nous avons appelée Typtique. Les signes que l'algèbre emploie seront, sans doute, l'objet de modifications nombreuses, surtout dans l'application des formules abstraites à l'ordre concret. Dans ce langage les signes n'ont pas encore de caractères bien distincts ; mais la méthode analytique qui préside

à leur agencement et à leur différentes fonctions prépare une orthographie supérieure dans laquelle chaque formule constitue un mot auquel il devient impossible de rien changer.

La physique, la cosmologie et les sciences naturelles nous font connaître toutes les expressions qui s'adressent soit à l'oreille, soit aux yeux, soit même au *tact*. Les beaux travaux des savants qui ont ébauché un langage spécial pour les aveugles et les sourds-muets viendront justifier cette dernière affirmation qui pourrait, au premier abord, paraître singulière.

La technologie et l'anthropologie nous fournissent les instruments industriels et organiques de l'expression. La noologie, en dressant les différentes catégories des idées, en établissant les lois qui président à leur combinaison et la méthode qui les gouverne ; la psychologie, en nous initiant aux différents mobiles de l'âme ; l'esthésiologie, en épurant nos goûts ; la théognosie, en nous rapprochant sans cesse de cette expression supérieure de la pensée : le Verbe, qui n'a en lui-même ni son ni figure, mais qui est l'idée en action ; tous ces ensembles de connaissances concourent avec les sciences précédentes, jusque dans leurs moindres détails, à la constitution d'un langage universel et complet.

VII

HISTOIRE.

Chacune des grandes divisions de la littérature a son histoire spéciale qu'il est nécessaire de fondre ensuite dans un ensemble supérieur. Ici ce ne sont pas les matériaux qui manquent, c'est leur abondance même qui épouvante. La possibilité de réunir, d'examiner, de coordonner tant d'œuvres diverses et d'en constituer une histoire satisfaisante, semble au dessus des forces humaines. Il est évident que nous sommes loin de la réalisation d'un pareil problème ; mais combien d'autres problèmes semblables l'effort humain n'a-t-il pas déjà résolus ? Quand on se contenterait, pour le moment, d'indiquer et de résumer tous les travaux entrepris par les linguistes et les philosophes, on obtiendrait déjà une histoire générale grosse d'enseignements.

HISTOIRE

LÉGENDES. — HÉROS. — ÉVOLUTIONS SOCIALES.

I

GÉNÉRALITÉS.

L'Histoire est l'exposition des faits collectifs de l'activité humaine. C'est par là qu'elle se distingue des sciences qui procèdent de l'activité dans son exercice individuel. Elle se distingue également de la Sociologie et des sciences qui en résultent, en ce qu'elle n'étudie pas les faits sociaux dans leur essence, mais dans leurs modes. Elle est une exposition des faits, une étude de leur filiation, une critique de leurs rapports; mais les conditions persistantes, les causes immanentes et profondes de toute activité sociale, qui n'ont en elles-mêmes rien de changeant, échappent à ses investigations.

Les Études historiques se divisent en trois grandes séries :

1° Celles qui ont pour but la recherche des origines : *Archéognosie.*

2° Celles qui retracent la vie des grands hommes en tant qu'incarnations de groupes : *Biographie sociale.*

3° Celles qui poursuivent les évolutions de l'Humanité dans ses ensembles : *Histoire* (dans le sens le plus complet du mot).

II

ARCHÉOGNOSIE.

La recherche des origines donne lieu à trois ordres d'études bien distincts :

L'étude des monuments, et par monuments il faut entendre ici toutes les traces matérielles laissées par les sociétés, selon l'étymologie du mot *monimentum :* avertissement à l'esprit.

L'examen des traditions, mythes, légendes.

La critique archéognosique.

1° ARCHÉOLOGIE.

Les voyageurs, en parcourant les différents points du globe, sont appelés chaque jour à découvrir les débris des civilisations disparues. Les monuments, édifices, vases, médailles, objets de toute nature, avec l'indication de leur provenance, qui constituent une géographie du passé, sont le matériel de l'archéologie, et il importe, au préalable, d'en dresser l'inventaire.

Les monuments sollicitent d'abord notre attention par leur étrangeté. Au commencement des études archéologiques, les traces matérielles de l'antiquité étaient considérées comme de simples curiosités. Les artistes et les industriels y firent un choix de modèles. Plus tard, les savants, devenus antiquaires, recueillirent pieusement les objets de choix comme les objets de rebut, et en constituèrent des collections. Bientôt chaque objet, indépendamment de sa valeur intrinsèque, apporta le souvenir d'un temps, d'un lieu et d'un fait déterminés, et la paléologie chercha à extraire de chaque monument la somme de vie que nos ancêtres y avaient enfermée.

2° MYTHOLOGIE.

L'Histoire s'éclaira d'un nouveau jour. En compulsant la tradition, on rendit à chaque société les monuments qui lui appartenaient. Restaient les débris les plus anciens sur lesquels l'écriture ne venait jeter aucune lumière, parce que les traditions primitives de tous les peuples reposent sur des légendes. On recueillit donc ces légendes comme on avait fait des traces matérielles, et on constitua la mythologie, qui comprend les récits fabuleux de tout genre qu'on trouve à l'origine des sociétés.

3° CRITIQUE ARCHÉOGNOSIQUE.

De nos jours, les archéologues, remontant le cours des âges et recherchant les origines derrière la filiation des faits, ont reconnu que les mythes ne sont que l'expression d'efforts sociaux incarnés dans des individualités étranges, absurdes à première vue, mais dont les actes fantastiques deviennent explicables quand on les attribue à des collections d'hommes, à des

sociétés et même à des civilisations entières. Pour faire tomber la morale sociale sous l'entendement des générations, la tradition personnifia des peuples dans un seul homme. Ici, c'est Hercule ouvrant d'un coup de massue les barrières qui séparent la Méditerranée de l'Océan ; là, c'est Isis, la civilisation égyptienne, qui voit son époux traîtreusement assassiné par le génie du mal, retrouve son cadavre en Phénicie, et le voit renaître à Thèbes dans son fils Horus. Plus loin, et dans l'Écriture Sainte même, ce sont les patriarches qui vivent plusieurs siècles ; c'est Noé, échappant aux convulsions sociales et présidant, sous les révélations de l'esprit divin, à la création d'une nouvelle nature et d'une nouvelle Humanité. Il appartient, en effet, à l'homme de personnifier un peuple entier dans une de ses plus brillantes individualités. Sans remonter si loin, de nos jours même, Napoléon n'est-il pas l'incarnation de la civilisation moderne pour les peuples de l'Asie, de l'Afrique et de l'océan Pacifique ?

III

BIOGRAPHIE.

Il serait fâcheux de méconnaître la tendance que nous venons de signaler, car tous les témoignages déposent en sa faveur. Notre intelligence s'élèverait avec peine jusqu'à la compréhension des faits historiques les mieux établis, si elle ne voyait pas les héros se détacher de l'évolution sociale pour resplendir sur le fond de l'histoire de tout l'éclat de leur individualité. Chaque lustre de la vie de l'humanité est marqué par une personnalité dominante, autour de laquelle rayonnent des personnalités secondaires et se rattachent des aspirations, des passions, des idées, des appétits et des faits de toute espèce. Il importe donc d'ébaucher l'Histoire par le récit des existences illustres, et c'est ce qu'il appartient à la Biographie générale d'exécuter. Une telle biographie, contrairement aux usages reçus, devrait procéder par l'ordre chronologique et comprendre trois points de vue distincts ; — la scène, — l'acteur, — les modifications physiques, intellectuelles et morales qu'il a apportées dans l'Humanité.

Il est inutile d'insister sur les divisions qui constituent cette partie de l'Histoire, elles ressortent d'elles-mêmes. Contentons-nous d'en indiquer les principaux éléments.

1° DU MILIEU BIOGRAPHIQUE.

Le milieu biographique comprend l'exposition des lieux, des influences

naturelles, des ressources industrielles, des idées, des mœurs, des tendances et des croyances de la société dans laquelle se manifeste le héros historique.

2° DES ACTEURS.

Il faut entendre ici, par acteurs, non-seulement le personnage qui joue le principal rôle, mais tous les personnages qui, de près ou de loin, influent sur les actes du héros historique; ceux qui l'ont élevé, ceux qui l'inspirent et l'accompagnent, ceux qui le combattent.

3° DES RÉSULTATS.

La critique des actes du héros historique repose sur l'examen des résultats, bons ou mauvais, qu'ils ont produits. Mais dans la série des études biographiques, cette critique doit se borner à l'édification particulière du lecteur, et ne pas s'égarer dans des considérations sociales qui sont du domaine de l'Histoire proprement dite.

IV

HISTOIRE UNIVERSELLE.

L'Histoire universelle étudie les évolutions de l'Humanité dans ses ensembles. Elle nous fait assister à la naissance, au développement et à la décadence des sociétés; aux agitations et aux progrès des masses en elles-mêmes. C'est l'histoire véritable et complète qui nous détache du fait, de la légende, des personnes, pour nous élever peu à peu jusqu'à l'intelligence de l'économie sociale, de la législation, des religions, de nos droits et de nos devoirs de citoyens.

L'Histoire proprement dite comprend, en vertu de délimitations, pour la plupart fort exactement tracées par Ampère :

1° L'Ethnologie.

2° La Diégématique.

3° L'Histoire proprement dite, dans laquelle il faut comprendre l'Histoire comparée et la philosophie de l'Histoire.

1° ETHNOLOGIE.

« La science que nous placerons ici, avant toutes les autres, est celle qui,

d'un côté, décrit les nations aujourd'hui répandues sur la surface de la terre, les lieux qu'elles habitent, les villes, les ouvrages des arts et les monuments les plus remarquables; qui, de l'autre, indique les principaux traits du caractère des habitants, leurs mœurs, leur religion, leur gouvernement, etc... Je nomme cette science, dit Ampère, *Ethnographie*, description des nations; d'*Ethnos*, nation. J'ai cru devoir préférer cette dénomination, déjà employée par plusieurs auteurs, à celle de *Géographie*, dont on se sert ordinairement, parce que, d'une part, cette dernière comprendrait la géographie physique, science toute différente, qui a trouvé sa place dans le premier règne, et, de l'autre, parce qu'elle n'indiquerait point les notions sur les mœurs, le caractère, etc., des différents peuples. »

L'Ethnographie, telle que la conçoit Ampère, se borne au présent. Pour la compléter, il faut reconstituer la géographie historique à différentes époques, ce que l'on ne peut faire que par une marche régressive, c'est à dire en remontant dans l'ordre chronologique jusqu'aux origines des Sociétés. Cette seconde partie de la science comprend, en outre, les recherches archéologiques étendues aux répartitions primitives de l'Humanité sur le globe. En élargissant le cadre proposé par Ampère, elle complétera la série des Études que l'illustre académicien a si justement appelées Ethnologiques.

DIÉGÉMATIQUE.

Si l'Ethnologie est la partie descriptive de l'Histoire et suit la marche inverse, la Diégématique (1) en sera la partie narrative et nous ramènera à la marche directe, dans laquelle les récits historiques devront se succéder suivant l'ordre chronologique. La Diégématique comprend, il est vrai, d'après Ampère, la chronographie et la chronognosie; mais nous ajouterons cette restriction, qu'elle doit exposer l'histoire de l'Humanité, non pas en étudiant à la fois toutes les sociétés qui la composent, mais en étudiant seulement les sociétés dominantes à chaque époque, les autres n'étant l'objet que d'études accessoires. C'est ainsi que l'Inde, la Chine, l'Égypte, l'Asie Mineure, la Grèce, etc., apparaîtront successivement sur la scène et y joueront leur rôle dans l'ordre du développement des civilisations. La diégématique doit donc être entendue comme une succession méthodique de monographies nationales de choix, c'est à dire une histoire de chaque nation dominante, à mesure qu'elle vient introniser son empire dans l'Humanité.

(1) De *diégématikê*, narratif.

3° HISTOIRE PROPREMENT DITE.

L'Histoire proprement dite est l'Histoire de l'Humanité elle-même. On doit la diviser en époques. Elle renferme tous les genres historiques que nous avons précédemment décrits. Elle comprend, comme nous l'avons dit, ce qu'Ampère appelle l'Histoire comparée et la philosophie de l'Histoire.

« Celui, dit Ampère, qui voudra connaître à fond l'histoire des sociétés humaines ne se bornera pas aux deux sciences dont nous venons de parler (chronographie et chronognosie). Il comparera l'enchaînement des événements. Il reconnaîtra chez les différents peuples une première époque, qui est pour eux ce que l'enfance est pour l'homme, où n'ayant encore qu'un petit nombre d'idées, ces idées sont profondément empreintes dans l'esprit de tous les individus dont ils se composent, où les croyances sont vives ; l'esprit militaire exalté ; les lois simples et sans indulgence ; l'autorité le plus souvent absolue ; — une seconde époque où naissent de nouvelles idées, de nouveaux besoins, de nouveaux sentiments ; où les lois deviennent plus humaines, les mœurs plus douces. Arrivent ensuite des époques où la civilisation se perfectionne, où la guerre cesse d'être l'unique motif des efforts des nations, où le commerce accumule les richesses, où le bien-être des individus s'accroît, mais où il arrive ordinairement que les croyances s'affaiblissent, que l'égoïsme remplace dans le cœur le dévoûment à son pays, où les mœurs perdent en sévérité ce qu'elles ont en politesse ; — d'autres époques enfin où la décadence des institutions sociales amène celle des peuples eux-mêmes. C'est là l'histoire véritable, non celle des batailles, des sièges, des conquêtes, mais l'histoire du genre humain, étudiée comparativement dans tous les lieux et dans tous les temps. Il n'est pas nécessaire d'ajouter que c'est l'histoire considérée sous le point de vue qui doit établir le synchronisme des annales des différents peuples, tracer le tableau de la naissance, des progrès, des révolutions et de la chute des empires, étudier l'action mutuelle, soit physique, soit intellectuelle, que les nations ont exercée les unes sur les autres, et découvrir, d'après l'observation, les lois générales, fondées sur la nature de l'esprit humain, qui ont présidé à ces grands changements. Tels sont les divers objets de la vaste science à laquelle j'ai donné le nom d'*Histoire comparée*.

« Les faits une fois exposés dans la chronographie, discutés dans la chronognosie, enchaînés dans un vaste système, et liés par tous les rapports qu'il est possible d'établir entre eux dans l'histoire comparée, on peut s'élever à un genre de considérations encore plus intéressant ; c'est l'expli-

cation de ces mêmes faits, la recherche des causes qui les ont produits, qui tiennent tant à la nature de l'esprit humain, qu'aux opinions, aux sentiments, aux passions qui se sont développés chez les diverses nations, qui ont déterminé leur caractère particulier, et, si l'on peut s'exprimer ainsi, constitué leur vie morale; c'est la raison de ces lois déduites de la comparaison des événements et dont nous venons de parler dans l'article précédent; ce sont enfin les conséquences qu'on en peut tirer relativement au sort futur de chaque nation actuellement existante, d'après l'état intellectuel et moral où elle se trouve, et à celui même du genre humain. Je conserverai à la science qui s'occupe de ce genre de considérations le nom de *Philosophie de l'Histoire*, sous lequel elle est déjà connue, du moins en partie.

Cette dernière série d'études est une transition naturelle des connaissances historiques proprement dites aux connaissances sociologiques, dont nous allons aborder le plan.

V

MÉTHODE.

En récapitulant les études historiques, nous constaterons facilement qu'elles se développent avec l'intelligence humaine. Nous les voyons d'abord sollicitées par des objets matériels qui constituent le monde sensible de l'historien, puis par des fables dont le merveilleux séduit notre imagination; enfin par une critique qui éclaire le passé des lumières peut-être un peu crues de la réalité, mais dont notre raison se déclare satisfaite, parce qu'elle retrouve dans les traces de l'antiquité la plus reculée une action humaine toujours identique à elle-même. Ces traces sont autant d'attestations qui établissent entre l'Humanité primitive et l'Humanité actuelle des relations de plus en plus étroites, en accusant les mêmes aspirations, les mêmes efforts et le même esprit.

Nous avons compris ce premier ensemble de connaissances sous le titre général d'Archéognosie (du grec *arché* et *gnosis*, intelligence des principes).

L'Archéognosie comprendra donc :

1° L'Archéologie proprement dite, qui étudie tous les produits matériels légués par l'antiquité aux générations modernes; elle comprend elle-même :

La *Paléographie*, dont l'objet est de pénétrer le sens des écritures anciennes, de *palaios*, ancien, et *graphè*, écriture.

L'*Archéologie artistique*, qui étudie les monuments et tous les produits artistiques de l'antiquité.

L'*Archéologie technologique*, qui étudie les instruments, outils et ustensiles de tout genre.

2° La MYTHOLOGIE, ou étude des récits fabuleux de la tradition antique (du grec *mythos*, fable).

Les mythes se divisent généralement en trois grandes catégories : les *mythes naturels*, les *mythes héroïques* et les *mythes moraux et religieux*.

3° La CRITIQUE ARCHÉOGNOSIQUE, qui a pour but d'interpréter les mythes et de placer tous les objets et tous les faits de l'antiquité sous leur véritable jour.

Des ruines de l'antiquité, l'archéognosie a dégagé de grandes et mystérieuses ombres, qui ne tardent pas à prendre des formes et des allures définies, à mesure qu'elles se rapprochent des temps modernes. Ce sont les héros des peuples, les incarnations vivantes des sociétés, sortes de déifications des foules qui se superposent en assises hiérarchiques pour leur faire un trône plus élevé. Ils constituent les cimes de l'histoire : Sésostris, Cyrus, Alexandre, Annibal, César, Charlemagne, Napoléon, géants de l'Humanité, dont l'enfant mesure la taille à l'élévation, sans apercevoir les multitudes qui les portent. C'est par eux que l'esprit de l'homme descendra, de degrés en degrés, dans les régions de plus en plus vastes de l'histoire, jusqu'à ce qu'il prenne pied sur le sol même où végète l'Humanité.

Nous classerons cette série d'études, — la plus séduisante pour le public, car c'est elle qui a donné naissance aux romans,—sous le titre de biographie historique; et, tout en conservant pour chaque *biographie* ou *écrit de la vie* d'un personnage social, les trois grandes séries d'indications relatives à la scène, à l'acteur, et à la critique de ses actes, nous diviserons la biographie historique en trois parties :

1° La *Biographie héroïque*. Elle comprendra l'histoire de tous les grands hommes qui se sont trouvés portés au faite des mouvements sociaux ;

2° La *Biographie générale*, qui étudiera l'histoire de tous les personnages illustres qui s'accusent autour de la personnalité capitale de chaque héros historique ;

3° La *Biographie particulière* qui se préoccupera de la vie des personnalités dont l'apparition sur la scène historique a été fugitive.

Pour faire comprendre cette division, nous l'appliquerons à l'histoire de la première moitié du XVIIe siècle. Ici les héros historiques sont Louis XIV,

Charles XII, Pierre le Grand, Frédéric II. — Parmi les personnages illustres nous nommerons Maurice de Saxe, le prince Eugène, Marlborough, le régent, Stanislas Leckzinski, Louis XV, Marie-Thérèse, Catherine II, etc., cités au hasard de la mémoire. — Enfin dans la biographie, nous verrons figurer les personnalités de madame de Maintenon, du père Lachaise, de Dubois, de Cellamare, de Law, de Charles Edouard, etc.

Ici on remarquera que nous comprenons seulement l'histoire des hommes qui ont joué un rôle politique quelconque dans l'Humanité; car, si l'on se reporte aux sciences qui précédent, on constatera que chacune a déjà son histoire et sa biographie spéciales.

Ce sont ces biographies spéciales, ajoutées à la biographie historique, qui permettront à notre esprit d'entrer dans l'intelligence de l'Histoire universelle, où les faits, les découvertes, les personnalités s'effacent pour se fondre dans le récit d'ensemble des évolutions de l'Humanité.

L'Histoire universelle se divisera en trois grandes séries d'études relatives : 1° aux nations; 2° aux évolutions historiques ; 3° à la vie de l'Humanité dans son ensemble.

L'*Ethnologie* établira d'abord la répartition des nations sur la surface du globe au point de vue géographique, en remontant d'époques en époques et en indiquant, à chacune de ses expositions d'ensemble, les lois, les coutumes et les mœurs de chaque société : *Ethnographie.*

Les principaux plans ethnologiques une fois accusés, il importe de les relier par une série d'études particulières, relatives à la succession, aux migrations et aux fusions des peuples, considérés non plus au point de vue des empires géographiques qu'ils ont établis sur différents points du globe, à différentes époques, mais au point de vue des caractères profonds qui distinguent les groupes humains les uns des autres : *Ethnologie proprement dite.*

Il reste à étudier l'origine des nations, des sociétés, des races : « à savoir comment d'un petit nombre d'hommes réunis tantôt par des liens de famille, tantôt par une croyance ou des intérêts communs est souvent sorti un grand peuple (1) » : *Ethnogénie* qui veut dire *naissance des nations.*

La *Diégématique*, ou partie narrative de l'Histoire universelle, est une biographie des sociétés qui comprendra les mêmes divisions que la Biographie proprement dite. Elle mettra d'abord en évidence l'Histoire de la civili-

(1) Ampère.

sation, en se préoccupant uniquement des sociétés qui se sont trouvées successivement à la tête des mouvements de l'Humanité. Cette partie de la Diégématique peut porter le titre de : *Épopée civilisatrice.*

Reprenant en sous-œuvre l'*Épopée civilisatrice*, nous étudierons les évolutions des sociétés secondaires, constituées également en empires, mais qui présentent certains reflets des sociétés capitales. Il faut indiquer ici avec soin les caractères distincts et tranchés de chacune de ces sociétés et accuser en quelque sorte leur individualité : *Épopées nationales.*

Enfin, dans chaque grand empire, nous retrouvons des tribus, des groupes, des castes, dont il est nécessaire d'étudier l'histoire particulière : *Épopées familiales.*

L'*Histoire proprement dite* ne se préoccupe plus des traditions, des personnes, des nationalités, mais du mouvement humain dans ses grands ensembles. Elle assiste de sang-froid à ces intronisations et à ces déchéances des empires qui ont leur croissance, leur maturité et leur décrépitude prévues comme celles de l'être. Sans se laisser influencer par des présomptions de peuples ou de partis elle s'attache à l'Humanité, l'étudie sous son véritable jour, dans sa marche progressive vers l'harmonie universelle ; elle voit les idées des peuples devenir de plus en plus synthétiques; elle constate des lois générales qui dominent les ambitions, les rivalités, les prépondérances sociales ; elle établit les conditions des fins humanitaires ; et, selon que chaque gouvernement la conçoit d'une façon plus ou moins distincte et applique ses enseignements avec plus ou moins d'impartialité et de rigueur, il acquiert une puissance plus ou moins accusée sur les destinées du monde.

VI

APPLICATIONS.

Nous ferons remarquer qu'à partir des sciences sociales proprement dites, il n'y a plus lieu de signaler les applications qui dérivent des ensembles de nos connaissances individuelles dans l'activité collective de l'Humanité. Toutes ces connaissances y trouvent nécessairement un emploi.

VII

OBSERVATIONS CRITIQUES.

Les études historiques, étant les plus intéressantes, donnent naissance aux appréciations les plus variées ; mais le public paraît bien loin encore de les apprécier à leur véritable valeur. On semble plus curieux de rechercher comment chaque historien envisage les faits sociaux que d'étudier ces faits dans leur réalité profonde. Combien de lecteurs n'étonnerait-on pas si l'on disait que, dans tous les temps comme dans tous les lieux, en France comme en Chine, au XIXe siècle comme au Ier, les évolutions sociales se reproduisent avec une régularité qui ramène les mêmes problèmes, les mêmes intérêts, les mêmes tendances et les mêmes ambitions. L'Humanité a beau déplacer ses empires, changer de costumes, d'usages, de langues, et même de religions ; il ne faut pas une investigation bien profonde pour la retrouver toujours identique à elle-même. L'historien sérieux qui veut constater les phases du développement humain doit accumuler bien des matériaux avant de prononcer son jugement. S'il pouvait rassembler toutes les œuvres dites historiques et les soumettre à une critique sévère, il y trouverait cent mille romans pour une histoire.

Le premier étonnement de l'écrivain qui pénètre dans l'étude d'une société ancienne ou étrangère est de trouver cette société si profondément semblable à la sienne, qu'il en arrive à se croire le jouet d'une hallucination. Si, dans une candeur primitive et sans avoir analysé le mécanisme social de son propre milieu, il livre prématurément au public le fruit de son travail, il se voit accusé d'avoir fait une satire ou tout au moins une allusion. Le voilà convaincu de malice pour avoir mis trop de bonhomie et de sincérité dans son œuvre. Il accuse alors l'étude historique de n'être qu'une spéculation dans le vide, ou, s'il ne s'est pas découragé, il incline avec la plupart des autres historiens vers la poésie ou le roman; à moins que, doué d'une persistance supérieure, il ne multiplie ses recherches pour arriver à déterminer les nuances délicates qui caractérisent chaque époque et chaque société.

On peut répartir les historiens en trois grands groupes : les historiens naïfs, les fabricants d'histoires, et les historiens proprement dits.

L'historien naïf imagine toujours faire de merveilleuses découvertes qui, au fond, ne sont que des vulgarités. Il ressemble à ces apprentis géologues qui ramassent une poignée de terre et disent avec solennité : Ceci est du silex, cela de l'argile, et cette autre chose du détritus végétal. Il recueille la poussière des faits dans le champ de la tradition, et s'écrie : Ceci est du sémitique, cela du couchite, et cette autre chose de l'indo-européen. Il a une affection toute spéciale pour les vieux tessons, les défroques et les rubriques néologiques que les exigences de la concision introduisent fatalement dans l'exposé des faits. Mais, pour peu qu'on le secoue, comme Pantagruel fit de l'étudiant limousin, il revient bien vite à son patois natal.

Le fabricant d'histoires se propose, au contraire, de caresser les goûts, les passions, les partis. Comme les chroniques abondent en matériaux de toute nature, il choisit ceux qui lui paraissent propres à justifier un thème préparé d'avance. Le public tourne-t-il à la démocratie? César est un débauché sanguinaire, Charlemagne un rustre féroce, Napoléon un soldat ivre. Souffle-t-il un vent d'impiété? les prophètes sont des fous, les apôtres des imposteurs, les prêtres des scélérats hypocrites. Qu'une réaction se produise, Héliogabale aura son apothéose, et les Borgia seront canonisés.

L'historien sérieux sait, au contraire, que les personnalités historiques ne sont pas des individualités, mais des expressions sociales; il se préoccupe moins de découvrir les différences qui caractérisent chaque peuple que de poursuivre l'Humanité, à travers les apparences du changeant et du variable, dans son activité même. Ce n'est pas entre les différentes manifestations d'un même mode de cette activité qu'il prétend établir des caractères tranchés, c'est entre des modes différents. En étudiant chaque évolution sociale, il recherche avec soin en quels lieux, dans quels temps, dans quelles conditions, cette évolution trouve son expression la plus complète, et, par conséquent, la plus féconde en enseignements. Il est pénétré de cette vérité que l'histoire doit porter son fruit, mais il attend avec patience que ce fruit parvienne à sa maturité. Il se garde d'entrer dans l'étude avec un préjugé, de peur d'en sortir avec un roman ; il ne confond pas, avec l'historien naïf, le bagage scientifique avec la science ; il ne fait pas parler les faits à sa guise comme le faiseur ; il ne les farde ni ne les prostitue. Calme, recueilli, prudent, attentif, impartial, il s'applique avant tout à être sincère, ce qui ne l'empêche pas d'émouvoir et d'être ému, même quand il prononce

les sentences les plus rigoureuses. Envisagée à son point de vue le plus élevé, l'histoire du passé renferme l'histoire de l'avenir ; aussi le véritable historien sera toujours reconnaissable à ce signe qu'il est doué du don de prophétie. Pour ne citer qu'un exemple, et se pénétrer de cette vérité, il suffira de relire l'admirable étude de Montesquieu sur la *Grandeur et décadence des Romains*. Les faits accomplis depuis l'apparition de ce livre sont venus en confirmer les conclusions d'une manière si évidente, lorsque la Révolution française chercha à restaurer chez nous les institutions de la République romaine, qu'on est parfois tenté de croire que l'ouvrage a été écrit après coup.

SOCIOLOGIE.

ECONOMIE, DISCIPLINE, ASPIRATIONS SOCIALES.

I

DIVISIONS GÉNÉRALES.

Nous venons d'indiquer la croissance, les développements, les phases et les phénomènes si variés de l'histoire des sociétés; nous en avons signalé les effets plutôt que les causes. Maintenant, avec la Sociologie, nous allons étudier les réalités profondes, immanentes, invariables qui persistent sous la fantasmagorie des traditions et pénétrer dans la substance même de l'Humanité.

Nous classerons les études sociologiques en six grandes catégories :

1° L'*Economie générale*, qui étudie la vie végétative des sociétés.

2° La *Force publique*, qui constitue, avec des hommes, les mécanismes supérieurs destinés à faire concourir les énergies individuelles dans des actes d'ensemble.

3° La *Législation*, qui garantit la vie de la personne, les droits et les biens de l'homme, de la famille et du groupe, maintient la justice dans le conflit des intérêts, et réprime les attentats de toute nature dirigés contre l'harmonie sociale.

4° La *Politique*, qui emploie les ressources et les forces communes à la conservation, à la prospérité et à la gloire des sociétés.

5° Les *Religions*, qui cherchent à réunir tous les hommes dans les mêmes sentiments, à réaliser l'unité dans l'Humanité entière, à la soumettre à des lois supérieures aux intérêts, aux passions et aux ambitions de toute nature.

6° Les *Utopies*, dont l'examen et la discussion constituent la critique des organisations artificielles de l'Humanité.

II

ÉCONOMIE GENERALE.

Si l'on se reporte à l'ensemble des connaissances technologiques, on constatera qu'en indiquant les ressources, les procédés et les produits de l'activité humaine, nous avons écarté toutes les questions relatives à leur exploitation, à leur mise en œuvre collective et à leur répartition. C'est, en effet, à l'économie qu'il appartient de nous édifier sur ces questions. L'Économie générale embrasse trois grandes séries d'études : le commerce, la chrématologie et la cœnolbologie.

1° COMMERCE.

Le commerce comprend la détermination exacte et constante des ressources de toute nature dont on dispose, l'art de les faire valoir et celui de les renouveler en cherchant à les accroître. Ces études constituent l'arithmétique sociale, la statistique, la comptabilité générale et l'exploitation proprement dite.

Arithmétique sociale. — Il est de la plus grande importance de dresser, au début de toute étude économique, l'inventaire des richesses de l'Humanité et d'indiquer, soit dans le passé, soit dans le présent, leur répartition sur le globe, dans les milieux géographiques et dans les milieux sociaux. Mais nous ne possédons pas encore les données qui doivent présider à l'évaluation de ces ressources, et nous trouvons déjà dans un excellent formulaire de nos connaissances, *Un million de faits*, le titre de cet ensemble de connaissances préparatoires ; l'*arithmétique sociale*.

« Cette science, dit M. Léon Lalanne, a pour but la détermination de tous les éléments numériques, d'une nature quelconque, qui peuvent intéresser l'homme à l'état de société. Elle est pour toutes les applications sociales des sciences ce que l'arithmétique ordinaire est pour les sciences envisagées en elles-mêmes. » Il est vrai que nous distrairons de cette étude les mesures du temps établies déjà dans les sciences cosmologiques, et les divers éléments de statistique générale, que nous répartirons dans les catégories suivantes.

Nous ne nous occuperons donc, dans l'arithmétique sociale, que de la détermination des valeurs en cours dans l'Humanité. Les poids et mesures en usage chez tous les peuples, les signes représentatifs des richesses de tout genre et les calculs auxquels ils donnent lieu : intérêts, escomptes, annuités, etc., feront l'objet de cette division.

Statistique économique. — La statistique économique, qu'il ne faut pas confondre avec les statistiques morales, politiques ou religieuses, établit l'inventaire général :

1° Des richesses naturelles, industrielles et financières de chaque société : (statistique des produits et de leurs valeurs) ;

2° Des faits numériques relatifs à la consommation des produits : *Statistique des consommations ;*

3° Des faits numériques relatifs aux transports, aux échanges, au crédit et au commerce en général : *Statistique commerciale.*

« Les faits que la statistique met en lumière, dit Joseph Garnier, sont propres à guider l'industrie tant agricole que manufacturière; les entreprises de toute sorte, non-seulement celles qui sont soutenues par de nombreux capitaux associés, mais encore celles qui n'ont à leur disposition que les instruments de travail les plus modestes. Elle a d'utiles indications pour tous les ouvriers de la ruche sociale, et quand elle n'agit pas par des renseignements directs et spéciaux, elle exerce une influence salutaire sur l'instruction générale et contribue à faire entrer dans tous les esprits des notions exactes sur la nature des choses. » A ce titre elle remonte dans le passé et s'étend à toutes les sociétés.

Comptabilité générale. — La statistique, quand elle se résout en formules générales et simples, ne nous initie pas seulement à l'intelligence du mouvement économique; elle donne naissance à une science naguère fort humble, mais qui a pris de nos jours d'immenses développements : la *Comptabilité*, qui présente au particulier et à l'industriel, aussi bien qu'à l'administrateur et à l'homme politique, un compte-rendu fidèle de l'état des affaires. La comptabilité établit à tous les instants la somme de puissance économique dont chaque administration peut disposer.

Exploitation. — Lorsqu'on possède la connaissance des valeurs de tout genre, des ressources de toute espèce qui sont à notre portée, des puissances productives dont on est maître, il devient possible d'administrer et d'exploiter une entreprise quelconque en y introduisant l'ordre et la méthode néces-

saires, et en recherchant quels sont les moyens les plus propres à la faire prospérer.

Chaque exploitation privée ou publique repose, il est vrai, sur une organisation particulière ; mais il n'existe pas moins des faits généraux applicables à tous les genres d'exploitation. Ce sont ces faits qu'il importe de mettre en lumière et de constituer en théorie.

2° CHRÉMATOLOGIE.

Au milieu du conflit des intérêts et des prétentions économiques où chaque groupe tend à se faire centre et à dominer, il importe de faire prévaloir les lois qui ont pour but d'introduire l'harmonie entre toutes les entreprises, de mettre tour à tour un frein au monopole et à la concurrence, d'arrêter certaines industries, d'en solliciter d'autres. On n'y parvient qu'en se dégageant des faits économiques et des intérêts de personne et de groupe pour rechercher en elles-mêmes les conditions et les lois de la richesse. Ces études sont comprises dans ce qu'on appelle l'*Economie politique*, titre que nous aurions conservé s'il avait été restreint à un ensemble déterminé de connaissances ; mais il sert d'étiquette à tant de spéculations qu'il devient nécessaire d'adopter le néologisme créé par Ampère, pour préciser l'objet même de cette étude. La plupart des économistes sont d'ailleurs tombés d'accord sur la définition à donner à l'économie politique, et ils l'appellent *la science de la richesse*; c'est ce qu'exprime le mot *chrématologie*.

La Chrématologie a pour objet de déterminer la véritable richesse, de rechercher quelle en est la source, d'étudier comment elle se crée, se transmet et s'anéantit pour donner naissance à une production, à une circulation, à une consommation et à une régénération nouvelles.

Chrématographie. — Tout le monde sait aujourd'hui que la richesse consiste non pas dans l'accumulation d'une certaine quantité de métaux précieux, mais dans la jouissance plus ou moins multipliée des produits de l'activité humaine. S'il restait quelque doute à ce sujet, il suffirait de constater qu'une pièce de cent sous, par exemple, peut valoir cent francs dans un jour ou ne rien valoir du tout. Qu'elle reste vingt-quatre heures dans la même main, elle donnera naissance à la satisfaction purement égoïste et stérile de la possession d'une rondelle d'argent ; mais qu'à celui-ci elle procure le repas, à cet autre une partie du vêtement, au troisième un certain temps d'abri, au quatrième une somme d'instruction, au cinquième une jouissance morale, ce qui peut se faire entre un lever et un coucher de soleil, elle devient féconde en se multipliant par le nombre des individus entre les mains desquels elle

aura passé ; non qu'elle soit la valeur en elle-même, mais parce qu'elle est l'intermédiaire entre les produits de chaque activité. Pour qu'elle ait sa valeur, il faut que les produits existent ; il faut que le repas, l'habit, l'abri, le livre aient été préparés par l'effort humain. La véritable richesse est donc dans le produit, mais à la condition que ce produit soit incessamment consommé, incessamment renouvelé et passe sans cesse du producteur au consommateur. La chrématographie s'appliquera donc à décrire tous les phénomènes de la production, de la circulation et de la consommation.

Modes chrématologiques. — Il s'agit maintenant de comparer ces différents phénomènes entre eux, d'examiner dans quelles conditions la richesse se multiplie, circule et se consomme, pour se recréer, circuler de nouveau et se consommer encore. Ici, nous sommes forcés d'étudier l'activité physique de l'homme, tant au point de vue des produits qu'elle peut fournir, que de ceux qu'elle peut absorber.

L'étude des différents systèmes de la répartition des richesses nous signale, dans le passé comme dans le présent, les erreurs les plus grossières, les vices les plus monstrueux, les injustices les plus criantes, mais il faut rester calme et procéder de sang-froid au diagnostic du mal économique.

Pour aborder sérieusement cette étude, il importe d'établir un type rigoureux de la répartition des richesses. Savoir ce qu'un homme est capable de produire, et comme il n'y a de richesse réelle que le produit, la stricte justice doit donner au producteur une somme de consommations équivalente à la somme de ses productions.

Voilà le premier problème dans sa rigueur, il n'a été encore ni compris, ni résolu. En effet, un homme ne produit que pendant un certain temps, il ne produit pas pour lui seul, et les productions humaines sont si variées, qu'il est difficile d'établir l'unité des valeurs productives. Il ne faut pas moins qu'une science universelle pour déterminer cette unité.

Le second problème, compris dans le premier, consiste à découvrir le mode de consommation, à la fois le plus profitable et le plus économique, et cette étude n'est pas moins complexe, car il faut examiner tous les modes possibles de la consommation, en signaler tous les vices, en chercher tous les remèdes.

Le troisième problème consiste dans l'examen de la répartition des produits et dans l'étude approfondie des intermédiaires qui favorisent cette répar-

tition : le numéraire, les billets, le crédit, l'intérêt, les opérations financières, les banques, les valeurs et leurs titres de toute espèce, les alternatives de hausse et de baisse, les abus auxquels donnent lieu la manipulation des signes représentatifs de la valeur. C'est la science financière proprement dite.

Chrématique. — Ces trois problèmes, après avoir été l'objet d'études générales, doivent être repris en sous-œuvre, dans leur ensemble, et à un point de vue individuel pour constituer une science spéciale, celle de l'acquisition, de la conservation et de l'emploi de chaque fortune. Il s'agit ici de déterminer par quels moyens l'homme peut arriver à l'aisance, augmenter son bien-être, administrer le plus efficacement ses richesses dans tous les milieux économiques ; non pas tels qu'ils devraient être, mais tels qu'ils sont. Cet ensemble d'études constituera la science que nous appellerons *chrématique*.

3° CŒNOLBOLOGIE.

Jusqu'ici, nous n'avons étudié les faits et les lois économiques qu'au point de vue de l'actualité. Il faut maintenant établir la théorie complète de l'économie humanitaire, non pas telle qu'elle est, mais telle qu'elle devrait être ; et, l'idéal économique une fois précisé, chercher par quels moyens on pourrait le réaliser dans les faits. On conçoit facilement que cet idéal repose sur des aspirations dont le mobile est la solidarité humaine, et qu'il a pour but la commune prospérité, *cœnos olbos*, dont Ampère a formé le mot *Cœnolbologie*.

Cœnolbographie. — On déterminera d'abord tous les besoins légitimes de l'homme, toutes les conditions matérielles de son bien-être ; ce premier point établi, il faudra rechercher quelles sont les conditions les plus naturelles et les plus faciles (qui sont en même temps les plus économiques et les plus fécondes) de la production. Il s'agira de préciser quels pays, quels moyens, quels groupes humains sont capables de donner chaque série de produits avec le moins de travail, en plus grande quantité et en meilleure qualité; quels procédés sont propres à transporter le plus promptement ces produits sur les points les plus éloignés ; quels intermédiaires les répartiront de la manière la plus équitable entre les sociétés et les individus.

Modes cœnolbologiques.—Mais si l'on ne veut pas se réduire à une description poétique de la félicité publique dans l'ordre matériel, c'est-à-dire à une utopie, il importe de ramener cette théorie aux conditions actuelles de l'Hu-

manité. Il faut se garder de rêver des bouleversements dans les systèmes disciplinaires, législatifs, politiques et religieux, qui ont leur raison d'être, non seulement dans l'actualité, mais dans la constitution même de l'Humanité. Suivant que l'Économie générale aura été mieux étudiée, chaque homme, chaque groupe, chaque tribu, chaque classe, chaque société, saura bien en rechercher les applications au point de vue de sa satisfaction propre, et pour réaliser le plus efficacement possible les éléments de sa prospérité. Il est évident que les plus intelligents et les plus actifs trouveront les tempéraments nécessaires pour arriver à leurs fins économiques. La véritable cœnolbolgie ne peut se constituer sur la violence ; elle doit s'abstenir de chicanes, de querelles patriotiques et religieuses, elle se développera par des institutions qui s'inspirent d'un sentiment élevé de la solidarité, par des expéditions scientifiques et industrielles, qui sont autant d'apostolats de la science dans le monde physique, et qui comptent déjà tant de gloires et tant de martyrs.

On voit donc, malgré des affirmations trop précipitées, quo les aspirations économiques sont complètement distinctes de l'ordre politique, et que, loin d'y introduire des perturbations, elles ne font qu'y apporter un gage de paix et de prospérité en reliant les hommes des diverses nations dans une entente commune. Il est vrai que, jusqu'à ce jour, un sentiment étroit de patriotisme, des préventions injustes, des ambitions égoïstes ont engagé les gouvernements dans des errements préjudiciables aux fins du bien-être humanitaire, mais les obstacles tombent chaque jour à mesure que se développe dans les intelligences le sens de la véritable économie. Il ne sera donc pas inutile de constituer ici l'histoire des réformes introduites par l'activité industrielle et commerciale dans l'ordre politique. On aura soin d'insister sur la prudence que les gouvernements doivent apporter dans ces réformes, pour éviter les perturbations et les crises, mais il importe également de solliciter l'initiative privée, en l'éclairant sur ses véritables intérêts, et d'engager son activité dans des voies de plus en plus fécondes.

Morale économique. — Enfin, et de nos jours surtout, il est de la dernière importance de faire prévaloir sur l'âpreté des intérêts les exigences imprescriptibles du bien-être moral qu'une pléthore, fictive d'ailleurs, de bien-être matériel tend à étouffer. Il faut faire justice de certaines maximes introduites dans la science par des économistes à courte vue. Le plus précieux, le plus fécond des instruments de production, l'homme, doit être entouré de tous les ménagements, de toutes les garanties, de tous les respects possibles. Il n'est pas vrai que le bien-être de l'Humanité soit en raison inverse du nombre de ses membres ; il n'est pas vrai non plus qu'il faille multiplier les appétits matériels pour multiplier l'activité productive, car le temps donné à la consomma-

tion est enlevé à la production, et ceux qui ont le plus de besoins sont les moins capables de produire. Ici, plus facilement encore que dans aucun autre ensemble de connaissances, il sera facile de mettre en lumière la dépendance fatale qui existe entre l'ordre moral et l'ordre matériel. Tout aride qu'elle semble aux âmes généreuses, l'économie politique, étudiée à ce point de vue, sera féconde en précieux enseignements.

III

FORCE PUBLIQUE.

C'est une violence salutaire que d'arracher l'homme à son isolement, à sa présomption et à son égoïsme naturels pour le faire entrer comme fraction dans une unité de corps. Il puise en effet dans le régime disciplinaire une juste appréciation de ses forces, le respect de son semblable et ses premiers sentiments de la solidarité humaine. Pour se rendre compte des bienfaits d'une telle éducation, il suffit d'en comparer les résultats avec ceux de l'éducation opposée. Les hommes façonnés dans la jeunesse par la discipline sont accorts, faciles à vivre; ils ont usé leurs angles et développé leurs forces. Depuis qu'en France ce système a prévalu pour le sexe masculin, on est surpris de voir les hommes donner l'exemple de la douceur et de la sociabilité aux femmes. La discipline doit donc être considérée comme une éducation. Il faut seulement la condamner quand elle prétend envahir l'existence entière, et quand elle méconnaît son rôle purement éducatif.

Ces indications préliminaires suffisent à renvoyer la théorie de la discipline à l'ensemble de connaissances auquel nous avons donné le titre d'Éducation. Ce que nous avons à étudier ici ce sont les phénomènes mécaniques des différentes organisations sociales, abstraction faite des individus, au point de vue des faits, des modes et des méthodes, comme nous l'avons entrepris pour les autres ensembles de connnaissances.

1° MÉCANANDRIE.

La science de grouper les hommes, de les armer, de les dresser à fonctionner comme rouages d'un mécanisme quelconque, est la base de toute constitution de la force publique.

Ce n'est pas seulement comme soldats que les hommes sont engagés dans un agencement collectif. Nous sommes étonné de ne pas trouver de nom

à la science qui étudie les mécanismes disciplinaires. Le titre de tactique, qu'Ampère a adopté, ne saurait évidemment comprendre tous les milieux dans lesquels les hommes font acte d'obéissance passive, et, pour ne parler que des corps organisés par l'état, peut-on raisonnablement comprendre sous une telle rubrique les corps de marins, de douaniers, de gendarmes, de pompiers, etc.? Nous avons donc été forcé d'introduire ici un second néologisme pour réunir dans un même ensemble toutes les connaissances relatives à l'art de discipliner les hommes ; le mot *mécanandrie*, veut dire *mécanisme fait d'hommes énergiques.*

Hoplistique. — Sous ce titre il faut comprendre, selon l'étymologie (*hoplon*, arme, instrument), l'étude de tous les objets matériels employés par la discipline, soit dans l'art militaire, soit dans le maintien de la sécurité intérieure : moyens d'attaque et de défense, machines de guerre terrestres ou maritimes, matériel de toute espèce, retranchements, fortifications ; moyens de répression intérieure ; — en un mot, tout ce qui constitue la force matérielle des sociétés, non-seulement dans un pays et à une époque déterminée, mais dans tous les lieux et dans tous les temps.

Stratologie. — Ce formidable inventaire dressé, nous étudierons comment les hommes se servent des instruments qu'il leur fournit ; comment on les exerce à cet emploi, soit isolément, soit par groupes et simultanément. Quels sont les différents groupes disciplinés ; quelle est leur instruction particulière, leur rôle ; à quelles fins ils sont destinés.

Manœuvres. — Chaque troupe peut être considérée comme membre d'un corps qu'il faut faire agir, non pas au point de vue de l'acte final, qui relève de la stratégie, mais au point de vue de l'harmonie normale à réaliser dans les mouvements.

Nous restreindrons donc le titre de *manœuvres* à l'ensemble des actes habituels que doivent accomplir les troupes réunies en corps.

2° STRATÉGIE.

La stratégie, qui signifie : *l'art de conduire une armée en guerre*, doit s'appliquer à toute direction supérieure des corps disciplinés pendant la lutte. Elle a pour but de préparer la victoire ou d'atténuer la défaite. Non-seulement elle embrasse un ensemble de connaissances universel, mais elle réclame une inspiration constante, car les phénomènes de la lutte se modifient à chaque instant et se résolvent toujours en faits imprévus. Nous diviserons les études stratégiques en trois grands groupes :

1° La stratégie, qui comprend toutes les connaissances théoriques enseignées dans les diverses écoles militaires.

2° L'économie stratégique, qui a pour objet la recherche, et pour but l'utilisation de toutes les ressources stratégiques.

3° L'art du commandement.

3° MACHOMATIQUE.

Il est un troisième ensemble de connaissances relatives aux forces disciplinées qui, en temps de guerre, a pour objet la direction suprême des opérations militaires, et en temps de paix, le meilleur emploi des forces vives d'une nation, non seulement en vue de sa prospérité et de sa grandeur, mais aussi du rôle qu'elle doit jouer dans l'Humanité. Les problèmes qu'une telle science se propose sont généralement mal énoncés et mal compris, mais ils n'en existent pas moins et ont une importance capitale.

Quand une guerre éclate, c'est sur terre et sur mer, à l'intérieur et à l'extérieur; il faut faire face à toutes les hostilités, tendre tous les ressorts, armer toutes les forces. Une victoire, vingt victoires ne décident pas de la lutte; il est même des défaites plus avantageuses que les succès les plus glorieux. On a vu des peuples écrasés sur mille points différents réaliser un triomphe définitif. Pendant que l'ennemi s'épuisait dans ses victoires, ils reprenaient de nouvelles forces dans leur organisation économique et dans leur éducation sociale. Il importe donc d'étudier les causes de cette énergie, l'art de la développer, et les fins humanitaires auxquelles elle doit tendre. Comme cette étude n'a pas de nom, nous lui donnerons le titre de *Machomatique*, du grec *machomai*, lutter, agir énergiquement.

Organisation des forces. Sous ce titre, qui embrasse les connaissances relatives à l'activité énergique et militante des sociétés, nous rechercherons quels sont les enseignements, les institutions, les sollicitations les plus aptes à engendrer, à entretenir et à développer les sentiments de la solidarité des corps sociaux. Nous étudierons en outre par quels points les sociétés sont vulnérables, par quelles précautions on peut les garantir. Enfin, nous rechercherons comment se constituent ces puissances latentes qui, au moment de la crise, semblent surgir tout armées du sol.

Conduite de la lutte. — Quand la lutte se produit, il faut utiliser toutes les forces latentes ou manifestes et les faire concourir à un but commun. C'est ce qu'on appelle si justement en France « organiser la victoire » ; étude



immense, travail effrayant qui investit le gouvernement de la responsabilité suprême.

Utilisation des forces. — Mais quand les crises sociales plus ou moins tendues ont développé dans un peuple des forces jusque là ignorées, sa constitution, comme celle de toutes les sociétés, a subi des modifications profondes. La paix rétablie rayonne sur un monde politique transformé, où de nouvelles puissances écloses pendant la crise doivent trouver, sous peine de réagir les unes contre les autres, un emploi dans l'ordre pacifique, et concourir au développement et à la croissance de l'Humanité. On comprend dès lors qu'il importe beaucoup moins de réduire l'effectif militaire d'une nation que de l'utiliser au point de vue de la prospérité sociale, d'y créer des écoles, d'y mettre en chantier tous les grands travaux que l'industrie privée ne peut réaliser, d'y constituer des milieux où les sentiments du devoir et de la solidarité se développent, où les hommes apprennent à se connaître et à s'apprécier; afin que plus tard, dans la vie civile, ils puissent exercer avec intelligence leurs droits, accomplir avec courage leurs devoirs de citoyens.

IV

LÉGISLATION.

Il faut entendre ici par Législation l'ensemble des lois et des applications de ces lois, qui ont pour but d'affirmer, de garantir et de régulariser, au point de vue de l'harmonie humaine, l'action de la personne sociale. Jusqu'ici nous avons vu l'homme social soumis aux lois économiques et aux exigences disciplinaires. Nous l'allons voir investi d'un rôle et protégé dans l'accomplissement de ce rôle par l'autorité légale.

Il est d'usage en France de répartir les lois en cinq grandes catégories auxquelles on a donné le nom de Codes :

Les lois qui régularisent et sanctionnent l'existence et les actes des particuliers : *Code civil;*

Les lois qui président aux échanges : *Code commercial;*

Les lois qui règlent l'autorité et déterminent les fonctions des hommes appelés à gouverner la chose publique : *Code administratif;*

Les lois qui ont pour but la répression de tous les actes coupables : *Code criminel et pénal;*

4. Les lois qui régissent les membres des corps disciplinés : *Code militaire.*

Cette division, considérée au point de vue de l'étude spéciale des lois, est naturelle; cependant nous y apporterons une modification nécessitée par l'universalité des prospects auxquels nous astreint une Exposition d'ensemble des connaissances humaines.

1° DIVISION GÉNÉRALE DES LOIS.

Les lois de tous les pays, de tous les temps et de tous les peuples, doivent se répartir en cinq catégories plus vastes que les précédentes :

1° Les lois relatives à la régularisation des faits économiques. Elles embrassent non-seulement les lois comprises dans le Code commercial français, mais aussi la plupart des dispositions contenues en France dans les codes civil et de procédure civile, relativement aux biens et aux transactions de toute nature auxquelles ces biens peuvent donner lieu ;

2° Les lois disciplinaires relatives à l'homme social soumis à une fonction de corps ;

3° Les lois civiles relatives à la personne sociale libre et à la famille ;

4° Les lois administratives et politiques ;

5° Les lois religieuses.

Chacune de ces divisions doit suivre immédiatement l'étude des ensembles correspondants que nous avons établis dans la Sociologie ; elle doit en outre comprendre son système pénal.

2° DE L'ÉTUDE ET DE L'INTELLIGENCE DES LOIS.

Les faits de chaque ordre social devant être étudiés dans leurs phénomènes et dans leurs modes, il importera de rechercher :

1° Dans l'histoire du présent et du passé, quelles sont les dispositions législatives auxquelles ils donnent ou ont donné lieu : *Nomographie;*

2° Quelles pensées, quelles causes, quels motifs de tout genre ont déterminé les différents systèmes de lois. Quel est l'esprit de ces systèmes, comment il faut les comprendre et les appliquer : *Jurisprudence;*

3° Quelle méthode on devrait suivre pour réaliser un système législatif d'ensemble : *Théorie des lois.*

3° ÉTUDES SPÉCIALES A LA PRÉSENTE DIVISION.

Si les codes relatifs aux choses, à la discipline, à l'administration et à la politique, aux religions, sont étudiées à la suite de chacune des grandes divisions sociologiques, il ne restera plus à établir ici que l'histoire, la

jurisprudence et la théorie des lois purement civiles. Mais cette étude elle-même est immense, compliquée de problèmes innombrables, féconde en enseignements de toute nature.

On recherchera donc quelles sont les garanties qui ont été ou qui sont données à l'homme dans toutes les sociétés, sur quelles bases a été constituée la famille, quels droits, quelles responsabilités et quels devoirs sont ou ont été attribués à la personne civile à toutes les époques de son existence.

Cet examen soigneusement fait, il restera à mettre en lumière, parmi les lois en vigueur, celles qui sont les plus simples et les plus conformes à la justice, à les soumettre au contrôle des différents autres ordres de législation, et à en constituer le code ou la théorie.

V

POLITIQUE.

Sous ce titre il faut comprendre l'Administration et la Politique proprement dite. L'Administration comprend toutes les gestions de la chose publique en tant qu'elles se conforment à des règles prévues : la Politique soumet les administrateurs à une hiérarchie que couronne le gouvernant. A l'intérieur comme à l'extérieur, le gouvernant apparaît comme l'incarnation de la chose publique et de la société. Il représente son peuple vis à vis des autres; il représente son peuple à son peuple même. Tour à tour abstrait ou personnifié, il est toujours résumé dans des personnalités latentes ou officielles.

L'ordre de connaissances sociologiques que nous avons compris sous le titre général de politique comprend trois catégories d'études :

1° L'Administration;

2° L'État;

3° La Politique proprement dite.

1° ADMINISTRATION.

Dans l'Administration, il faut comprendre tous les services qui ont trait à la gestion de la chose publique : sol, voies de communication, travaux publics, agriculture, commerce, finances, guerre, marine, police, justice, cultes, instruction publique. Chacun de ces grands services a son économie, sa discipline et sa législation spéciales.

2° ÉTAT.

Par État, il faut entendre le système gouvernemental d'une société, sa constitution et son organisation politiques. On distinguera les affaires d'État des affaires administratives, par la distinction même des intérêts particuliers et des intérêts d'ensemble. Le caractère de l'État est d'être centralisateur et de faire concourir les ressources et les forces privées ou publiques à un but commun. Pendant que l'Administration fonctionne en vertu d'une organisation définie et d'une réglementation prévue, l'État surveille et dirige le fonctionnement administratif; il prend des décisions dans toutes les circonstances imprévues; il prépare des lois, les discute, les édicte et les applique. Il réduit la société à ses deux termes les plus simples : le moi gouvernant et le non-moi gouverné, le prince et la nation, qui réagissent l'un sur l'autre, dans un dualisme intérieur, mais concourent à l'unité de l'action extérieure.

La théorie de l'Etat comprend les ensembles de connaissances relatifs : 1° à l'action du prince sur le peuple; 2° à l'action du peuple sur le prince; 3° à l'harmonie qui doit régir les rapports de l'un à l'autre.

Il est inutile, ce nous semble, de faire constater la réalité de ce dualisme intérieur dans les sociétés où le prince est dissimulé derrière une abstraction qu'on décore du titre de pouvoir exécutif. Tout pouvoir exécutif suppose un agent suprême, et tout agent suprême une personne dominante.

3° POLITIQUE.

La catégorie des connaissances comprises sous le titre de politique gouvernementale a été si nettement établie par Ampère, que nous n'avons rien à y changer.

« Pour la conservation d'un Etat, il ne suffit pas, dit-il, que cet Etat possède des éléments de prospérité intérieure, des forces au moyen desquelles il puisse repousser les attaques du dehors, des lois qui règlent les rapports des citoyens entre eux et avec le gouvernement; il faut encore établir, entre cet Etat et les autres nations, les traités nécessaires au plus grand développement de son industrie et au maintien de la paix, assurer son indépendance, garantir sa dignité, faire exécuter les lois, prévenir autant que possible les désordres et les crimes, et tendre à l'amélioration, sous tous les rapports, de l'état social.

« 1° *Ethnodicée.* — Les rapports de nation à nation n'ont d'abord été réglés

que par des usages qui s'étaient établis comme d'eux-mêmes ; mais, avec les progrès de la civilisation, sont venus des traités formels, basés sur les intérêts réciproques des peuples qui les ont conclus. De ces usages, de ces traités et de la loi suprême du juste et de l'injuste qui existe de peuple à peuple, comme d'individu à individu, se compose le droit public des nations qui est l'objet de la science que je nomme *Ethnodicée*; d'Ethnos, *nation*, et dicè, *le droit*.

« 2° *Diplomatie*. — Mais ces usages et les traités ont, comme les lois, et peut-être plus encore, besoin d'être interprétés ; car ils s'occupent d'intérêts qui excitent, en général, des passions plus violentes, conduisent trop souvent à l'emploi de la force et appellent ainsi sur les nations rivales tous les fléaux de la guerre. Cette interprétation suppose la connaissance de toutes les circonstances qui ont donné naissance aux usages, aux traités, de l'esprit qui a présidé à leur formation, des intérêts qu'ils ont ménagés ou compromis. Tel est l'objet de la science qui a reçu depuis longtemps le nom de *Diplomatie*.

« 3° *Cybernétique*. — Les relations de peuple à peuple, étudiées dans les deux sciences précédentes, ne sont que la moindre partie des objets sur lesquels doit veiller un bon gouvernement : le maintien de l'ordre public, l'exécution des lois, la juste répartition des impôts, le choix des hommes qu'il doit employer, et tout ce qui peut contribuer à l'amélioration de l'état social réclament, à chaque instant, son attention. Sans cesse il a à choisir, entre diverses mesures, celle qui est la plus propre à atteindre le but ; et ce n'est que par l'étude approfondie et comparée des différents éléments que lui fournit, pour ce choix, la connaissance de tout ce qui est relatif à la nation qu'il régit, à son caractère, ses mœurs, ses opinions, son histoire, sa religion, ses moyens d'existence et ses lois, qu'il peut se faire des règles générales de conduite qui le guident dans chaque cas particulier. Ce n'est donc qu'après toutes les sciences qui s'occupent de ces divers objets qu'on doit placer celle dont il est ici question et que je nomme *Cybernétique*, du mot *Cybernétikè*, qui, pris d'abord dans une acception restreinte pour l'art de gouverner un vaisseau, reçut de l'usage, chez les Grecs mêmes, la signification, tout autrement étendue, de l'*art de gouverner en général*.

« 4° *Théorie du pouvoir*. — Enfin, il nous reste à rechercher les causes qui ont amené l'établissement des divers gouvernements, qui les conservent et les ébranlent, qui produisent ou préviennent ces grandes crises qu'on appelle des révolutions ; à remonter jusqu'à l'origine du pouvoir et à examiner

les différents systèmes relatifs au principe même sur lequel il repose, tels que ceux du droit divin, de la souveraineté nationale, de la raison ou de la nécessité des choses, d'un contrat explicite ou tacite entre les peuples et ceux qui sont appelés à les gouverner. De là une dernière science du troisième ordre qui a pour but de résoudre ces grandes questions, et que je désignerai sous le nom de *Théorie du pouvoir.* »

VI

RELIGIONS.

La politique renferme les connaissances relatives à chacune des fractions de l'Humanité. Elle cherche à établir l'harmonie entre les nations, mais cette harmonie est superficielle, parce qu'elle ne considère les hommes qu'au point de vue de leurs ensembles, et dans les faits collectifs de leur activité. La religion, au contraire, quelle que soit sa forme, poursuit instinctivement ou ouvertement la réalisation des fins humanitaires et sollicite, individuellement, tous les hommes à constituer la grande famille humaine sous le gouvernement suprême d'une paternité mystérieuse et divine.

Au premier abord, apparait un antagonisme inconciliable entre les exercices de l'activité patriotique et de l'activité religieuse; celle-là affirme la nation, celle-ci semble la supprimer; l'une trace des frontières que l'autre méconnait. Cependant il ne sera pas difficile d'établir qu'elles peuvent et doivent coexister dans une parfaite harmonie.

Nous remarquerons d'abord que dans les ordres économique, disciplinaire et politique, les fins poursuivies par le peuple sont humanitaires. L'économie sociale, la guerre, la diplomatie ne connaissent pas de frontières, et si elles tracent sur le globe des démarcations douanières, stratégiques et politiques, elles le font en vue de nécessités temporaires, mais nullement en vue du but qu'elles poursuivent. Chaque peuple, en effet, prétend jouir de la terre entière; aspiration légitime quand il reconnait les droits de tous les autres peuples à la même jouissance, aspiration coupable quand il prétend les exclure de cette jouissance pour en garder seul le profit.

Les sociétés actuellement réparties sur la surface du globe sont constituées chacune en vertu d'une fonction nécessaire et d'un rôle particulier.

Elles répondent à des systèmes économiques et politiques en apparence contradictoires, mais qui sont destinés à satisfaire les différentes aspirations, à créer des milieux divers et conformes aux différentes exigences de l'homme social. Pour supprimer une société, il faudrait anéantir jusqu'au dernier, non-seulement les hommes qui la composent, mais les idées et les faits qui lui ont donné naissance. Les guerres et les révolutions n'ont fait que déplacer les milieux sociaux, mais elles n'en ont détruit aucun. La société babylonienne, chassée de Babylone en ruines, s'est reconstituée, tour à tour, sur différents points du globe; elle s'est affirmée à Rome, elle tend à s'affirmer à Paris. Tyr détruite s'est relevée dans Carthage, et Carthage, rasée jusque dans ses égouts, revit dans Londres. Ainsi, à travers les temps, les espaces et les catastrophes, les systèmes sociaux persistent en vertu des mêmes aspirations et reproduisent les mêmes faits.

Nous tournons donc dans un cercle vicieux lorsque nous cherchons comment une société pourrait fondre l'Humanité en elle-même ou se fondre dans l'Humanité. L'activité humanitaire est l'ensemble des activités sociales et elle résume ces fonctions; elle ne peut en détruire aucune sans se mutiler.

Mais, de même qu'un corps est plus robuste quand chacun de ses organes accomplit plus énergiquement sa fonction particulière, de même l'Humanité est plus prospère quand chacune des sociétés qui la composent, agit d'une manière plus conforme à son génie. Cependant, pour qu'il n'y ait pas conflit dans l'exercice de fonctions si diverses, il importe que ces fonctions aient conscience de l'unité qui les résume, c'est à dire de la pensée supérieure qui les dirige et de la conscience qui les inspire. Or, si la pensée de l'Humanité est la Science, sa conscience, c'est la Religion.

Envisagées au point de vue de l'Humanité et dans l'Humanité même, c'est à dire dans leur rôle social, la Science organise les fonctions dissemblables; la Religion, l'harmonie de ces fonctions. L'homme, que l'économie, la discipline, la législation et la politique tendent à assimiler à la molécule inorganique et définie d'un rouage de mécanisme, est considéré par la religion comme l'élément organique et universel d'une Humanité vivante où il circule et se transfigure sans cesse, développant, suivant les milieux, les puissances latentes qu'il contient en germe.

Ces considérations sont de la plus haute importance quand il s'agit de distinguer le rôle des différentes puissances sociales du rôle de la religion; celles-là utilisent l'homme, le façonnent, l'organisent, le dirigent, mais aussitôt qu'elles prétendent s'emparer de lui et dire : « Ceci est ma chose! » la religion intervient et dit : « Ceci n'est pas votre chose, c'est un prêt que

Dieu vous fait. Vous ne possédez l'homme qu'en vertu d'une délégation dont vous devez accomplir les clauses, et je ne sanctionnerai votre autorité que quand vous aurez reconnu l'autorité de Dieu. Méconnaître votre mandat, c'est voiler la paternité divine, c'est anéantir vos droits. Dès l'instant que l'autorité cesse d'être une tutelle, elle devient un despotisme, elle appelle la révolte ou la misère. » En effet, quand l'homme ne voit plus son père divin penché sur lui pour l'exciter à la lutte et le consoler dans la souffrance, il reste face à face avec la lutte et la souffrance, et refuse de marcher. Le corps social dont les éléments ont perdu leur virtualité tombe alors dans la décrépitude ou dans les convulsions.

C'est par des vérités si simples, et qui semblent aujourd'hui méconnues, qu'il faut aborder la plus vaste et la plus délicate des études sociales : l'étude des religions.

Nous nous contenterons d'indiquer ici les grands ensembles d'investigations auxquelles la religion donne lieu.

1° SÉBASMATIQUE (1).

Dans cette catégorie d'études nous comprendrons non-seulement, comme l'a fait Ampère, l'exposition des différents cultes, *hiérographie* (2), et l'interprétation de leurs rites, *symbolique*, mais aussi l'*hiérogénie* (3) ou naissance des religions, considérées dans leur origine purement sociale et dans les consécrations diverses qu'elles ont donné aux organisations, soit économiques ou disciplinaires, soit législatives ou politiques des différents peuples. Ici il faut, avec Ampère : « chercher dans la nature de l'esprit humain, dans l'imagination, dans le caractère et la passion des hommes ce qui a déterminé la forme qu'ont prise les fausses religions et les modifications qu'elles ont subies ; comment la plupart, mystérieuses et terribles d'abord, ont dégénéré en fables ridicules, puériles ou gracieuses, qui, perdant peu à peu toute influence sur la conduite des individus, n'ont presque plus été pour eux qu'un sujet d'amusement ; comment il est arrivé que les hommes aient cru honorer la divinité par des sacrifices humains, par des mutilations honteuses, par des rites infâmes. Il faut bien que cette aberration si singulière ait sa racine dans la nature de l'esprit humain, puisqu'on la retrouve chez presque tous les peuples de l'antiquité. C'est au philosophe de tâcher de l'expliquer en la liant à l'étude de toutes les circonstances que présente la pensée humaine, considérée, soit en elle-même, soit relativement aux

(1) De *sébasma*, culte.
(2) Description des choses sacrées, de *hiéros*, sacré et *graphé*, description.
(3) Origine des religions.

changements qu'on remarque suivant les lieux, les temps, dans le développement de l'intelligence, dans les sentiments et dans les passions des hommes. »

2° DES MODES RELIGIEUX.

Une fois édifiés sur les formes et l'esprit des différents cultes, sur les résultats que chaque religion a produits, il importe d'examiner quelle est la doctrine religieuse la plus conforme au développement de l'Humanité, non pas encore au point de vue de la foi, mais au point de vue de la raison, du rôle que l'action religieuse doit jouer dans les sociétés, et de l'harmonie humanitaire qu'elle est appelée à réaliser.

Controverse. — La comparaison et la critique des différentes religions sont de la plus haute importance, parce qu'elles peuvent seules nous décider au milieu de l'erreur et du doute, et quand nous n'avons d'autres lumières que celles de la raison, à faire corps avec un ensemble de croyants quelconques et à accomplir par là les fins supérieures auxquelles nous sommes appelés dans l'Humanité.

Attributions. — Toutefois, avant de se prononcer, il importe de se bien pénétrer du rôle de la religion dans les différents milieux humains. Chargée de les faire concourir à l'harmonie universelle, elle doit, avant tout, éviter d'introduire des éléments de perturbation dans les fonctions sociales. Il importe que le zèle religieux ne porte atteinte ni aux intérêts légitimes, ni à la force publique, ni à la liberté et aux droits de la vie civile, ni à la juste autorité des états.

But humanitaire. — Quand on aura déterminé le plus nettement possible ce qui n'est pas du ressort immédiat de la religion, on arrivera plus aisément à reconnaître son véritable caractère, qui est de poursuivre individuellement la perfection de tous les hommes en leur proposant un type suprême et en leur dévoilant sans cesse la splendeur des fins humanitaires qu'ils doivent réaliser. Les croyants apprendront ainsi qu'ils n'ont de violence à exercer que sur le moi et qu'ils doivent être tout charité pour le reste des êtres. Prêts à toutes les abnégations, à toutes les fatigues, à tous les sacrifices, impitoyables pour eux-mêmes, ils édifieront leurs semblables par leur exemple, ils partageront leurs maux, ils laisseront aux fatalités naturelles ou aux mécanismes sociaux le soin de réprimer, de frapper et de punir. Citoyens d'une société qui ne peut périr parce que ses membres possèdent la conscience de

leur immortalité; toujours utiles, puisqu'ils travaillent sans cesse et ne travaillent pas pour eux; toujours forts, parce qu'aucune terreur ne peut contraindre leur âme, ils pourront seuls accomplir le véritable rôle de l'homme social, qui est d'agir en vue de ses semblables.

3° THÉOLOGIE.

Il faut entendre par Théologie la science qui cherche à déterminer les mobiles de notre activité sociale d'après un idéal supérieur à ce que nous enseignent l'expérience et l'étude. Il est évident que cette science repose sur une révélation ou sur des notions communiquées par la charité divine. Ces notions existent au fond de toutes les âmes humaines, puisque chacune d'elles sent que rien n'est et n'a été parfait dans le milieu où elle agit, et qu'elle éprouve le besoin impérieux de modifier ces milieux.

La perfection n'est pas dans ce monde; elle n'y existe pas puisque l'on y souffre, elle n'y a jamais existé : car ce qui est parfait ne peut déchoir, et ce qui aurait été parfait une fois le serait éternellement. Or, si nous n'avions pas l'instinct d'un monde parfait, nous n'aurions aucun désir de modifier et d'améliorer le nôtre; l'instinct de ce monde parfait est précisément cette partie essentielle de l'être à laquelle s'adresse la révélation.

La révélation, considérée sous ses différentes faces, est économique, disciplinaire, législative ou dogmatique, administrative, sociale et humanitaire; elle nous apparaît avec ses caractères humains; — considérée dans son ensemble et dans son harmonie même, elle est divine. Comme nous avons été conduit, dans chacun des chapitres qui constituent la sociologie, à l'examiner sous chacun de ses prospects spéciaux, il restera à l'étudier ici dans son essence et son unité divines.

VII

UTOPIES.

Sous ce titre nous avons voulu comprendre l'examen de tous les systèmes humanitaires échafaudés sur des aperçus sociologiques incomplets. Ces systèmes démontreront plus efficacement que toutes les controverses, l'impuissance de l'homme à réaliser le bonheur de l'Humanité en cherchant la perfection dans l'Humanité même. Chacun d'eux renferme un double enseignement : celui des erreurs auxquelles nous sommes conduits quand nous

prétendons résoudre un problème avec des données insuffisantes; celui des vérités partielles que chaque utopie renferme.

On pourrait classer les utopies en cinq grandes catégories :

1° Les utopies naturelles, qui reposent sur l'instinct grossier et excluent la spéculation intellectuelle, la morale, l'esthétique, la théognosie et les enseignements sociologiques;

2° Les utopies romanesques, qui admettent tous les dévergondages de l'esprit dans la sollicitation et dans l'exercice de notre activité physique;

3° Les utopies disciplinaires, qui suppriment l'individu, la famille et le groupe pour les faire entrer comme fraction infinitésimale dans un immense mécanisme humanitaire;

4° Les utopies politiques, qui prétendent soumettre le globe à une même administration, supprimer les nations et fondre les différentes formes de gouvernement dans une forme unique, soit par la constitution d'une hiérarchie exclusive, soit par l'exclusion de toute hiérarchie;

5° Les utopies théocratiques, qui investissent le croyant du droit d'opprimer ses semblables, et prétendent substituer la violence de l'homme à l'éducation paternelle de Dieu.

Cet ensemble d'études constitue à la fois l'histoire et la critique des sciences sociologiques, mais les divisions qui en résultent ne sont pas fondées en réalité, car chaque utopiste est fatalement entraîné à placer au second plan ou à sous-entendre les faits et les vérités que sa synthèse semble exclure.

VIII

MÉTHODE.

Nous avons distribué les différents ensembles des connaissances sociologiques dans des catégories plus artificielles que réelles, mais cette première répartition était une transition indispensable à la division naturelle de la sociologie, qui comprend en réalité trois catégories capitales d'études relatives : à la vie végétative, à la vie active, et aux aspirations des sociétés.

1° ÉCONOMIE GÉNÉRALE.

Les phénomènes de la vie végétative des sociétés sont du ressort de l'*Economie générale*, qui étudie tour à tour les éléments, les lois et les fins du bien-être universel.

Cerdoristique. — Les éléments du bien-être universel sont les individus; la force qui les groupe est celle du commerce, qui stimule la production, accélère la circulation et facilite la consommation efficace des résultats de l'activité humaine. Or le grand mobile du commerce est le *gain* (*cerdos*), et la *mise en lumière* (*oristikê*) des moyens de le réaliser constitue la théorie même du commerce. Nous donnerons donc avec Ampère le nom de *Cerdoristique* à la science qui embrasse les théories de l'arithmétique sociale, des statistiques économiques, de la comptabilité générale et de l'exploitation des produits quelconques de l'activité humaine.

Chrématologie. — Mais le gain n'est qu'un mobile de bien-être égoïste. Il méconnaît trop souvent les droits d'autrui, et si (d'après quelques paradoxes) il suffisait à constituer des sociétés, ces sociétés reposeraient sur le monopole et tendraient à l'asservissement de tous les hommes au profit d'un seul. La fin suprême de la cerdoristique est de transformer un milliard de personnes en un milliard d'animaux domestique, moins une seule d'entre elles, qui jouirait réellement de l'existence.

Cette conclusion, tout absurde qu'elle soit, engendre les appréhensions qui donnent naissance aux émeutes: « Si vous ne voulez pas avoir de niveleurs, a dit le grand apôtre de la Chrématologie, Rossi, faites des économistes. »

Ce mot profond renferme ce qu'on aurait appelé, au dernier siècle, « la raison suffisante » de la science des richesses. Reprenant en sous-œuvre la théorie cerdoristique, la chrématologie démontre en effet que le bien-être des sociétés repose sur des lois impersonnelles et essentiellement libérales. L'ensemble de ces lois constitue un code en tête duquel on peut inscrire comme axiome fondamental: Tous les travailleurs sont égaux devant la théorie économique.

Cœnolbologie. — La chrématologie comporterait la fin des doctrines économiques si les sociétés avaient agi conformément à ses enseignements, mais il n'en est pas ainsi dans l'ordre actuel, car l'économie, non-seulement des nations, mais même des classes et des corporations, repose sur des priviléges qu'on ne peut supprimer sans provoquer des crises effrayantes. Il importe donc d'indiquer le but final auquel on doit tendre, non pour le réaliser par une violence quelconque, gouvernementale ou révolutionnaire, mais pour y marcher par des transitions prudentes et des améliorations successives dans les milieux sociaux. En attendant, il est de la dernière importance d'introduire dans l'ordre économique les enseignements et les lois de la morale, et, au besoin, de les imposer aux individus. C'est cette violence salutaire que la législation relative aux biens et aux transactions commerciales tend à réaliser

de nos jours, non plus au nom d'un système ou d'une personne, mais au nom de la société entière.

2° POLITIQUE GÉNÉRALE.

C'est à juste titre que les Grecs comprenaient sous le titre de Politique les différents modes de la vie active des sociétés. La politique en effet embrasse l'étude de toutes les fonctions que l'homme accomplit en vue d'une tutelle sociale, soit qu'il combatte, soit qu'il maintienne l'ordre, soit qu'il juge, soit qu'il gouverne.

Les trois divisions que nous avons à étudier formeront donc ici trois paragraphes de la méthode sociologique, et elles garderont leurs titres généraux :

1° *Force publique* (Art militaire et Police intérieure) ;

2° *Législation* (Nomographie, Jurisprudence et Théorie des lois);

3° *Politique proprement dite* (Administration, Etat, Gouvernement).

3° COMMUNIONS.

Les aspirations des sociétés sont économiques ou politiques, mais on ne saurait les considérer comme sérieuses tant qu'elles ne poursuivent pas sciemment la réalisation des fins humanitaires. Cependant il faut ouvrir cette série par l'étude des communions de groupes avant de passer aux religions et aux utopies.

1° COMMUNIONS DE GROUPES.

On doit entendre par communions de groupes les associations plus ou moins occultes qui se proposent d'appliquer une doctrine quelconque de fraternité à des fins humanitaires poursuivies en vue d'un profit commun; il n'est pas nécessaire de faire constater que ces communions sont plus dangereuses que nuisibles pour l'Humanité, parce qu'elles sont exclusives et qu'elles ont pour conséquences nécessaires la prédominance d'un groupe sur tous les autres.

2° RELIGIONS.

Nous comprendrons sous le titre de Religion les communions seules qui s'affirment au grand jour, pratiquent publiquement leur culte, acceptent la controverse, appellent tous les hommes dans leur sein, et ne reconnaissent qu'une même autorité divine pour toute l'Humanité. Nous rechercherons ensuite quelle est la doctrine la moins perturbatrice, la plus féconde en énergies morales, la moins exclusive et la plus conforme aux destinées de l'Huma-

nité; enfin, nous demanderons à la révélation si cette doctrine n'a pas son origine dans un germe divin dont la fécondation s'est ensuite accomplie à travers des évolutions nécessaires et normales jusqu'à ce qu'elle ait porté ses fleurs et produit ses fruits. Assurément si une telle religion existe, il est du devoir de tous les hommes de la reconnaître et de la pratiquer dans la mesure de leurs forces et de leurs aptitudes; c'est par là seulement qu'ils accompliront la plus noble des missions de leur existence et réaliseront cette fraternité universelle qui doit faire un jour de l'Humanité entière une même famille régie par la paternité divine.

3° UTOPIES.

Il reste ici à examiner les systèmes d'ensemble qui, après avoir fait table rase de la tradition, des faits et des révélations, prétendent apporter à l'Humanité un bonheur qui n'est pas de ce monde; car il est évident pour tout homme sérieux que la prospérité sociale repose sur l'effort individuel, et que, depuis le plus humble des prolétaires jusqu'au plus puissant des monarques et au plus vénéré des pontifes, la vie humaine n'est qu'une succession d'épreuves. L'examen des utopies sera donc à la sociologie ce que l'exposition des systèmes est à la noologie, ce que la planéthique est à la morale.

Il faut d'ailleurs rendre justice aux utopistes. C'est à eux qu'on doit, dans les temps de doute et d'incrédulité, l'initiative religieuse qui procède d'abord par des extravagances et finit par la confession de vérités supérieures. Ils croient tous à la nature angélique de l'homme, réveillent en lui ses plus nobles aspirations et sollicitent ses plus généreux mobiles. Le sage doit les considérer comme les ouvriers inconscients de la providence divine.

KYRIOLOGIE.

DIGNITÉ, AUTORITÉ, INITIATIVE DE L'HOMME SOCIAL.

I

DIVISIONS.

La sociologie étudie les organisations sociales dans leur ensemble; mais nous avons déjà pu voir que ces organisations empruntent leur valeur aux éléments qui les composent. Les groupes, si nombreux et si disciplinés qu'on les conçoive, n'ont qu'un sentiment éphémère de leur existence; et, de même qu'un sculpteur peut pétrir un chef-d'œuvre dans de la boue ou de l'airain, un législateur peut faire une société admirable avec des citoyens frivoles ou sérieux. L'empreinte persiste plus ou moins suivant la qualité de la matière qu'elle a façonné. Un corps social n'est robuste que lorsque chacun de ses membres accomplit sa fonction, non-seulement avec énergie, mais en pleine connaissance de cause et avec la conscience de sa dignité jusque dans les conditions en apparence les plus humbles, et souvent les plus méritantes.

Il est donc de la dernière importance que chacun de nous soit édifié aussi complètement que possible sur la fonction qu'il est appelé à remplir; qu'il s'y exerce non-seulement au point de vue de la vérité, mais de la morale et de cette esthétique sociale qu'on appelle le savoir-vivre ou l'art de plaire, art dont tout le secret consiste à agir conformément aux inspirations de la charité divine qui fait notre grâce et notre gloire.

Quand l'homme sait ce qu'il fait, on le respecte; quand il exécute son devoir avec conscience, on l'estime; quand il agit avec son semblable comme

avec un autre lui-même dans une communion fraternelle dont la paternité divine est le lien, on l'aime. Le pire des milieux humains, où l'activité individuelle s'inspirerait constamment de l'amour du prochain, serait un paradis ; la meilleure des organisations sociales, où la charité serait méconnue, un enfer.

Nous répartirons d'abord les connaissances relatives aux différents ordres de l'activité sociale en classes correspondant au célibat, à la famille, au groupe, à la commune, à l'état et à l'Humanité. Chacune de ces classes comprend des modes distincts d'activité qui doivent faire l'objet, chacun, d'un ensemble d'études spéciales.

Comme il s'agit ici de monographies particulières à tous les états, à toutes les conditions, à toutes les fonctions de l'homme, nous ne pourrions, sans élargir démesurément le cadre d'un plan raisonné, entrer dans une indication suffisante des faits, même principaux, de la Kyriologie. Nous nous contenterons de répartir les différents modes de l'activité de l'homme dans la société suivant le développement normal, et en quelque sorte historique, de ses instincts sociaux.

II

MONOSCHISME.

Nous avons donné le titre de monoschisme (du grec *monos-schisma*, état de celui qui vit *seul et dans la séparation*) à tous les modes d'existence sociale où l'individu s'isole de la famille et n'exerce ni profession ni position sociale.

L'homme dans l'état de monoschisme n'est pas étranger à la société, car il vit à sa charge ; la société le supporte à la condition qu'il reconnaîtra plus tard, par des services quelconques, les sacrifices qu'il lui impose.

1° MONOSCHISME FAUVE.

Il faut ranger dans la catégorie du monoschisme fauve tous les individus qui n'ont aucune conscience de la solidarité sociale et qui vivent, aux dépens de leurs semblables, comme les bêtes fauves vivent dans le règne animal. Ils sont les ennemis de la société qui tend à les circonscrire et à les parquer dans des milieux définis ; car, par une fatalité providentielle, leurs appétits et leurs passions les entraînent vers les cloaques que tous les groupes bien organisés ménagent au vice et à la débauche.

2° MONOSCHISME D'INCUBATION.

Le monoschisme d'incubation est l'état d'isolement que recherche l'homme studieux pour se préparer à une fonction sociale, élaborer une œuvre intellectuelle morale ou esthétique, ou s'exercer à un sacerdoce. Il est inutile de dire que cet état est transitoire, qu'il est le plus profitable de tous à la société, quoiqu'il semble improductif au premier abord, comme tous les états d'incubation.

3° MONOSCHISME MILITANT.

Il faut enfin comprendre sous le titre de monoschisme militant, tous les états de dévoûment dans lesquels l'homme, cherchant à réaliser un progrès quelconque dans l'ordre économique ou humanitaire, accepte un rôle héroïque, et se sépare de ses semblables pour ne pas les engager dans les souffrances et dans les dangers auxquels il s'expose.

III

GYNÉTIQUE.

L'amour, principe de toute solidarité, parce qu'il détache l'homme de lui-même et le sollicite à l'héroïsme, l'amour a son principe dans la femme.

La femme est un centre auquel il faut ramener les plus puissants mobiles de l'activité individuelle. Suivant que nous concevons la femme digne ou vile, cette activité poursuit des fins plus ou moins nobles; on comprend donc que la prospérité des groupes dépende de l'état dans lequel la femme y est tenue.

La femme étant la base de la famille, qui est l'élément organique des sociétés, l'étude des différentes conditions de la femme constitue un ensemble de connaissances d'une importance capitale que nous appelerons *gynétique*, du grec *Gyné*, femme.

Les deux conditions extrêmes de la femme sont l'esclavage et l'indépendance complète; elles sont également dangereuses pour la société, qui repose sur l'état de mariage dans lequel la femme est à la fois soumise et vénérée.

1° DOULOGYNIE.

Sous ce titre, qui signifie *Etat de la femme esclave*, il faut étudier les liens sociaux qui se nouent avec violence pour se relâcher presqu'aussitôt. La

femme conquise par la force, possédée par la force, n'a plus, quand l'amour brutal s'est assouvi, d'autre valeur que celle d'un objet précieux que l'on emprisonne jusqu'à ce qu'il cesse d'être l'objet d'une convoitise étrangère; on l'utilise alors comme un animal domestique.

2° HÉTAÏRISME (1).

L'Hétaïrisme implique l'étude de tous les milieux dans lesquels la femme dispose d'elle-même suivant son caprice. Cet état diffère du précédent en ce que, au lieu d'être la propriété plus ou moins contestée de l'homme, la femme tombée dans le monoschisme fauve s'affranchit de tout lien et se considère elle-même comme une chose. Sa dignité n'est qu'apparente et les milieux sociaux qui se constituent autour d'elle cachent les corruptions les plus hideuses sous les dehors d'une prospérité fantastique. L'hétaïrisme est le foyer de toutes les pestilences sociales, de tous les vices, de tous les crimes secrets, la stérilité mutuellement consentie, l'avortement, l'abandon complet des enfants, l'infanticide, etc. Les sociétés ainsi constituées ne persistent pas par elles-mêmes, mais elles se recrutent sans cesse d'éléments qu'elles détachent des sociétés saines par la séduction, le vice et le libertinage. En général, l'hétaïrisme se présente aux âmes vulgaires comme l'état social par excellence parce que l'idée de devoir en est supprimée; mais, du jour où son empire s'étend sur une nation, il la détruit et s'évanouit avec elle. S'il pouvait jamais gagner l'Humanité entière, l'Humanité serait effacée de la surface du globe.

3° MARIAGE ET FAMILLE.

Il n'y a donc qu'une solution au problème gynétique : c'est le mariage, que toutes les législations ont protégé et que toutes les religions ont revêtu d'un caractère sacré. Dans le mariage, l'homme et la femme se complètent l'un par l'autre, investis d'une même dignité, régis par une même morale, jouissant des mêmes droits, mais accomplissant des devoirs différents.

Consacré par la religion, le mariage soumet l'époux à Dieu, l'épouse à l'époux, l'enfant aux parents. Consacré par la société, il garantit à l'homme son autorité de chef de famille, à la femme ses privilèges, à l'enfant les bénéfices d'une tutelle intelligente. Il faut donc étudier ici les droits et les devoirs de la paternité et de la maternité, les relations des enfants avec les parents et des enfants entre eux. La piété filiale élève l'enfant à Dieu et l'assujettit à la loi, la charité fraternelle le prépare à la solidarité humanitaire.

---

(1) État de la femme qui dispose d'elle-même; en grec, *hétaïra*, femme libre, courtisane.

IV

PROFESSIONS.

Sous le titre de professionnat il faut comprendre toutes les professions que l'homme peut remplir dans le groupe et dont il retire un profit. La profession se distingue de la fonction en ce qu'elle peut être choisie par l'individu lui-même, sans qu'il ait besoin pour l'exercer d'une délégation sociale. Il est, à la vérité, des états qu'on ne peut exercer sans avoir satisfait à certaines exigences, tels sont ceux de médecin, d'instituteur, etc., mais tant que ces états ne sont pas compris dans une hiérarchie, ils ne peuvent être considérés comme fonction et rentrent dans la catégorie des professions.

Les professions se divisent en quatre classes : L'office, le métier, la gestion, les professions libérales. Chacune d'elles doit être étudiée au point de vue : 1° de son objet ; 2° des relations qu'elles établissent ; 3° des fins auxquelles tendent ceux qui les exercent.

1° L'OFFICE.

L'office comprend les différents états de domesticité, depuis la servitude jusqu'au parasitisme. Dans les professions officieuses, la personne n'assume guère de responsabilités, car elle n'agit pas pour elle. L'objet est généralement indéterminé, mais les rapports de domestique à maître y sont de la dernière importance.

2° LE MÉTIER.

Dans le métier, l'objet, au contraire, est capital ; il s'agit en effet de produire en vue du profit. Cependant, quand les métiers sont commerciaux, ils réclament, en raison des relations qu'ils nécessitent, une étude particulière de la part de ceux qui veulent conserver et augmenter leur clientèle.

3° LA GESTION.

La gestion comprend toutes les professions qui ont trait à l'administration des biens privés, soit propres, soit étrangers. Elle constitue une sorte de tutelle matérielle de nos intérêts ou des intérêts d'autrui. A ce point de vue, l'état de propriétaire est une profession que les riches oisifs laissent souvent à la charge de leurs intendants.

4° PROFESSIONS LIBÉRALES.

Les professions libérales peuvent se diviser en deux classes :

Les professions libérales autorisées, pour lesquelles il faut obtenir un brevet de capacité; telles sont celles qui ont trait à la médecine, à la jurisprudence et à l'enseignement.

Les professions libérales proprement dites, telles que les professions relatives aux arts et aux lettres.

V

FONCTIONS.

L'homme, en qualité de citoyen, est tenu de sauvegarder non-seulement la vie et les intérêts de ses semblables, mais aussi les intérêts du groupe auquel il appartient. Il peut, dans le premier cas, agir en vertu de son initiative, particulièrement lorsqu'il faut conjurer un danger pressant et imprévu. Dans le second, il n'a droit d'agir qu'en vertu d'une fonction définie et comme membre ou mandataire d'un corps constitué quelconque.

La fonction prend naissance dans l'accomplissement d'un devoir hiérarchique. Mais on ne doit pas oublier que la sociologie a déjà déterminé les mécanismes hiérarchiques, et que l'objet de la kyriologie est d'étudier ces fonctions, non pas au point de vue de leurs attributions, mais de la manière dont il faut s'en acquitter quand on les remplit.

Les fonctions sont : militaires, civiques, judiciaires et administratives; dans ce dernier cas, elles peuvent être considérées, sous le titre d'emplois, comme relevant d'administrations particulières.

Nous n'avons pas besoin d'établir ici de divisions générales, car elles sont toutes tracées dans la société. Ces divisions, d'ailleurs très-complexes, seront tracées dans l'exposition proprement dite.

VI

GOUVERNEMENT.

Le rôle des individus dans le gouvernement est consultatif, législatif et exécutif. Il consiste, d'un côté, à surveiller et à améliorer le mécanisme

social; de l'autre, à l'utiliser en vue des fins humanitaires. Ces rôles sont ceux des mandataires de la nation, des chefs et des autorités supérieures de toute espèce constitués en corps délibérants et législatifs, et enfin les rôles exécutifs des ministres et du prince.

Les hommes politiques doivent être répartis en trois classes, suivant la nature de leur mandat et le genre d'autorité qu'il leur confère. Ces trois classes correspondent aux systèmes si bien définis par les titres de *démocratie*, d'*aristocratie* et d'*autocratie*. Il n'y a pas de société où ces trois systèmes n'aient leurs représentants ; aussi, pour qu'un état soit bien gouverné, faut-il que chacun d'eux ait la conscience de son rôle et exerce pleinement son autorité dans les sphères politiques qui lui sont assignées. Les uns comme les autres sont malheureusement enclins à sortir de leur domaine. L'histoire et la réflexion nous enseignent que les usurpations démocratiques entraînent les dissolutions sociales, les usurpations aristocratiques les discordes civiles, les usurpations autocratiques les guerres étrangères. De quelque nature qu'elles soient, ces usurpations aboutissent tôt ou tard aux mêmes conséquences, l'asservissement et la décadence de la nation où elles se perpétuent.

Comme ici il n'y a pas de puissance supérieure au gouvernant, il appartient à l'ensemble des citoyens d'incliner la balance en faveur du système opprimé ; et c'est en réalité ce qui se produit quand les situations deviennent trop tendues. On passe alors de la licence à la servitude, sans garder un juste équilibre entre des réactions extrêmes. Contentons-nous de signaler la nécessité de cette pondération, et de l'indiquer comme le point de départ de toute théorie politique.

VII

SACERDOTAT.

Ce n'est qu'après avoir pris connaissance des droits et des devoirs de l'homme dans toutes les conditions sociales, qu'on peut se consacrer à un sacerdoce efficace ; car, lorsqu'il s'agit de réaliser un progrès humanitaire, il faut éviter de perdre un temps précieux à refaire ce qui existe et ce que l'on ignore, et encore moins à proposer des bouleversements sociaux en vue de réorganisations radicales.

Les sacerdoces sont de divers ordres :

1° Les sacerdoces positifs qui poursuivent une découverte ou une amélioration quelconque dans l'ordre physique ;

2° Les sacerdoces de l'ordre moral qui ont pour objet d'encourager, d'éclairer et de fortifier les âmes.

3° Les sacerdoces de l'ordre social, tour à tour économiques, politiques ou religieux.

Il est impossible de présenter une idée satisfaisante des sacerdoces dans un simple plan. Les missions auxquelles ils donnent lieu sont si complexes qu'il faut, comme nous l'avons fait pour la Politique, renvoyer le lecteur à l'exposition proprement dite. En effet, à mesure qu'on s'élève dans la hiérarchie des rôles, l'activité de la personne s'exerce en tant de manières et sur tant de points à la fois, qu'elle semble dépasser non-seulement les forces, mais même les spéculations de l'intelligence humaine.

VIII

MÉTHODE.

Nous ramènerons, comme nous l'avons fait dans la Sociologie, les six catégories kyriologiques à trois ensembles principaux d'études, comprenant l'examen et la théorie des différents rôles :

De l'homme vivant à l'état libre dans la société ;

De l'homme dans la famille ;

De l'homme dans l'accomplissement de fonctions sociales.

1° MONOSCHISME.

Le titre de Monoschisme, que nous avons adopté dans le plan, sera conservé dans notre classification des Connaissances humaines, car celui de célibat ne peut pas s'étendre à tous les états où l'homme (et particulièrement celui qui poursuit le bonheur chimérique de la vie égoïste) s'isole dans la société.

Les divisions introduites dans le monoschisme persisteront sans modifications.

2° FAMILLE.

La famille n'existe pas à l'état fauve ; elle est éphémère dans les milieux où la femme est esclave ; elle est artificielle dans ceux où la femme s'affranchit de tout devoir. Les hommes issus de ces milieux sont impropres à la constitution des sociétés.

La famille fondée sur le mariage est seule féconde en éléments vivaces, parce qu'elle peut seule former des citoyens; il ne sera pas difficile de démontrer que c'est sur l'indissolubilité des liens de famille que repose la cohésion sociale.

3° FONCTIONS SOCIALES.

Sous le titre de fonctions sociales nous répartirons les professions, les fonctions publiques, le gouvernement et les sacerdoces, en trois divisions générales :

1° Les fonctions libres, comprenant les offices, les gestions et les professions où l'homme agit en vue d'un profit personnel;

2° Les mandats, comprenant les fonctions publiques, administratives ou gouvernementales;

3° Les sacerdoces, où l'homme fait abnégation de lui-même et se dévoue pour l'Humanité.

ÉDUCATION.

ENFANCE. — ADOLESCENCE. — MATURITÉ.

I

PRÉLIMINAIRES.

C'est une erreur grossière, et malheureusement trop répandue, de croire que l'éducation commence à l'âge où l'enfant sait parler et finit à l'âge où il peut procréer. L'éducation commence avec l'existence et, presque toujours, n'est pas finie avec elle. En tous cas, pour les privilégiés, elle se prolonge au delà de la trentaine, qui est la moyenne de la vie de l'homme actuel.

Il n'y a pas de problème plus important, il n'y en a pas de plus mal compris que celui de l'éducation; il n'y en a pas de plus difficile à présenter sous un point de vue sommaire. On croit avoir tout fait quand on a façonné un être humain à une fonction; mais, entre l'accomplissement mécanique et l'intelligence de cette fonction, il y a un abîme. Qu'est-ce donc entre l'état d'enfant et celui d'homme? Interrogeons les plus laborieux et les plus éprouvés; combien, à travers les épreuves de la lutte, les fièvres de l'étude, les angoisses de responsabilités qu'ils ont prématurément assumées, combien en est-il qui n'aient pas gardé quelques hochets de leur enfance? Combien sont parvenus à conformer leur conduite à la sagesse la plus humble? Hélas, tous nous pouvons dire avec Horace :

Video meliora, proboque:
Deteriora sequor.

Je vois le mieux, j'y applaudis, et je m'abandonne au pire.

Mais, sans aller si loin, on a bientôt fait le compte des hommes qui sont sortis de l'instinct pour parvenir à la réflexion? Que d'activités tournoient fiévreusement dans les tourbillons sociaux qui ne se retrouveraient pas dans le silence et dans la solitude? Nous recherchons l'étourdissement, l'ivresse et l'erreur. Les temps ne sont pas changés depuis que Lafontaine émettait cet aphorisme aussi vieux que le monde :

L'homme est de glace aux vérités
Il est de feu pour le mensonge.

Cette disposition d'esprit tient à l'éducation. Tous les hommes sérieux le comprennent, et les remaniements qu'on opère chaque jour dans l'instruction publique, les systèmes, malheureusement frivoles, dont on s'engoue dans l'éducation privée, témoignent assez que tous les efforts sont tendus aujourd'hui vers un même but : former des hommes éclairés et vertueux.

Nous n'avons pas mission de proposer un nouveau programme d'éducation dans une exposition des connaissances humaines, et, pour ne pas être accusé de vouloir innover dans un ordre si complexe et si délicat, nous nous sommes conformé en principe, au plan tracé par Ampère. Il consiste, nous l'avons dit, à exposer tous les systèmes éducatifs qui ont été ou sont en cours dans l'Humanité, à rechercher les aptitudes, à constituer une méthode d'enseignement, à dresser l'enfant à la réflexion, au travail, à la lutte, au dévoûment. Mais il sera nécessaire, et c'est ce qu'Ampère n'a pas signalé, de compléter cette étude par une analyse aussi complète que possible des différents états physiologiques, intellectuels et psychologiques de l'homme à ses différents âges. Il faudra également examiner dans quelles limites l'Education doit se renfermer quand elle a pour but d'utiliser l'homme en qualité de citoyen; à quelles fins elle doit tendre lorsqu'elle le considère comme un être immortel et relevant d'une autorité supérieure à toutes les puissances humaines.

Il y aura donc trois grandes catégories à introduire dans l'ensemble des connaissances finales que nous avons comprises sous le titre général d'éducation : l'éducation de l'enfant, l'éducation du citoyen, l'éducation de l'homme.

Nous allons indiquer sommairement les divisions sur lesquelles reposent ces trois séries sans entrer dans des considérations trop complexes pour un plan raisonné, puisqu'elles tiendront déjà une place considérable dans l'Exposition proprement dite.

II

PÉDAGOGIE.

La pédagogie comprend l'ensemble des connaissances dont Ampère a tracé le plan dans son *Essai sur la philosophie des sciences;* elle procède par l'examen de tous les systèmes proposés ou suivis relativement à l'éducation des enfants : *Pédiographie;* — elle recherche comment on peut déterminer les aptitudes et les développer : *Idioristique;* — elle discute la méthode générale qu'il faut suivre dans l'enseignement pur : *Mathésionomie;* enfin elle soumet ces différents groupes à une théorie générale qui constitue, pour nous, deux catégories capitales : la Discipline et l'Éducation supérieure.

III

DISCIPLINE.

L'éducation pédagogique n'est en réalité qu'une éducation préparatoire dont on perd bientôt les bénéfices quand on concentre son intelligence et son activité dans une fonction sociale. L'élève tourne alors à la machine, et la société, qui a besoin de beaucoup de spécialistes et de peu d'intelligences, favorise involontairement l'abdication que les hommes font de leur initiative. Elle est la première à en souffrir lorsqu'il faut combler les vides qui se déclarent dans les classes supérieures. L'aphorisme : « Tel brille au second rang qui s'éclipse au premier » est malheureusement aussi vieux que le monde.

C'est donc un problème capital que celui de l'éducation des citoyens quand on l'examine à la fois au point de vue de son objet et de ses fins. Cette éducation se résume en théories générales que nous nous contenterons de mentionner ici; ce sont :

1° La Théorie de l'éducation disciplinaire;

2° La Théorie des aptitudes développées par les mécanismes sociaux;

3° La Théorie des grades.

La première de ces théories a pour objet de dresser l'homme à l'accomplissement rigoureux des fonctions sociales; la seconde, de déterminer la fonction à laquelle il est le plus apte; la troisième, de rechercher par quelle méthode il peut se développer en vue de responsabilités plus élevées et plus complexes.

IV

ÉDUCATION SUPÉRIEURE.

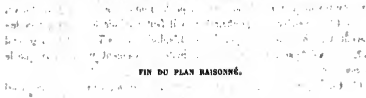
On arrivera de la sorte à reconnaître la nécessité d'une Éducation supérieure qui prépare chaque homme à l'universalité des fonctions, en réprimant ses présomptions, en sollicitant son activité intellectuelle par les jouissances exquises de l'ordre esthétique, en lui rappelant enfin que, si misérable que soit son rôle humain, il l'accomplit en présence et comme face à face de son père divin, qui peut seul le glorifier suivant ses œuvres et lui donner sans restrictions les récompenses qu'il ambitionne.

L'Éducation supérieure devra donc embrasser les théories :

1° Du développement moral, qui soumet spontanément l'homme à l'entier accomplissement du devoir en lui démontrant que les fonctions sociales ne sont en réalité que des dévoûments;

2° Du développement esthétique, qui entretient, utilise et satisfait provisoirement l'activité de l'homme en dehors de son exercice fonctionnel;

3° Du développement religieux, en dehors duquel il n'y a aucune persistance dans le dévoûment et aucun intérêt sérieux à exercer des facultés et des vertus dont nous ne retirons pas un profit immédiat.



FIN DU PLAN RAISONNÉ.



NES

NNAISSANCES HUMAI

SOUS

hors de l'homme et de ses semblables.

1 Théorie des
2 Théorie des
3 Théorie des
4 Géométrie
5 Analyse, ou
6 Théorie des
7 Mouvements
8 Forces.
9 Théorie des
10 Théorie de
11 Théorie des
12 Mécanique
13 Fluides.
14 Solides.
97 Glossolog
98 Bibliolog
99 Philosoph
100 Archéolo
101 Mytholog
102 Critique
103 Biograph
104 Biograph
105 Biograph
106 Ethnolog
107 Diégéma
108 Histoire
109 Cerdorist
110 Chrémat
111 Cœnolbo
112 Force pu
113 Législati
114 Gouvern
115 Commun
116 Religions
117 Utopies.
118 Monosc
119 Monosch
120 Monosch
121 Doulogyn
122 Hétairism
123 Famille.
124 Professio
125 Fonction
126 Sacerdoc
127 Pédiogra
128 Idioristiq
129 Mathésio
130 Théorie d
131 Théorie d
132 Théorie d
133 Théorie d
134 Théorie d
135 Théorie d

LÉGENDE DU TABLEAU SYNOPTIQUE

DONNÉES GÉNÉRALES

En réunissant, au début de l'Exposition proprement dite, dans un tableau synoptique, l'ensemble des connaissances humaines, nous avons voulu que le lecteur pût embrasser d'un seul coup d'œil tous les groupes scientifiques, reconnaître leurs rapports et constater l'harmonie dans laquelle ils sont unis.

Ce tableau comprend deux classifications, celle d'Ampère, qui nous a servi de point de départ, et celle de l'Exposition générale des connaissances humaines proprement dite.

La méthode commune à ces deux classifications consiste à grouper les connaissances humaines par voie de déduction, de telle sorte que, la première science se suffisant à elle-même, la seconde emprunte ses vérifications à la première, la troisième à la seconde, etc. On voit donc que les sciences sont disposées ici, non pas dans l'ordre de leur importance, mais dans l'ordre qui permet de les acquérir avec le plus de promptitude et de clarté.

CLASSIFICATION D'AMPÈRE

La classification d'Ampère repose sur cette idée que l'intelligence de l'homme commence par constater les faits, puis leurs rapports ; en étudie ensuite les variations, et pénètre enfin dans les arcanes de la science ; de là quatre points de vue :

1° L'*autoptique* (du grec *autos*, l'objet même — *optomaï*, je vois), qui constate nettement les phénomènes ;

2° Le *cryptoristique* (de *cryptos*, caché — *oristikos*, qui détermine), dans lequel on reconnait isolément la cause immédiate de chaque phénomène ;

3° Le *troponomique* (de *tropos*, changement — *nomos* loi), qui étudie les variations des phénomènes et en établit les lois ;

4° Le *cryptologique* (de *cryptos*, caché — *logos*, discours), qui recherche les causes générales et profondes.

Ampère divise les sciences en deux règnes : celui de la nature et celui de la pensée ; puis, chacun de ces deux règnes en quatre embranchements qui sont :

Pour le premier : 1° les sciences mathématiques ; 2° les sciences physiques ; 3° les sciences naturelles ; 4° les sciences médicales ;

Pour le second : 1° les sciences philosophiques ; 2° les sciences nootechniques ; 3° les sciences ethnologiques ; 4° les sciences politiques.

Enfin, chacun de ces embranchements donne naissance à deux sous-embranchements et à quatre sciences du 1er ordre, qui se subdivisent elles-mêmes chacune en deux sciences de 2e ordre, pour se résoudre en quatre sciences de 3e ordre.

Ce procédé, très-simple comme méthode, devient très-difficile dans l'application, et Ampère, en établissant que les quatre points de vue se retrouvent dans toutes les connaissances humaines « n'entend pas dire que ce soit toujours identiquement de la même manière. » En effet, les cadres qu'ils constituent aux sciences sont souvent plus artificiels que naturels.

CLASSIFICATION DE L'EXPOSITION GÉNÉRALE DES CONNAISSANCES HUMAINES.

L'expérience nous a démontré qu'il fallait réduire à trois les points de vue proposés par Ampère (le second et le dernier constituant un seul point de vue que nous appellerons *philosophique*). En effet, le cryptoristique s'unit si intimement au cryptologique qu'il est souvent impossible de les séparer, même par une distinction arbitraire ; elle nous a démontré également qu'il fallait se servir de ces points de vue comme d'un échafaudage plutôt que comme d'une charpente. Il serait donc oiseux d'en rechercher les traces dans notre classification.

Le but de cet ouvrage est de rendre l'universalité des connaissances possible à l'homme ; il faut donc montrer comment toutes les sciences se groupent dans une dépendance mutuelle et se réduisent à l'unité, car elles ne sont, en réalité, que les produits divers d'une même activité intellectuelle. On nous

permettra donc de revenir ici sur les divisions générales pour que le lecteur les ait bien présentes à l'esprit en pénétrant dans l'Exposition proprement dite.

Nous avons réparti l'ensemble des connaissances humaines en trois règnes :

Le règne des connaissances extérieures à l'homme et à ses semblables : *connaissances impersonnelles* ;

Le règne des connaissances particulières à l'homme en lui-même : *connaissances personnelles* ou *intuitives* ;

Le règne des connaissances relatives à l'Humanité : *connaissances sociales*.

Le premier règne comprend l'ensemble des sciences dites *positives* et qu'il serait plus juste d'appeler *propositives*, puisqu'elles se réduisent aux objets qu'elles *proposent* à l'activité de l'homme. Mais cette dénomination elle-même serait impropre en ce sens qu'on peut l'étendre aux problèmes sociaux. Nous avons préféré leur donner le titre de SCIENCES IMPERSONNELLES, parce qu'en réalité l'homme doit s'oublier lui-même pour les mieux pénétrer. Elles comprennent les mathématiques, la physique, la cosmologie, les sciences naturelles et la technologie proprement dite. Leur objet est à l'objet des sciences du second règne ce que les procédés, l'outil, l'atelier, la matière à façonner et le produit sont à l'ouvrier.

Le second règne comprend l'ensemble des connaissances qui ont pour objet l'homme lui-même. Ici, c'est le Moi qu'il faut pénétrer dans ce qu'il a tour à tour : de corporel (anthropologie), d'intellectuel (noologie), de moral (psychologie), de sentiments exquis (esthésiologie), et d'aspirations supérieures (théognosie). Ces sciences seraient plus justement appelées *positives* que les précédentes, car nous portons en nous leur principe, leur contrôle et leur fin. Elles ont pour but de réaliser la belle maxime de Socrate : « *Connais-toi toi-même.* » Nous les avons appelées CONNAISSANCES INTUITIVES OU PERSONNELLES.

Le troisième règne comprend l'ensemble des CONNAISSANCES SOCIALES, c'est-à-dire relatives à l'action mutuelle des hommes les uns sur les autres. Elles ont pour objet les moyens par lesquels les hommes communiquent

entre eux (littérature); les faits et les lois de leur activité collective dans le passé (histoire); ces mêmes faits dans le présent au point de vue : 1° des sociétés dans leurs ensemble (sociologie); 2° des individualités sociales (kyriologie); enfin elles nous apprennent à préparer l'avenir (éducation).

L'éducation, tâche suprême de la génération qui s'en va, transmet les destinées de l'humanité à la génération qui vient, elle est la porte par laquelle nous entrons dans le monde intellectuel, elle est l'issue à laquelle aboutit l'exercice de notre activité. Elle ouvre et ferme l'immense circuit des connaissances humaines.

On nous reprochera peut-être d'avoir accepté beaucoup de néologismes d'Ampère et d'en avoir introduit nous-même de nouveaux. Mais, comme les sciences se sont constituées indépendamment les unes des autres, sans avoir pris conseil de leurs principes et de leurs fins communs, il en résulte qu'elles sont sorties le plus souvent de leurs cadres naturels. Il a fallu les y faire rentrer afin de mettre en lumière les groupes de connaissances qui ne se sont pas encore affirmées en sciences. Il était impossible de ne pas donner des noms précis à ces groupes méconnus; il a fallu également modifier les titres trop vagues que portaient certaines sciences, pour les remplacer par des titres plus exacts. On nous rendra cette justice que nous avons procédé avec la plus grande sobriété : Sur cent titres de sciences, quatre-vingt-dix sont sujets à une critique plus ou moins sévère; nous n'en avons modifié que trois ou quatre. Quant aux catégories nouvelles, que nous ne prétendons pas avoir inventées, mais simplement reconnues, il était indispensable de leur donner des noms qui seront maintenus ou changés suivant que le public les aura sanctionnés ou modifiés.

ENSEMBLE DU TABLEAU SYNOPTIQUE.

La première partie du tableau, nous l'avons dit, comprend la classification d'Ampère, non pas telle qu'elle figure dans l'édition (la seule qui ait été publiée par la librairie de Mallet Bachelier) de l'ouvrage intitulé *Essai sur la Philosophie des Sciences*; mais telle qu'elle résulte de l'ensemble des trois tableaux synoptiques, tracés par Ampère, et de la contexture même de son ouvrage. C'est ainsi que nous avons reproduit, en les résumant, dans la 2° et dans la 3° colonne, les titres des chapitres de l'*Essai*, qui jettent une clarté si vive sur l'ensemble de la classification.

Nous y avons ajouté, à la 7e colonne, une répartition des sciences du 3e ordre, proposée par Ampère, suivant les divisions de notre Exposition. Nous aurions voulu les faire concorder avec les sciences de 3e ordre que nous avons établies nous-même dans la seconde partie du tableau synoptique, mais cette répartition a été impossible, et il sera facile de le comprendre, en constatant qu'une même science du 3e ordre de la première classification se répartit souvent dans plusieurs sciences du 3e ordre de la seconde.

Nous n'avons pas besoin d'insister sur la manière dont il faut lire ce tableau synoptique; les explications qu'on en pourrait donner seraient plus compliquées que le tableau lui-même. Quelle que soit la méthode suivie dans cette lecture, qu'on la fasse ligne par ligne ou colonne par colonne, en allant de gauche à droite, on arrivera rapidement à en comprendre les dispositions.

Nous avons fait remarquer, en note, que les sciences du 3e ordre ne sont que des cadres, dans lesquels doivent entrer d'autres sciences moins considérables. On pourrait les subdiviser elles-mêmes en sciences du 4e, du 5e, du 6e, et même du 7e ordre, qui, pour la plupart, ont fait l'objet de traités spéciaux. Cependant chacun de ces cadres fourmille de lacunes; la classification d'Ampère en avait déjà signalé un grand nombre, qui ont été en partie remplies; la nôtre en signale de nouvelles. On reconnaîtra qu'il n'y a pas de plus puissant moyen de faire progresser les sciences, que de les envisager dans leur ensemble; et celui qui se pénétrera bien de notre Exposition générale, aura la satisfaction de reconnaître qu'il est en avance sur le mouvement intellectuel de son époque, comme nous l'avons été nous-même, il y a dix ans, lorsque nous avons étudié, pour la première fois, l'ouvrage d'Ampère.

Nous avions eu primitivement l'intention d'indiquer, par ordre alphabétique, toutes les sciences qui ont fait l'objet de traités spéciaux, en les rapportant aux divisions de notre classification; mais ces sciences sont en si grand nombre, que nous avons dû renvoyer le lecteur à la table des matières de l'Exposition, qui constitue un véritable dictionnaire. On y trouvera, en effet, toutes les mots de la langue française, sans en excepter une grande quantité de néologismes. Les renvois au texte de l'*Exposition* les définiront mieux que ne pourraient le faire, non-seulement les *Manuels*, mais les *Encyclopédies* les plus complètes.

Le lecteur, même novice, qui poursuit, dans les dictionnaires actuels, l'ex-

plication d'un mot, de renvois en renvois, et s'accroche, en feuilletant son livre, aux articles qui sollicitent incidemment son attention, se fera une idée bien autrement nette du sens qu'il faut attacher à un mot, en le trouvant escorté de toutes les idées qu'il éveille et du rôle qu'il joue dans le cours même de l'*Exposition*.

Nous terminons cette légende, en indiquant les principales additions que nous avons introduites dans l'œuvre d'Ampère; elles sont, pour les sciences du 1er ordre, la *Théognosie* et la *Kyriologie*. La première embrasse toutes les connaissances sur lesquelles l'homme peut asseoir et vérifier ses croyances, sans avoir recours à la révélation, non qu'elles excluent la révélation, mais parce qu'elles lui préparent une assise dans l'ordre rationnel, et justifient la foi, autant qu'il est possible de le faire au point de vue purement humain. Il suffira de se reporter au *plan raisonné*, à l'article *Théognosie*, pour reconnaître l'importance et l'actualité de cette addition, dans laquelle aucun culte n'est mis en question.

La seconde comprend l'examen de tous les états et de toutes les professions que l'homme peut remplir dans l'Humanité, soit volontairement, soit involontairement. Cet ordre de connaissances est d'une importance capitale, puisqu'il a pour but de nous initier au rôle que nous pouvons ou que nous devons jouer, aux services que nous pouvons rendre à la société, ou aux maux que nous pouvons lui causer, et dont elle nous fera supporter, tôt ou tard, la responsabilité. Les meilleurs esprits ont compris l'importance de ces connaissances, et beaucoup se sont attachés à publier des *Guides* pour le choix d'un état.

Les sciences du 2e ordre, qu'on ne trouvera pas dans la classification d'Ampère, sont :

1° La *Météorologie*, science toute nouvelle qui, du temps d'Ampère, n'était pas encore dégagée de ses langes ;

2° La *Biographie générale*, qui a pris une si grande importance et initié tant d'esprits aux études historiques ;

3° Les sciences déduites de la *Théognosie* et de la *Kyriologie* ;

4° L'*Éducation disciplinaire* et l'*Éducation supérieure*, qui étaient confondues par Ampère, dans sa théorie générale de l'Éducation.

On voit que l'illustre auteur de l'*Essai* faisait relever cette théorie de la *Pédagogie*, c'est à dire de l'art de former et de *diriger les enfants* (sens du mot *Pédagogie*).

Quant aux nouvelles sciences du 3[e] ordre que nous avons proposées, il serait superflu de les mentionner ici.

En réalité, toutes les sciences que nous appellons nouvelles existent depuis longtemps, mais plus ou moins confuses, plus ou moins engagées dans des groupes de connaissances générales. Nous n'avons fait que chercher à les mettre en lumière et à leur constituer des cadres. C'est ainsi que la *Planéthique*, ou théorie des errements de l'âme, c'est à dire des passions, a fait le principal objet de ces œuvres littéraires, qui se sont produites en si grande abondance sous le titre banal d'*Études* ou *Romans de mœurs*, études d'autant plus dangereuses, qu'elles se contentent d'exposer les plus hideuses perversions de l'être moral, sans les présenter comme des maladies, sans leur chercher un remède, et le plus souvent, dans l'intention de les justifier, quelquefois même de les glorifier.

[illegible]

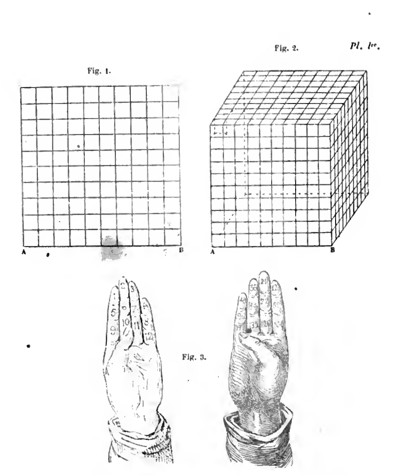


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE DES NOMBRES

I

NOTIONS MNÉMONIQUES.

1. Un nombre est une collection quelconque de quantités égales dont le type est l'*unité*.

2. L'unité est une quantité bien connue qu'on ne peut augmenter ni diminuer; mais qu'on peut ajouter indéfiniment à elle-même, ou diviser indéfiniment en parties de plus en plus petites.

3. Les collections qui ne se composent que d'unités s'appellent *nombres entiers*.

4. Les collections qui se composent de parties d'unité s'appellent *fractions*, quand leur somme est inférieure à l'unité ;

Elles s'appellent *nombres fractionnaires* quand leur somme est supérieure à l'unité.

5. Tous les nombres s'expriment à l'aide de signes abréviatifs qu'on appelle *chiffres*.

Les chiffres sont :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

Qui signifient :

Zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.

Ces dix signes, isolés ou diversement combinés, peuvent exprimer tous les nombres possibles.

6. On peut obtenir tous les nombres entiers successivement un à un depuis l'unité jusqu'à l'infini. On peut également obtenir toutes les fractions successivement une à une, en divisant l'unité en 2, 3, 4, 5, etc., parties égales jusqu'à l'infini. Le procédé qui enseigne à construire ainsi tous les nombres, par voie successive et méthodique, s'appelle *numération*.

7. On peut obtenir les nombres simultanément, par groupes, au moyen de six procédés expéditifs qu'on nomme *opérations*, dont trois sont agrégatives et trois désagrégatives.

OPÉRATIONS AGRÉGATIVES.

8. L'addition consiste à former un seul nombre, appelé *somme* ou *total*, de la réunion de plusieurs nombres différents :

7 plus 5 donne un résultat égal à 12,
3 plus 7 plus 5 donne un résultat égal à 15.

Ce qu'on écrit plus brièvement :

$$7+5=12, \quad 3+7+5=15.$$

Mais quand toutes les parties connues ou inconnues de la somme sont les mêmes, si l'on veut déterminer *combien de fois* (en latin *quoties*) la somme contient de ces parties, la soustraction se transforme en *division :*

$$18-6-6-6=0.$$

18 est formé de plusieurs parties, chacune égale à 6; combien de fois 6 est-il contenu dans 18? Il l'est 3 fois.

3 est appelé *quotient*, 6 *diviseur* (car c'est le nombre *qui divise*), 18 *dividende* (car c'est le *nombre à diviser*).

On écrit brièvement : $\frac{18}{6}=3$ (18 divisé par 6 est égal à 3);

ce qui revient à dire que $18=6\times3$.

La division est donc une opération où l'on suppose qu'un nombre quelconque, *dividende*, est le produit d'un nombre connu, *diviseur*, par un nombre à déterminer, *quotient*.

13. On peut avoir à diviser le dividende par plusieurs diviseurs consécutifs pour déterminer le quotient.

$$\left.\begin{matrix}\frac{168}{2}\\ \overline{3}\\ \overline{4}\end{matrix}\right\}=7$$

Ici le quotient 7 s'obtient en divisant 168 par 2, $\frac{168}{2}=84$, puis 84 par 3, $\frac{84}{3}=28$, enfin 28 par 4, $\frac{28}{4}$, qui donne le résultat définitif, 7.

On peut écrire également : $\frac{168}{2\times3\times4}=7$, car $168=(2\times3\times4)\times7$.

Mais quand tous les diviseurs sont égaux à un même nombre, s'il s'agit de déterminer ce nombre, sachant seulement combien de fois il faut le prendre comme facteur pour obtenir le dividende, la division se transforme en *extraction de racines.*

81 est le produit d'un diviseur inconnu multiplié 4 fois par lui-même ; quel est ce diviseur? Ce diviseur est 3, car $3\times3\times3\times3$ ou $3^4=81$.

3 est appelé *racine*, 4 *exposant* ou *indice de la racine*, 81 *puissance*.

On écrit brièvement :

$$\sqrt[4]{81}=3$$ (la racine 4e de 81 est égale à 3) (*);

ce qui revient à dire que $3^4=81$.

L'extraction des racines est donc une opération où l'on suppose qu'un nombre quelconque est une puissance dont on connaît l'exposant et dont il faut déterminer la racine.

Les racines sont dites 2es ou *carrées*, 3es ou *cubiques*, suivant que leur puissance est un carré ou un cube (**).

14. Si nous ajoutons, aux signes abréviatifs que nous venons d'indiquer, le signe de l'inégalité $><$ qui, placé entre deux quantités, a son ouverture tournée vers la plus forte, nous connaîtrons les principales notations du calcul.

$$12>\frac{685}{71}$$: (12 est supérieur au quotient de 685 par 71).

$$\sqrt[3]{987}<10$$: (la racine cubique de 987 est inférieure à 10).

Les signes et les notations accessoires se feront connaître à mesure que nous pénétrerons dans la théorie des nombres.

(*) Le signe $\sqrt{\ }$ s'appelle *signe radical.*

(**) Ces expressions sont tirées de la géométrie où le carré d'une ligne (*Fig.* 1re, *Pl.* 1.) s'obtient en élevant à la 2e puissance le nombre qui exprime la longueur d'une ligne AB; le cube en élevant à la 3e puissance la longueur de cette même ligne. (*Fig.* 2, *Pl.* 1.)

II

NUMÉRATION. — SYSTÈMES GRADUÉS.

1° PRÉLIMINAIRES.

15. La numération (du latin *numeratio*, art de compter) a pour but de former successivement et d'exprimer, avec peu de chiffres et de mots, tous les nombres dont on peut avoir besoin dans le calcul.

16. Comme les nombres n'ont pas de limites, pour arriver à les exprimer avec le moins de chiffres et de mots possible, il a fallu recourir à des systèmes particuliers que nous pouvons répartir en deux catégories :

1° Les *systèmes gradués*, où les nombres se construisent par graduations ou puissances (**10**). C'est à l'un de ces systèmes qu'appartient la numération dont on se sert généralement et que l'on nomme *numération décimale;*

2° Les *systèmes complexes*, dans la catégorie desquels rentrent toutes les numérations qui ne reposent pas sur le principe de la graduation. Telles sont les numérations dont se servaient les Romains et les Grecs.

17. On peut concevoir autant de systèmes gradués qu'il y a de nombres, l'unité exceptée ; et, quand on connaît à fond l'un de ces systèmes, on connaît également tous les autres.

Cependant, en dehors de la numération décimale, il y a trois systèmes gradués auxquels on accorde une importance spéciale ; ce sont les systèmes :

Binaire, où l'on n'emploie que deux chiffres, 1 et 0.

Ternaire, où l'on emploie trois chiffres, 1, 2, 0.

Duodécimal, où l'on emploie douze chiffres, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *α*, *β*, 0.

Examinons ces différents systèmes en commençant par le système décimal.

2° GRADUATION DÉCIMALE.

La numération fondée sur la graduation décimale emploie les dix chiffres mentionnés (**5**), dont neuf sont appelés chiffres *significatifs*, pour les distinguer du dixième, zéro, qui ne signifie rien par lui-même.

18. Les chiffres, indépendamment du nombre absolu que chacun d'eux exprime, ont une valeur relative quand ils figurent à côté d'autres chiffres ; ils représentent des quantités dix fois plus grandes que celles du chiffre qui les suit.

Si l'on connaît exactement la valeur du dernier chiffre d'un nombre quelconque, il est facile de se faire une idée nette de ce nombre.

Soit 4035297

Sachant que le dernier chiffre à droite 7 exprime sept fois l'unité, on saura que 9 exprime neuf *dizaines* d'unités, 2 deux dizaines de dizaines ou deux *centaines*, 5 cinq dizaines de centaines ou cinq *mille*, 3 trois dizaines de mille, 0 l'absence de centaines de mille, 4 quatre dizaines de centaines de mille ou quatre *millions*, etc.

19. On ne se sert guère des nombres qui vont au delà de dix centaines de millions ou *milliard*. Un homme qui passerait sa vie à compter un à un les

battements de son cœur n'arriverait jamais à ce dernier nombre, quoique le cœur donne en moyenne plus de cent pulsations par minute.

20. Dans les nombres entiers, les chiffres, de 1 à 9, isolés, n'expriment que des unités simples; suivis d'un, deux, trois, quatre, etc., zéros, ils expriment les puissances première, deuxième, troisième, quatrième, etc., de 10. La somme de ces valeurs constitue le nombre; ainsi 4 035 297 est une somme dont les parties peuvent s'écrire de la manière suivante, en établissant la valeur de chaque chiffre :

7	par lui-même		exprime	7 fois l'unité		$7 \times \ldots\ldots 1 = \ldots\ldots 7$
9	suivi de	1 chiffre	exprime	9 fois 10^1		$9 \times \ldots\ldots 10 = \ldots\ldots 90$
2	—	2 chiffres	—	2 —	$10^2 =$	$2 \times \ldots\ldots 100 = \ldots\ldots 200$
5	—	3 —	—	5 —	$10^3 =$	$5 \times \ldots 1000 = \ldots 5000$
3	—	4 —	—	4 —	$10^4 =$	$4 \times \ldots 10000 = \ldots 30000$
0	—	5 —	—	0 —	$10^5 =$	$0 \times . 100000 = . 000000$
4	—	6 —	—	4 —	$10^6 =$	$4 \times 1000000 = 4000000$

La somme des valeurs absolues et relatives de chaque chiffre : 4035297, constitue le nombre.

21. Pour écrire successivement tous les nombres entiers dans le système décimal, il faut écrire successivement les neuf premiers nombres avec les neuf premiers chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Le dixième nombre $9 + 1$, exprimant une fois la première puissance de dix, sera 1 suivi de 0 : 10.

Le nombre suivant sera		11	qui	exprime	$10 + 1$
Viennent ensuite.......		12	—	—	$10 + 2$
		13	—	—	$10 + 3$
		14	—	—	$10 + 4$
		..			....
		19	—	—	$10 + 9$
$19 + 1$	s'écrira	20	—	—	2×10
$20 + 1$	—	21	—	—	$2 \times 10 + 1$
$20 + 2$	—	22	—	—	$2 \times 10 + 2$
......		..			....
$20 + 10$	—	30	—	—	3×10
....		...			....
$90 + 10$	—	100	—	—	1×10^2
$100 + 1$	—	101	—	—	$1 \times 10^2 + 1$

En continuant de la sorte, on arrivera à écrire tous les nombres depuis 1 jusqu'à l'infini ∞ (*).

22. Les fractions, dans le système décimal, se forment par la division de l'unité en parties de dix en dix fois plus petites.

Dans les nombres fractionnaires qui se composent de nombres entiers et de fractions, la partie qui exprime des nombres entiers est séparée par une virgule de la partie qui exprime les fractions; mais la méthode est toujours la même dans les fractions décimales, c'est-à-dire que chaque chiffre y exprime des valeurs dix fois plus faibles que celui qui le précède et dix fois plus fortes que celui qui le suit.

Supposons qu'au nombre 4035297 il y ait une suite décimale 320564 :

4035297, 320564

(*) L'infini a pour notation mathématique un 8 couché.

4035297, 320564

7 exprimant des unités, 3 qui le suit exprimera des valeurs dix fois plus faibles, ou des *dixièmes* d'unité.

3 exprimant des dixièmes, 2 qui le suit exprimera des valeurs dix fois plus faibles, ou des dixièmes de dixième : *centièmes.*

2 exprimant des centièmes, 0 qui le suit exprimera l'absence de valeurs dix fois plus faibles, ou de dixièmes de centième : *millièmes.*

0 exprimant des millièmes, 5 qui le suit exprimera des valeurs dix fois plus faibles, ou des dixièmes de millième : *dix millièmes.*

5 exprimant des dix millièmes, 6 qui le suit exprimera des valeurs dix fois plus faibles, ou des dixièmes de dix millième : *cent millièmes.*

6 exprimant des cent millièmes, 4 qui le suit exprimera des valeurs dix fois plus faibles, ou des dixièmes de cent millième : *millionièmes.*

Quand il n'y a pas de partie entière on se contente de mettre un zéro en avant de la virgule, 0,947 signifie *neuf cent quarante sept milliemes.*

23. On voit que, dans les fractions décimales les chiffres, au lieu d'être multipliés, sont divisés par les puissances première, deuxième, troisième, etc., de 10, suivant qu'ils tiennent le premier, le deuxième, le troisième, etc., rang à la suite de la virgule. Ainsi, la partie décimale du nombre 4035297, 320564 est une somme dont les parties peuvent s'écrire de la manière suivante, en établissant de droite à gauche la valeur de chaque chiffre :

3	tenant le 1er rang après la virgule exprimera			$\frac{3}{10}$ =	.....	= 0,3
2	—	2e	—	$\frac{2}{10^2}$ =	$\frac{2}{100}$	= 0,02
0	—	3e	—	$\frac{0}{10^3}$ =	$\frac{0}{1000}$	= 0,000
5	—	4e	—	$\frac{5}{10^4}$ =	$\frac{5}{10000}$	= 0,0005
6	—	5e	—	$\frac{6}{10^5}$ =	$\frac{6}{100000}$	= 0,00006
4	—	6e	—	$\frac{4}{10^6}$ =	$\frac{4}{1000000}$	= 0,000004

La somme des valeurs absolues et relatives de chaque chiffre 0,320564 constitue le nombre.

Remarquons ici que 3 peut indifféremment exprimer 3 dixièmes, 30 centièmes, 300 millièmes, 3000 dix millièmes, etc. ; 2, 2 centièmes, 20 millièmes, 200 dix millièmes, etc. La fraction peut donc se lire :

Trois cent vingt mille cinq cent soixante-quatre millionièmes.

Par conséquent, connaissant la valeur du dernier chiffre d'un nombre décimal, on peut l'énoncer comme un nombre entier dont la valeur, au lieu d'être déterminée en unités, sera déterminée en fractions de l'ordre du dernier chiffre.

24. Ces préliminaires posés, établissons les règles de la numération *parlée* ou *énoncée*, et de la numération *écrite* ou *notée*. Ces règles se résument dans la

connaissance complète des noms que portent les cent premiers nombres (*) et dans l'usage du tableau qui suit :

Trillions.	Billions.			Millions.			Mille.			Unités simples.					Millièmes.			Millioniémes			Billioniémes.			Trillioniémes.
Trillions.	Centaines de billions.	Dixaines de billions.	Billions ou milliards.	Centaines de millions.	Dixaines de millions.	Millions.	Centaines de mille.	Dixaines de mille.	Mille.	Centaines.	Dixaines.	**Unités.**	Dixièmes.	Centièmes.	Millièmes.	Dix millièmes.	Cent millièmes.	Millioniémes.	Dix millioniémes.	Cent millioniémes.	Billioniémes.	Dix billioniémes.	Cent billioniémes.	Trillioniémes.
	.	.	4	1	8	6	4	3	2	7	0	9,	5	4	8	7	6	2	1	3	.	.	.	
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	.	.	9	0	0	0	0,	0	0	0	5	.	.	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	4	0	3	5	2	9	7,	3	2	8	5	6	4	.	.	.	.	.	

Ce tableau peut être prolongé indéfiniment soit d'un côté, en quatrillions, quintillions, etc., soit de l'autre en quatrillioniémes, quintillioniémes, etc., ayant chacun leurs dixaines et leurs centaines. Les indications qu'il porte expriment la valeur de position des chiffres significatifs placés à leur base. Il doit être bien gravé dans la mémoire, et on le dispose en pensée au dessus du nombre à écrire ou à énoncer, de telle sorte que la ligne verticale *unités* ait à

(*) Voici ces noms qui, avec ceux du tableau, expriment tous les nombres qu'on emploie dans la numération parlée :

1 un.	26 vingt-six.	51 cinquante-un.	76 soixante-seize.
2 deux.	27 vingt-sept.	52 cinquante-deux.	77 soixante-dix-sept.
3 trois.	28 vingt-huit.	53 cinquante-trois.	78 soixante-dix-huit.
4 quatre.	29 vingt-neuf.	54 cinquante-quatre.	79 soixante-dix neuf.
5 cinq.	30 trente.	55 cinquante-cinq.	80 quatre-vingts ***.
6 six.	31 trente-un.	56 cinquante-six.	81 quatre-vingt-un.
7 sept.	32 trente-deux.	57 cinquante-sept.	82 quatre-vingt-deux.
8 huit.	33 trente-trois.	58 cinquante-huit.	83 quatre-vingt-trois.
9 neuf.	34 trente-quatre.	59 cinquante-neuf.	84 quatre-vingt-quatre.
10 dix.	35 trente-cinq.	60 soixante.	85 quatre-vingt-cinq.
11 onze *.	36 trente-six.	61 soixante-un.	86 quatre-vingt-six.
12 douze *.	37 trente-sept.	62 soixante-deux.	87 quatre-vingt-sept.
13 treize *.	38 trente-huit.	63 soixante-trois.	88 quatre-vingt-huit.
14 quatorze *.	39 trente-neuf.	64 soixante-quatre.	89 quatre-vingt-neuf.
15 quinze *.	40 quarante.	65 soixante-cinq.	90 quatre-vingt-dix ****.
16 seize *.	41 quarante-un	66 soixante-six.	91 quatre-vingt-onze.
17 dix-sept.	42 quarante-deux.	67 soixante-sept.	92 quatre-vingt-douze.
18 dix-huit.	43 quarante-trois.	68 soixante-huit.	93 quatre-vingt-treize.
19 dix-neuf.	44 quarante-quatre.	69 soixante-neuf.*	94 quatre-vingt-quatorze.
20 vingt.	45 quarante-cinq.	70 soixante-dix **.	95 quatre-vingt-quinze.
21 vingt un.	46 quarante-six.	71 soixante-onze.	96 quatre-vingt-seize.
22 vingt-deux.	47 quarante-sept.	72 soixante-douze.	97 quatre vingt-dix-sept.
23 vingt-trois.	48 quarante-huit.	73 soixante-treize.	98 quatre-vingt-dix-huit.
24 vingt-quatre	49 quarante neuf.	74 soixante-quatorze.	99 quatre-vingt-dix-neuf.
25 vingt-cinq.	50 cinquante.	75 soixante-quinze.	100 cent.

* Onze *pour* dix un. — * Douze *pour* dix deux. — * Treize *pour* dix trois. — * Quatorze *pour* dix quatre. — * Quinze *pour* dix cinq. — * Seize *pour* dix six.

** Soixante-dix *pour* septante. —*** Quatre-vingts *pour* octante.—**** Quatre-vingt-dix *pour* nonante. (On pourrait dire également qu'on emploie le mot dix *pour* unante, vingt *pour* duante).

sa base le chiffre qui exprime non pas des puissances de dix, ni des fractions, mais un des 9 premiers nombres pris en *valeur absolue*.

Quand aucun chiffre significatif ne figure à la base d'une des indications, on y place un zéro pour conserver aux autres chiffres le rang qu'ils doivent occuper dans le nombre. Il résulte de là que, indépendamment des zéros qui figurent dans l'intérieur des nombres écrits, un nombre écrit quelconque est censé précédé et suivi de zéros à l'infini, puisque le tableau n'a de limites ni à droite ni à gauche.

Supposons d'abord que tous les chiffres des nombres sont disposés sous ce tableau, au lieu de les voir, selon l'usage sous la forme :

4 186 432 709,54 876 213
90 00 0,00 05
4 035 297, 32 856 4

25. S'il s'agit de lire un de ces nombres écrits, le dernier des 3 nombres qui figurent au dessous du tableau 4035297,328564, on constate que la virgule sépare la partie entière de la partie décimale et est placée immédiatement à la suite du chiffre qui exprime des unités simples : ce chiffre étant placé sous la colonne *unités*, tous les autres chiffres se trouveront divisés par tranches, de la manière suivante :

4 035 297,32 856 4

Cela fait, on lit la partie entière et la partie fractionnaire du nombre séparément.

26. La partie entière du nombre se compose de : 4 millions. 4 millions.

0 centaines de mille. 3 dixaines de mille.. 5 mille	total : trente-cinq mille........	035 mille.
2 centaines......... 9 dixaines.......... 7 unités	total : deux cent quatre-vingt-dix-sept unités..................	297 unités.

Le nombre total entier s'énoncera donc : 4 millions 35 mille 297 unités.

27. Quant à la lecture de la partie fractionnaire, elle nécessite une double formalité ; il faut :

1° Constater, à l'aide du tableau, la valeur exprimée par son dernier chiffre. (On voit, dans l'exemple donné, que cette valeur est celle des millionièmes).

2° Considérer ce dernier chiffre, quel qu'il soit, comme s'il représentait des unités, et lire la partie fractionnaire comme si elle était un nombre entier, en remplaçant toutefois le mot *unités* qui termine l'énonciation par celui qui exprime la valeur du dernier chiffre décimal.

Nous lirons donc cette partie fractionnaire :

Trois cent vingt huit mille cinq cent soixante-quatre *millionièmes*.

En effet, considérant la valeur indiquée par chacun des chiffres du nombre fractionnaire, nous voyons que ce nombre se compose de 4 millionièmes + 6 cent millièmes + 5 dix millièmes + 8 millièmes + 2 centièmes + 3 dixièmes.

Or 4 millionièmes + 6 cent millièmes = 64 millionièmes ; car 1 cent millième vaut 10 millionièmes et 6 cent millièmes valent 60 millionièmes ; lesquels, ajoutés à 4 millionièmes, donnent 64 millionièmes.

64 millionièmes + 5 dix millièmes = 564 millionièmes ; car 1 dix millième vaut 10 cent millièmes et 100 millionièmes ; 5 dix millièmes vaudront 500 millionièmes ; lesquels, ajoutés à 64 millionièmes, donnent 564 millionièmes.

564 millionièmes + 8 millièmes = 8 564 millionièmes.

8 564 millionièmes + 2 centièmes = 28 564 millionièmes; car 1 centième vaut 10 millièmes ou 100 dix millièmes ou 1000 cent millièmes ou 10,000 millionièmes et 2 centièmes valent 20,000 millionièmes; lesquels, ajoutés aux 8564 millionièmes, donnent 28 564 millionièmes.

Enfin, 28 564 millionièmes + 3 dixièmes = 328 564 millionièmes.

28. D'un autre côté, s'il s'agit d'écrire le nombre *quatre-vingt-dix mille unités cinq dix-millièmes* (deuxième ligne sous le tableau), quatre-vingt-dix 90 exprimant 9 dixaines de mille, viendra figurer dans la tranche des mille à la colonne des dixaines; comme il n'y a ni centaines, ni dixaines, ni unités, ni dixièmes, ni centièmes, ni millièmes, mais seulement 5 dix millièmes, 5 sera écrit dans la case des dix millièmes et toutes les cases intermédiaires resteront vides. Introduisons un zéro dans chacune des cases vides; à la droite de ce zéro mettons une virgule, et supposons que le tableau soit enlevé; le nombre se présentera sous la forme suivante :

90 000, 0005.

De même, le nombre 4 billions 186 millions 432 mille 709 *unités*, 54 millions 876 mille 213 *cent millionièmes*, dont les chiffres se répartissent sous le tableau comme on le voit dans la première ligne, se présente, quand le tableau est enlevé, sous la forme

4 186 432 709, 54876213.

29. La virgule joue ici un rôle important, puisqu'elle sépare la partie entière de la partie décimale. Supposons dans l'exemple ci-dessus qu'elle soit descendue d'un rang, c'est-à-dire placée entre 5 et 4, il viendra : 41 864 327 095, 4876213; 5 qui exprimait des dixièmes, exprime maintenant des unités, 9 exprimera des dixaines, 0 des centaines, 7 des mille, etc.; de même 4, qui exprimait des centièmes, exprimera des dixièmes, 8 des centièmes au lieu de millièmes. En sorte qu'en faisant descendre la virgule d'un seul rang on a fait exprimer à chacun des chiffres du nombre une valeur dix fois plus forte : le nombre a donc été rendu dix fois plus fort.

On verra de même qu'en faisant descendre la virgule de deux, trois, etc., rangs, le nombre deviendra cent, mille, etc., fois plus fort.

Si au contraire, on fait remonter la virgule de un, deux, trois, etc., rangs, on reconnaîtra que le nombre entier sera rendu dix, cent, mille, etc., fois plus faible.

30. On peut admettre qu'il y a une virgule et plusieurs zéros à la suite de tout nombre entier; dans ce cas il est facile de reconnaître que :

Pour diviser ou multiplier ce nombre par une puissance quelconque de 10, il faut faire remonter ou descendre la virgule d'autant de chiffres qu'il y a d'unités dans l'exposant.

Veut-on diviser 45 328 par $10^3 = 1000$?

45328 étant un nombre entier, peut toujours se présenter comme suivi d'une virgule et d'un nombre indéterminé de zéros :

45 328, 00000....

Remontant la virgule de 3 rangs, selon l'indication ^{3} de l'exposant 10^3, on a :

45,328 0000....

Il suffit d'énoncer le nombre pour constater que 45, qui exprimait des mille, n'exprime plus que des unités, et que 328, qui exprimait des unités, n'exprime plus que des millièmes : ce nombre entier a donc été divisé par 10^3, c'est-à-dire rendu 1000 fois plus petit.

Veut-on multiplier 45323 par $10^3 = 1000$?

On écrira : 45 323,0000....

Puis, faisant descendre la virgule de trois rangs, il vient : 45 323 000,000....

Il suffit d'énoncer le nombre pour constater que 45 323, qui exprimait des unités, exprime des mille : le nombre a donc été multiplié par 10^3 ou 1,000.

2° SYSTÈME BINAIRE.

31. Pour écrire tous les nombres avec deux chiffres, 1 et 0, ou plutôt avec les deux signes 1 et ., nous admettrons que les puissances successives de 2 :

2^0, 2^1, 2^2 ou 4, 2^3 ou 8, 2^4 ou 16, 2^5 ou 32, 2^6 ou 64, 2^7 ou 128, etc.

s'écrivent :

1 1. 1.. 1... 1.... 1..... 1...... 1....... etc.,

de sorte que chaque puissance de 2 soit notée par 1 suivi d'autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant.

Ainsi, $2^{12} = 4\,096$, s'écrirait avec l'unité suivie de 12 points :

1............

Nous noterons ainsi la série des nombres, qui vont en se doublant, à l'infini.

32. Si maintenant des 1 viennent prendre la place des points de la manière suivante :

1	un,	1.1.	dix $= 2^3 + 2$,
1.	deux $= 2^1$,	1.11	onze $= 2^3 + 2 + 1$,
11	trois $= 2^1 + 1$,	11..	douze $= 2^3 + 2^2$,
1..	quatre $= 2^2$,	11.1	treize $= 2^3 + 2^2 + 1$,
1.1	cinq $= 2^2 + 1$,	111.	quatorze $= 2^3 + 2^2 + 2$,
11.	six $= 2^2 + 2$,	1111	quinze $= 2^3 + 2^2 + 2 + 1$,
111	sept $= 2^2 + 2 + 1$,	1....	seize $= 2^4$,
1...	huit $= 2^3$,	1...1	dix-sept $= 2^4 + 1$.
1..1	neuf $= 2^3 + 1$,	Etc., etc.,	

c'est-à-dire de façon à former toutes les combinaisons possibles de points et de 1, tous les nombres intermédiaires compris entre les puissances successives de 2 se trouveront notés, en vertu de ce principe que chaque 1 isolé à droite exprime l'unité en valeur absolue, c'est-à-dire simple, mais que reculé de un, deux, trois, etc., rangs vers la gauche, il exprime l'unité en valeur relative, c'est-à-dire multipliée par la première, deuxième, troisième, etc., puissance de 2; en sorte qu'il suffit de réunir les différentes expressions de chaque 1 pour constituer le nombre.

33. Ainsi la notation 1.111.1111

signifie $2^9 \ldots + 2^7 + 2^6 + 2^5 \ldots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$,

ou $512 \ldots + 128 + 64 + 32 \ldots + 8 + 4 + 2 + 1 = 751$.

34. S'il fallait énoncer le nombre, on pourrait le partager en tranches de trois chiffres à partir des unités simples, la dernière tranche pouvant rester incomplète :

1 .11 1.1 111

La 1re serait celle des unités : 1° simples, 2° doubles, 3° quadruples;
La 2e celle des cubes de 2, simples, doubles et quadruples;
La 3e celle des puissances bicubiques de 2, simples, doubles et quadruples;
La 4e celle des puissances tricubiques de 2, simples, doubles et quadruples, etc.

Ici nous aurions : 1° une unité simple de l'ordre des puissances tricubiques de 2; 2° une unité double et une unité simple de l'ordre des puissances bicubiques de 2; 3° une unité quadruple et une unité simple de l'ordre des puissances cubiques de 2; 4° une unité quadruple, une unité double, et une unité simple de l'ordre des unités.

35. Nous avons vu (**33**) comment on traduit un nombre du système de graduation binaire dans le système de graduation décimale. S'agit-il de traduire un nombre (1866 par exemple) du système décimal dans le système binaire? il faut :

1° Établir les puissances successives de 2 depuis l'unité jusqu'à la puissance qui approche le plus du nombre proposé sans le dépasser :

$$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad 2^6 \quad 2^7 \quad 2^8 \quad 2^9 \quad 2^{10}\ldots$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024;\ldots$$

2° Noter la plus grande puissance ($2^{10} = 1024$) suivant le système binaire, c'est-à-dire par 1 suivi d'autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant :

1..........

3° Retrancher cette puissance (1024) du nombre proposé (1866); et dans le cas où il n'y aurait pas de différence, l'opération serait terminée ; mais s'il y a une différence ($1866 - 1024 = 842$), il faut encore :

4° Chercher la plus grande puissance (512) contenue dans cette différence (842), la noter dans l'expression déjà trouvée (1..........), en remplaçant un des points par un 1, de telle sorte que ce nouvel 1 soit suivi d'autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant (ici 512 étant égal à 2^9, le second 1 doit être suivi de 9 points, et il viendra immédiatement après le premier 11.........).

5° Retrancher cette puissance (512) de la différence (842), et s'il y a une nouvelle différence (330), chercher la plus grande puissance ($256 = 2^8$) qui y est contenue, la noter de même (111........), la retrancher encore de la dernière différence et continuer ainsi jusqu'à ce qu'une des différences ait pour résultat 0.

L'expression de 1866 dans le système binaire sera donc 111.1..1.1.; car si nous établissous au dessous de chaque 1 les valeurs qu'il exprime :

1	1	1	.	1	.	.	1	.	1	.
2^{10}	2^9	2^8	0	2^6	0	0	2^3	0	2^1	0
1024,	512,	256,	0	64	0,	0,	8,	0,	2,	0

la somme de ces valeurs :

$$1024 + 512 + 256 + \ldots 64 + \ldots 8 + \ldots 2 = 1866.$$

36. Les fractions du système binaire seraient, d'après la méthode suivie dans la numération graduée, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}$, etc., c'est-à-dire exprimeraient des demies, des quarts, des huitièmes, des trente-deuxièmes, etc., et le nombre 0, 11.11 signifierait $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$.

Nous verrons plus loin (Fractions) comment on peut traduire des expressions de cette nature dans le système décimal, et réciproquement.

37. La graduation binaire a été proposée par Leibnitz, parce qu'elle met en évidence des propriétés particulières aux nombres; mais si elle a l'avantage de n'employer que deux chiffres, elle a l'inconvénient de les répéter en trop grande quantité pour exprimer des nombres peu considérables. Nous venons de voir en effet que 1866, qui n'exige que quatre chiffres dans le système décimal, en nécessite dix dans le système binaire.

38. Le système binaire paraissait propre, selon Leibnitz, à démontrer comment Dieu, représenté par l'*unité*, pouvait avec le néant, représenté par un *zéro* ou *point*, donner naissance à la série infinie des nombres, c'est-à-dire des êtres.

Dans la pratique, le système binaire nous apprend qu'on peut former tous les nombres entiers possibles avec la série des puissances de 2. Les commerçants connaissent cette propriété de longue date, car, avec des poids de 1, 2, 4, 16. 32, etc., kilogrammes, ils pèsent tous les poids intermédiaires de 1 à 32 ; $1+2=3$, $4+1=5$, $4+2=6$, $4+2+1=7$, $8+1=9$, etc., et vingt-trois poids supérieurs, de 32 à 55 : $32+1$, $32+2$, etc. Mais le plus grand avantage de la numération binaire est de nous faire bien comprendre la méthode générale qui préside à toutes les numérations graduées et particulièrement à la numération décimale.

3° SYSTÈME TERNAIRE.

39. Pour former tous les nombres avec trois chiffres, 1,2 et 0 ou le *point* ., il faut admettre que les puissances successives de 3,

$$1=3^0, (*)\ 3=3^1,\ 9=3^2,\ 27=3^3,\ 81=3^4,\ 243=3^5,\ 729=3^6 \ldots$$

s'écrivent :

1 1. 1.. 1... 1.... 1..... 1......

c'est-à-dire avec 1 suivi d'autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant, et que l'on note ainsi tous les nombres qui s'élèvent par puissances successives de 3 (3, 3^2, 3^3, 3^4, etc.), à l'infini. Les nombres intermédiaires se formeront successivement, comme dans la numération binaire, en remplaçant chaque point par un chiffre significatif; mais ici le chiffre significatif pouvant être tantôt 1, tantôt 2, nous ferons subir à chaque point deux transformations différentes, ce qui abrégera de beaucoup le nombre des notations.

Ici la notation 12.221 signifiera :

$$\begin{array}{lccccccccccc} & 1 & & 2 & & . & & 2 & & 2 & & 1 \\ & 1\times3^5 & + & 2\times3^4 & + & 0\times3^3 & + & 2\times3^2 & + & 2\times3^1 & + & 1\times3^0\ (*) \\ \text{ou} & 243 & + & 2\times81 & + & 0 & + & 2\times9 & + & 2\times3 & + & 1 \end{array}$$

et la somme de ces valeurs exprimée dans le système décimal :

$$243+162+18+6+1=430.$$

S'il fallait énoncer le nombre, on pourrait le partager en tranches de 3 chiffres à partir de la droite.

La 1re serait celle des unités : 1° simples, 2° triples, 3° nonuples;

La 2e celle des cubes de 3 : 1° simples, 2° triples, 3° nonuples;

La 3e celle des puissances bicubiques de 3 : simples, triples et nonuples;

La 4e celle des puissances tricubiques de 3 : simples, triples et nonuples, etc.

S'agit-il de traduire un nombre du système décimal dans le système ternaire? il faut noter et retrancher successivement les plus grandes puissances de 3 contenues dans le nombre proposé et dans les différences, s'il y en a, jusqu'à ce qu'on arrive à zéro. Mais on remarquera ici que la plus grande puissance contenue, soit dans le nombre, soit dans une des différences, peut être doublée sans être trop forte : dans ce cas on la retranche double et on la note par le chiffre 2.

En traduisant 66 dans le système ternaire, on voit que la plus grande puissance de 3 contenue dans 66 est $3^3=27$. Or 27 pouvant être contenu 2 fois dans 66, au lieu de 1... qui exprimerait 3^3, il faut écrire 2... qui exprime $3^3\times2$; le reste étant $66-54=12$, la plus grande puissance de 3 contenue en 12 sera $3^2=9$ qui se note simple 21..; enfin, le dernier reste 3 donnera pour 66 l'expression complète 211. qui signifie

(*) Tout nombre affecté de l'exposant 0 est égal à 1, comme on le verra dans l'*Analyse des nombres*, au paragraphe intitulé : *Nombres négatifs*.

$$2\times3^3+1\times3^2+1\times3^1+0=54+9+3=66.$$

Les fractions du système ternaire seraient $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, etc.

Le système ternaire nous apprend qu'en ajoutant tantôt simples, tantôt doubles les puissances de 3, on peut former tous les nombres possibles :

$$2=2\times3^0,\quad 4=3^1+3^0,\quad 5=3^1+2\times3^0,\quad 7=2\times3^1+3^0,\ \text{etc.}$$

Mais, en ajoutant et retranchant tour à tour les puissances de 3, on peut aussi former tous les nombres possibles sans avoir besoin d'employer ces puissances en double. Avec quatre poids : 1, 3, 9, 27 kilog. employés tantôt comme poids directs, tantôt comme contrepoids, on peut former tous les poids intermédiaires et une partie des poids supérieurs à 27 ; en effet :

$$2=3-1,\ 4=3+1,\ 5=9-(3+1),\ 6=9-3\ldots\ 28=27+1,\ 29=27+3-1,\ \text{etc.}$$

4° SYSTÈMES POSITIVO-NÉGATIFS.

40. Ces considérations ont donné naissance aux systèmes de numération appelés *positivo-négatifs* (les quantités à retrancher étant considérées par les mathématiciens comme *négatives* et les quantités à ajouter comme *positives*) ; systèmes qui réduisent le nombre des chiffres significatifs employés dans les graduations où on les fait entrer.

Dans le système ternaire positivo-négatif, on écrira tous les nombres avec les chiffres 0 et 1, ce dernier étant tantôt simple, tantôt surmonté du signe négatif $\bar{1}$ qui indiquera que le chiffre est à retrancher avec sa valeur de position, ainsi :

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \ldots$$

s'écriront :

$$0,\ 1,\ 1\bar{1},\ 10,\ 11,\ 1\bar{1}\bar{1},\ 1\bar{1}0,\ 1\bar{1}1,\ 10\bar{1},\ 100,\ \ldots$$
$$0,\ 1,\ 3-1,\ 3^1,\ 3+1,\ 3^2-3^1-1,\ 3^2-3^1,\ 3^2-3^1+1,\ 3^3-1,\ 3^2,\ \ldots$$
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \ldots$$

Dans le système décimal positivo-négatif on écrirait la suite des nombres de la façon suivante :

$$1,2,3,4,5,\ 1\bar{4},\ 1\bar{3},\ 1\bar{2},\ 1\bar{1},\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 2\bar{4},\ 2\bar{3},\ 2\bar{2},\ 2\bar{1},\ 20,\ \text{etc.}$$

5° SYSTÈME DUODÉCIMAL.

41. Pour écrire tous les nombres avec 12 chiffres, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\alpha=10$, $\beta=11$, il faut que les puissances successives de 12

$$12^0=1,\quad 12^1=12,\quad 12^2=144,\quad 12^3=1728,\quad 12^4=20736\ldots$$

s'écrivent :

$$1\qquad 1.\qquad 1..\qquad 1\ldots\qquad 1\ldots.$$

et qu'en remplaçant chaque point successivement par chacun des chiffres significatifs, on forme ainsi tous les nombres intermédiaires.

La notation $5\alpha8.\beta$ signifiera donc :

$$5\times12^4+10\times12^3+8\times12^2+0\times12^1+11=122\,123.$$

Pour traduire un nombre du système décimal dans le système duodécimal, il faut noter et retrancher successivement les plus grandes puissances de 12 contenues dans le nombre proposé, puis dans les différences s'il y en a, jusqu'à ce qu'on arrive à zéro. Chacune de ces plus grandes puissances pouvant être contenue de 1 à 11 fois dans le nombre ou dans les différences proposées, on notera, par le moyen de un des onze premiers signes, combien de fois il y est contenu.

1706, traduit dans le système duodécimal, donne $ba2$,

car $b \times 12^2$ ou $11 \times 144 = 1584$

$a \times 12^1$ ou $10 \times 12 = 120$

2×12^0 ou $2 \times 1 = 2$

Total..... 1706

Le système duodécimal a été préconisé comme introduisant plus de facilité dans les calculs; mais il résulte des débats soulevés à cet égard qu'il n'y a pas lieu de le pratiquer de préférence aux autres systèmes gradués. Contentons-nous de mentionner le moyen proposé par les défenseurs du système duodécimal pour figurer avec les mains les 144 premiers nombres (*fig.* 3), le pouce servant d'indicateur sur les phalanges des autres doigts, qui portent chacune un numéro spécial. Comme chaque doigt a trois phalanges, le pouce de chaque main peut se poser sur douze phalanges. Si l'on imagine que l'une des mains note les unités de 1 à 12, l'autre notera les douzaines de 12 à 144.

Il faut remarquer que cette manière de noter les nombres, invoquée en faveur du système duodécimal, ne s'applique qu'au système trédécimal (*), car l'un des indicateurs ayant compté douze, l'autre doit marquer treize, et au lieu d'indiquer une douzaine, il doit indiquer une *treizaine*. Ce n'est donc pas les 144 premiers nombres qu'on peut noter avec les doigts, mais les 168 premiers nombres, car le pouce de chaque main étant posé sur la douzième phalange (chaque main présente ici la notation la plus forte), l'ensemble de ces notations sera d'un côté douze treizaines, et de l'autre douze, ce qui donnera en tout

$$12 \times 13 + 12 = 168.$$

6° TABLEAU GÉNÉRAL DES SYSTÈMES GRADUÉS.

42. Par ce qui précède, on voit que les systèmes gradués reposent sur le choix d'une *base*, c'est-à-dire du nombre des chiffres qu'on veut employer. Les puissances de cette base se notent par 1 suivi d'autant de zéros qu'il y a d'unités dans l'exposant; les chiffres significatifs indiquent combien de fois il faut prendre la puissance; le zéro indique que la puissance ne figure pas dans le nombre. Quel que soit donc le système, on pourra toujours imaginer les nombres écrits horizontalement dans la série des cases du tableau suivant où B signifie le nombre des chiffres (y compris zéro) employés dans le système.

.	B^8	B^7	B^6	B^5	B^4	B^3	B^2	B^1	Unités ou B^0	$\frac{1}{B^1}$	$\frac{1}{B^2}$	$\frac{1}{B^3}$	$\frac{1}{B^4}$	$\frac{1}{B^5}$	$\frac{1}{B^6}$	$\frac{1}{B^7}$	$\frac{1}{B^8}$	.
.	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	.

On peut voir que le nombre inscrit dans les cases représente des valeurs différentes, suivant que la base B est 2, 3, 10, 12.

7° ABAQUES.

43. Pour figurer les systèmes gradués, on a imaginé les *abaques* dont nous donnons une image (*Fig.* 4, Abaque décimal) où chaque fil a neuf perles; chaque fois qu'on a fait glisser une à une les neuf perles d'une extrémité à

(*) Système dont la base est 13.

l'autre d'un fil, on fait glisser une perle à l'extrémité libre du fil suivant. Le système binaire aurait pour figure un abaque où chaque fil n'aurait qu'une perle; le système ternaire aurait deux perles à chaque fil, le système duodécimal en aurait onze.

Un système gradué aura donc dans son abaque autant de perles à chaque fil qu'il exige de chiffres significatifs. Le zéro n'est indiqué que par l'absence de perles à l'extrémité libre vers laquelle les perles sont successivement chassées.

NUMÉRATION. — SYSTÈMES COMPLEXES.

1° SYSTÈME DES ROMAINS.

44. Les Hindous pratiquaient déjà les systèmes gradués lorsque les Hébreux, les Grecs et les Romains ne se servaient encore que de systèmes complexes. Le système de numération des Romains nous permet de remonter jusqu'à l'enfance des nombres. 1, 2, 3 étaient, à l'origine, représentés par des traits perpendiculaires I, II, III...

On allait ainsi jusqu'à 10 où l'on faisait une croix X, puis on alignait les croix comme les unités XX, XXX... 20, 30... jusqu'au nombre 100 qui se figurait sous la forme d'un trait doublement barré [.

Les centaines s'alignaient, comme les unités et les dixaines, jusqu'à mille; et ce dernier nombre était figuré par deux centaines qui se regardaient, séparées par une barre [|].

Plus tard, on partagea en deux les signes primitifs, et la moitié du signe forma la moitié du nombre.

V, moitié de 10, X, signifia 5.

L, moitié de 100, [, qui s'arrondit en C, signifia 50.

|], moitié de 1000, signifia 500 et s'arrondit en D.

Quant à mille [|], il s'arrondit en ∞, 8 couché, ou s'écrivit M.

Les chiffres romains furent ainsi portés de 4 à 7, les plus faibles s'écrivirent à la suite des plus forts; quand ils les précédaient, il fallait les en retrancher.

Voici les sept chiffres :	I	V	X	L	C	D	M ou ∞
	1	5	10	50	100	500	1000
	j	v	x	l	c	d	m

Avec lesquels on forma les séries suivantes :

I	1	XX	20	XCIX	99
II	2	XXI	21	C	100
III	3	XXII	22	CC	200
IV	4	XXIII	23	CCCI	301
V	5	XXIV	24	CCCC	
VI	6	XXV	25	CD	400
VII	7	XXVII	27	IVc	
VIII	8	XXVIII	28	DC	
IX	9	XXIX	29	IↃC	600
X	10	XXXI	31	VIc	
XI	11	XXXIV	34	CM	900
XII	12	XXXIX	39	M	1000
XIII	13	XL	40	∞	
XIV	14	XLVII	47	MC	1100
XV	15	XLIX	49	MD	1500
XVI	16	LI	51	MM *ou* IIm	2000
XVII	17	LX	60	MMM *ou* IIIm	300
XVIII	18	LXXXI	81	DCCCXVI	816
XIX	19	XCIV	94		

Comme les nombres s'arrêtaient à mille, on imagina de donner au signe D, ou plutôt IƆ, une valeur dix, cent, mille fois plus grande, en le faisant suivre de Ɔ, ƆƆ, ƆƆƆ; ainsi, IƆƆƆƆ signifiait 500,000; DƆC 5,000 + 100 = 5,100.

On se servit aussi de petites lettres comme d'indices : II[m], X[c], M[m] signifient 2000, 5000, 1 million. La petite lettre surmontée d'un trait se multipliait par elle-même ; $X^{\overline{m}}$ signifiait 10 fois 1000 × 1000 ou 10 millions ; $C^{\overline{m}}$ signifiait 100 millions.

Ainsi les notations de ce système, si simple à son début, sont devenues de plus en plus compliquées. Chacun y introduisit des abréviations et des notations particulières, dont nous venons d'indiquer les principales.

L'algèbre emprunta à la numération romaine sa notation du nombre infini, le huit couché ∞, que les Romains employaient pour exprimer *mille*, c'est-à-dire un nombre qu'il fallait renoncer à compter.

La numération romaine subsista dans l'Europe occidentale jusqu'au xe siècle, époque à laquelle les Arabes introduisirent le système de graduation employé par les Hindous. Quant à l'usage des chiffres dits *arabes*, il ne prévalut chez nous qu'au xvie siècle.

2° SYSTÈME DES GRECS.

45. Les Grecs avaient deux sortes de notations : l'une exceptionnelle, analogue à celle des Romains et qu'on retrouve dans certaines inscriptions, l'autre habituelle.

Dans la première, les majuscules I, Π, Δ, H, X et M (*) signifiaient 1, 5, 10, 100, 1000 et 10,000. Chacune d'elles pouvait se répéter quatre fois, le Π excepté.

On se servait du Π pour envelopper les lettres qu'on voulait multiplier par 5. D'après cela, il faut lire :

ΔΔΙ, 21; $\overline{\Pi[\Delta]}$, 50; $\overline{\Pi[H]}$, 500.

Dans le second système, on ajoutait 3 signes aux 24 lettres de l'alphabet : le fô épisémon ϛ, qui signifiait 6; le koppa ϟ·, 90; le sampi ϡ·, 900; les autres lettres marquées d'un point, en guise d'exposant, exprimaient les nombres successifs :

Alpha,	bèta,	gamma,	delta,	epsilon,	*épisémon*,	dzèta,	èta,	thèta
α·	β·	γ·	δ·	ε·	ϛ·	ζ·	η·	θ·
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Iôta,	kappa,	lambda,	mu,	nu,	xi,	omicron,	pi,	*koppa*
ι·	κ·	λ·	μ·	ν·	ξ·	ο·	π·	ϟ·
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Rô,	sigma.	tô,	upsilon,	phi,	chi,	psi,	oméga,	*sampi*
ρ·	σ·	τ·	υ·	φ·	χ·	ψ·	ω·	ϡ·
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Les mille s'exprimaient avec les mêmes lettres sous lesquelles on mettait, en guise de cédille, un ι (iôta souscrit) : ͵α 1000, ͵β 2000, etc.

(*) Iôta, pi, delta, èta, chi, et mu. Ce sont les initiales des mots : *is*, contraction de *eis*, un, *penté* cinq, *déka* dix, *ékatonn* cent, *chilioï* mille et *myrioï* dix mille.

Les dixaines de mille s'exprimaient par un M placé sous les lettres : $\underset{\text{M}}{\upsilon} = 30,000$, $\underset{\text{M}}{\delta} = 40,000$. On plaçait également le M sous des groupes de lettres pour multiplier ces groupes par dix mille.

On additionnait les valeurs des lettres réunies en groupes :

$$\lambda\alpha' = 31, \quad \underset{\cdot}{\lambda}\ \alpha' = 30001, \quad \overset{\omega}{\underset{\text{M}}{}}\underset{\cdot}{\beta}\alpha' = 8\,002\,001.$$

Il y avait encore d'autres notations qu'il serait superflu d'indiquer ici; disons seulement qu'on proposa de remplacer le M souscrit en séparant, par un point, le groupe multiplié par dix mille des autres groupes. Ce qui conduisit à répartir les nombres par tranches de quatre chiffres.

46. Quelques peuples orientaux, et notamment les Hébreux, exprimaient également leurs nombres par des lettres. Le système des Hébreux avait la plus grande analogie avec celui des Grecs, à cette différence près que leur écriture, comme celle des Arabes, se lisait de droite à gauche et que pour multiplier les nombres par mille, ils les surmontaient d'un *tréma* (¨).

47. Il y a, en dehors des traditions et dans la science actuelle, beaucoup d'autres notations de systèmes complexes, mais comme ces notations ont trait à des quantités concrètes, nous les décrirons en leur lieu. Ce que nous venons d'exposer montre suffisamment quel art et combien d'efforts il a fallu pour arriver à la numération dont on se sert aujourd'hui.

III

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS.

Tous les problèmes relatifs aux nombres se résolvent dans les opérations que nous avons sommairement indiquées (**8** à **14**). Nous avons admis que le lecteur savait pratiquer ces opérations sur des nombres peu considérables; il faut exposer comment il doit les pratiquer sur des nombres quelconques écrits dans le système décimal.

Examinons d'abord comment s'effectuent les opérations sur les nombres entiers.

1° ADDITION.

48. L'addition a pour but de réunir plusieurs nombres en un seul.

Soient à additionner les nombres 9684, 721, 85096.

On constate que chacun de ces nombres est naturellement divisé en unités, dixaines, centaines, mille, etc. On peut donc additionner les unités séparément, les dixaines séparément, etc.:

1° En écrivant les nombres les uns sous les autres, de façon que les chiffres qui expriment des unités soient dans une même colonne verticale; il en sera de même pour les chiffres des dixaines, pour ceux des centaines, etc.;

```
 9684
  721
85096
```

2° Et en disant:

4 + 1 + 6 unités font 11, soit 1 dixaine + 1 unité, mettons 1 unité .... 1 à la base de la colonne des unités et retenons 1 dixaine que nous additionnerons avec les dixaines;

1 dixaine retenue + 8 + 2 + 9 dixaines font 20, soit 2 centaines et 0 dixaines 0

Retenons également les 2 centaines pour les additionner avec la colonne des centaines, 2 centaines retenues + 6 + 7 + 0 font 15 centaines, soit 1 mille et 5 centaines 5

1 mille retenu + 9 + 5 font 15 mille, soit 1 dixaine de mille et 5 mille 5

1 dixaine de mille retenue + 8 dixaines de mille font 9 dixaines de mille 9

95501

Le total se composera donc de 9 dixaines de mille + 5 mille + 5 centaines + 0 dixaine + 1 unité, soit 95501 que nous aurions pu écrire immédiatement sous les nombres à additionner, puisque nous n'avions qu'un chiffre à placer chaque fois à la base de chaque colonne.

L'opération aurait pris immédiatement la forme définitive ci-contre :

```
 9684 ⎫ parties
  721 ⎬ de
85096 ⎭ la somme.
-----
95501   somme.
```

49. Remarquons :

1° Qu'il est indifférent d'ajouter 4 à 1 et à 6 ou 6 à 1 et à 4, le résultat restant le même, puisqu'il comprend le même nombre d'unités;

2° Que, par conséquent, on peut faire l'addition des colonnes de haut en bas ou de bas en haut;

3° Cependant, comme les chiffres ne se présentent pas dans le même ordre, on peut vérifier l'addition en la recommençant de bas en haut quand on l'a faite de haut en bas.

50. La règle de l'addition consiste donc :

A écrire les nombres les uns sous les autres, de façon que les chiffres exprimant les mêmes valeurs de position se trouvent dans une même colonne verticale;

A souligner d'un trait les nombres ainsi disposés;

A faire l'addition de chaque colonne en commençant par la colonne des unités;

A placer sous chaque colonne le dernier chiffre de l'addition partielle, et à retenir le ou les chiffres qui expriment des valeurs supérieures à celles de la colonne pour les faire entrer dans les additions partielles des colonnes qui comprennent des chiffres de valeur correspondante;

A vérifier le résultat en commençant les additions des colonnes de bas en haut quand on les a faites de haut en bas, et réciproquement.

2° MULTIPLICATION.

51. La multiplication a pour but d'additionner rapidement deux ou plusieurs fois le même nombre (*).

Elle comprend trois cas :

52. 1° Le *multiplicande* et le *multiplicateur* (**9**) n'ont qu'un chiffre chacun : On pourrait trouver le résultat de l'opération par voie d'addition en ajoutant le chiffre à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre chiffre, mais le résultat de l'opération est consigné d'avance dans une table dont l'invention est attribuée à *Pythagore* et que l'on construit de la façon suivante :

Écrire les neuf premiers chiffres.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Les doubler.	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Les tripler en ajoutant chaque double au simple correspondant.	3	6	9	12	15	18	21	24	27
Les quadrupler en ajoutant chaque triple au simple correspondant.	4	8	12	16	20	24	28	32	36
Les quintupler en ajoutant chaque quadruple au simple correspondant.	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Les sextupler en ajoutant chaque quintuple au simple correspondant.	6	12	18	24	30	36	42	48	54
Les multiplier par 7 en ajoutant chaque sextuple au simple correspondant.	7	14	21	28	35	42	49	56	63
Les multiplier par 8 en ajoutant les nombres de la 7ᵉ ligne à ceux de la 1ʳᵉ.	8	16	24	32	40	48	56	64	72
Les multiplier par 9 en ajoutant les nombres de la 8ᵉ ligne à ceux de la 1ʳᵉ.	9	18	27	36	45	54	63	72	81

(*) Cette définition ne s'applique rigoureusement qu'à la multiplication des nombres entiers, mais elle doit suffire ici à cause de sa simplicité. La définition générale est : *La multiplication a pour but, étant donnés deux nombres, d'en obtenir un troisième qui soit composé avec l'un des deux nombres comme l'autre est composé avec l'unité.*

53. Cette table pourrait être prolongée à l'infini, mais, telle qu'elle est, elle suffit aux opérations les plus compliquées.

Ainsi le chiffre 6 de la ligne horizontale supérieure forme le sommet d'une colonne verticale où il est répété 2, 3, 4, etc., fois, suivant qu'on descend dans les lignes dont les premiers chiffres sont 2, 3, 4, etc.

Ainsi le produit de 6 par 8 = 48 se trouve dans la 8e ligne qui porte 8 en tête, et à la 6e case de cette 8e ligne.

Ainsi le produit d'un chiffre significatif quelconque par un autre chiffre significatif quelconque se trouve à la rencontre de la colonne verticale qui porte l'un de ces chiffres à son sommet, et de la ligne horizontale qui porte l'autre en tête.

54. 7×8 ou 8×7 nous conduisent également au produit 56.

55. La table de Pythagore n'indique pas le produit d'un chiffre significatif par zéro, ni le produit de zéro par un chiffre significatif, ni le produit de zéro par zéro, parce que tout produit dans lequel zéro figure comme facteur est toujours 0, c'est-à-dire nul.

56. 2° Le *multiplicande* a plusieurs chiffres, le *multiplicateur* n'en a qu'un. Soit 9435×4 (9435 à multiplier par 4).

On pourrait, d'après la définition (**51**), effectuer l'opération par voie d'addition en écrivant quatre fois le nombre 9435,

```
 9435
 9435
 9435
 9435
------
37740
```

Et faire la somme.. 37740

Mais on remarque que : $5+5+5+5$ unités $= 4 \times 5$ unités,
$3+3+3+3$ dixaines $= 4 \times 3$ dixaines,
$4+4+4+4$ centaines $= 4 \times 4$ centaines,
$9+9+9+9$ mille $= 4 \times 9$ mille.

Or on connaît, d'après la table de Pythagore, les produits 4×5, 4×3, $4 \times 4 \times 4 \times 9$, et on voit que pour effectuer l'opération, il suffit de multiplier par 4 chacun des chiffres de 9435, en ayant soin de disposer les chiffres résultant de chaque multiplication partielle comme on aurait fait dans l'addition.

On établit donc l'opération de la façon suivante :

```
 9435 multiplicande,
    4 multiplicateur,
------
37740 produit.
```

Et on dit : 4 fois 5 font 20 unités, soit 0 à la base des unités et 2 à reporter aux dixaines.

4 fois 3 dixaines font 12 dixaines qui, augmentées de 2 dixaines retenues, font en tout 14 dixaines, soit 4 dixaines à placer à la base des dixaines et 1 centaine à reporter aux centaines.

4 fois 4 centaines font 16 centaines qui, augmentées de 1 centaine retenue, font 17 centaines, soit 7 centaines à écrire et 1 mille à retenir.

4 fois 9 mille font 36 mille + 1 mille retenu = 37 mille, dernier produit partiel.

57. 3° Le *multiplicande* et le *multiplicateur* ont plusieurs chiffres.

Soit 4372×538; on constate que l'addition 538 fois 4372 donnerait le résultat cherché, et la somme se composerait de 4372 répété $500+30+8$ fois. Or nous pouvons obtenir facilement chacune de ces 3 parties du résultat de l'opération.

4372 × 8 donne, d'après ce qui précède.................... 34976
4372 × 30 = 4372 × 3 dixaines et donnera 13016, nombre qui, exprimant des dixaines, devra être reculé d'un rang vers la gauche par un zéro.................................... 131160
4372 × 500 = 4372 × 5 centaines et donnera 21860, nombre qui, exprimant des centaines, devra être reculé de deux rangs vers la gauche par deux zéros.................................. 2186000

L'ensemble de ces trois produits partiels donne bien le produit total.. 2352136

Constatons que chaque produit partiel n'a pas besoin d'être suivi de zéros qui n'influent en rien sur l'addition, et qu'il suffit de reculer les chiffres de façon que chacun se trouve dans la colonne des valeurs qu'il exprime.

58. Nous conclurons de là que, pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre de plusieurs chiffres, il faut multiplier le multiplicande successivement par chacun des chiffres du multiplicateur, en ayant soin d'écrire le premier chiffre de chaque produit partiel sous le chiffre du multiplicateur qui l'a fourni; puis faire la somme des produits partiels. On vérifie le résultat en multipliant le multiplicateur par le multiplicande, ce qui doit donner le même produit, comme on le verra plus loin (*Analyse des nombres*).

Voici, comme exemples, différentes opérations :

```
  10008
   3605
 ------
  50040
 60048
30024
--------
36078840
```

(Ici, il n'y a pas de produit partiel de dixaines, et le produit partiel des centaines doit être reculé de deux rangs vers la gauche.)

```
   63000
     350
 -------
   315
  189
 -------
22050000
```

(Ici, on ne multipliera que les chiffres significatifs, et on fera suivre le produit de 4 zéros, parce qu'au lieu de multiplier des unités par des unités, on a multiplié des mille par des dixaines, ce qui a donné des dixaines de mille. Le produit doit donc être multiplié par 10000.)

On peut avoir à effectuer un produit composé de plusieurs facteurs; dans ce cas on multiplie le 1er facteur par le 2e, leur produit par le 3e facteur, le nouveau produit par le 4e facteur, etc., ainsi qu'on l'a vu (**10**).

3e GRADUATION ET PUISSANCES.

59. La graduation a pour but d'effectuer rapidement un produit dont tous les facteurs sont les mêmes.

On obtient les puissances successives d'un nombre par voie de multiplication, en multipliant :

Le nombre par lui-même, ce qui en donne le *carré* ou puissance 2e.
Le carré par le nombre, ce qui en donne le *cube* ou puissance 3e.
Le cube par le nombre, ce qui donne la puissance 4e.
La puissance 4e par le nombre, ce qui donne la puissance 5e.

....

60. C'est ainsi qu'on dressera la table des 9 premières puissances des 10 premiers nombres.

1re	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e puissance.
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000

On voit que toutes les puissances de 1 sont 1. En effet, $1^2 = 1 \times 1 = 1$, $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$, etc.

Rappelons également que la puissance zéro d'un nombre quelconque est égale à 1; $978^0 = 1$.

On remarquera aussi que les puissances de 10 sont le chiffre 1 suivi d'autant de zéros qu'il y a d'unités dans l'exposant; ainsi 10^8 est formé de 1 suivi de 8 zéros 100000000; 10^{83} serait formé de l'unité suivie de 83 zéros.

On remarquera également, d'après la construction des puissances, que tout nombre terminé par un 5 pourra être une puissance de 5 ou de l'un de ses multiples, mais ne pourra l'être d'aucun autre nombre, car il ne figurera à la suite d'aucune puissance dont la racine n'aurait pas pour dernier chiffre 5.

61. On pourrait former plus rapidement diverses puissances d'un nombre sans passer par les graduations successives : 11^4 s'obtiendrait en multipliant

$$11^2 \text{ par } 11^2 \text{ car } 11^4 = (11 \times 11) \times (11 \times 11) = 11^{2+2},$$

11^5 s'obtiendrait en multipliant

$$11^3 \text{ par } 11^2 \text{ car } 11^5 = (11 \times 11 \times 11) \times (11 \times 11) = 11^{3+2}.$$

De même :
$$11^6 = 11^3 \times 11^3 = 11^{3+3},$$
$$11^7 = 11^4 \times 11^3 = 11^{4+3} \ldots \quad 11^9 = 11^3 \times 11^3 \times 11^3 = 11^{3+3+3}.$$

En général, une puissance quelconque s'obtiendrait :

En décomposant l'exposant en parties;

En élevant le nombre séparément à chacune des puissances partielles indiquées par les parties de l'exposant;

En effectuant le produit de ces puissances partielles les unes par les autres (On voit ici que l'addition des exposants indique ici la multiplication des puissances).

62. Il importe d'analyser la multiplication par laquelle on forme le carré et le cube des nombre supérieurs à 10, c'est-à-dire qui ont des dixaines et des unités, quelque considérables d'ailleurs que soient ces nombres.

Soit 98 à élever au carré :

$$\begin{aligned} 98^2 &= (90+8)^2 = (90+8) \times (90+8) \\ &= (90+8) \times 90 + (90+8) \times 8 \\ &= 90 \times 90 + 8 \times 80 + 90 \times 8 + 8 \times 8 \\ &= 90^2 + 2 \times (8 \times 90) + 8^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 90+8 \\ 90+8 \\ \hline 90 \times 90 + 90 \times 8 \\ +8 \times 90 + 8 \times 8 \\ \hline 90^2 + 2(90 \times 8) + 8^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 98 \\ 98 \\ \hline 64 \\ 720 \\ 720 \\ 8100 \\ \hline 9604 \end{array}$$

d'où il faut conclure que le carré d'un nombre quelconque plus fort que 9 qu'on peut partager en dixaines d et en unités u se compose :

1° du carré des dixaines d^2 ;
2° du double produit des dixaines par les unités $2du$ (*);
3° du carré des unités u^2.
En somme de $d^2 + 2du + u^2$.

(*Nota*). Si le nombre, au lieu d'être décomposé en dixaines et en unités, était décomposé en deux parties quelconques a et b, on démontrerait de même que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

63. Le cube d'un nombre composé de dixaines d et d'unités u s'obtiendra en multipliant le carré $(d^2 + 2du + u^2)$ par $d + u$.

Or $\quad (d^2+2du+u^2)\times d = d^2\times d + 2du\times d + u^2\times d$
$\quad\quad = d^3 + 2d^2u + du^2$ (A)

Et $\quad (d^2+2du+u^2)\times u = d^2\times u + 2du\times u + u^2\times u$
$\quad\quad = d^2u + 2du^2 + u^3$ (B)

Et réunissant A à B il vient $\quad d^3 + 2d^2u + du^2$
$\quad + \ldots d^2u + 2du^2 + u^3$

Dont la somme est............ $d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3$

$$90^2 + 2(8\times 90) + 8^2$$
$$90 + 8$$
$$90^2\times 90 + 2(8\times 90)\times 90 + 90\times 8^2$$
$$+ 90^2\times 8 + 2(90\times 8)\times 8 + 8^3$$
$$90^3 + 3(90^2\times 8) + 3(90\times 8^2) + 8^3 = 98^3 = 941192$$

64. D'où il suit que le cube d'un nombre de deux ou plusieurs chiffres qu'on partage en dixaines et en unités se compose :

1° Du cube des dixaines d^3;
2° Du triple produit du carré des dixaines par les unités $3d^2u$;
3° Du triple produit des dixaines par le carré des unités $3du^2$;
4° Du cube des unités u^3.

65. Si le nombre, au lieu d'être décomposé en dixaines et en unités, était décomposé en deux parties quelconques a et b, on démontrerait de même que son cube $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

66. De ce que nous venons d'exposer, on déduit un procédé rapide pour effectuer les carrés et les cubes des nombres consécutifs, 2, 3, 4, 5 etc., 98, 99... etc.

Connaissant, par exemple, le carré de 98, $98^2 = 9604$, on remarque que le carré de 99 est égal à $(98 + 1)^2$
or, d'après ce qui précède $(98 + 1)^2 = 98^2 + 2(98 + 1) + 1^2$.

$$= 98^2 + 2\times 98 + 1 = 9604 + 196 + 1 = 9801 = 99^2.$$

D'où il suit que le carré d'un nombre quelconque se compose du carré du nombre précédent, plus 2 fois le nombre précédent, plus 1.

(*) *du* s'emploie pour $d \times u$.

67. De même le cube de $99 = 99^3 = (98+1)^3$

$$= 98^3 + 3 \times 98^2 \times 1 + 3 \times 98 \times 1^2 + 1^3$$
$$= 941192 + 3 \times 9604 + 3 \times 98 + 1$$
$$= 941192 + 28812 + 294 + 1 = 970299 = 99^3$$

D'où il suit que le cube d'un nombre quelconque se compose : du cube du nombre précédent, plus 3 fois le carré du nombre précédent, plus 3 fois encore ce nombre, plus 1.

68. On voit, en dernière analyse, que la graduation n'introduit aucune forme nouvelle dans le calcul, puisqu'elle ne se compose que d'additions et de multiplications. Elle ne serait pas même considérée comme une opération particulière si elle ne servait de préface à l'extraction des racines.

4° SOUSTRACTION.

69. Quand la soustraction a pour but de constater simplement l'excès d'un nombre sur un autre, il suffit de retrancher le plus petit du plus grand.

Cette opération s'effectue sans travail lorsque le plus petit nombre n'a qu'un chiffre :

$$8 - 5 = 3 \qquad 10247 - 9 = 10238$$

Lorsque le plus petit nombre a plusieurs chiffres, on l'écrit sous le plus grand de façon que les chiffres de même ordre se correspondent, puis on retranche successivement chaque chiffre inférieur du chiffre supérieur $9876 - 5432 = 4444$, ainsi qu'on le voit ci-contre, en retranchant les unités des unités, les dizaines des dizaines, etc.

$$\begin{array}{r} 9876 \\ 5432 \\ \hline 4444 \end{array}$$

car : $9876 = 9000 + 800 + 70 + 6$

et $5432 = 5000 + 400 + 30 + 2$

et la différence est : $4444 = 4000 + 400 + 40 + 4$

70. Il arrive fréquemment que des chiffres inférieurs sont plus forts que les supérieurs (*). Pour résoudre cette difficulté, il faut constater qu'*on ne modifie pas une différence* $68 - 59 = 9$ *en ajoutant un même nombre à ses deux termes* $(68 + 10) - (59 + 10) = 78 - 69 = 9$, car on retranche d'un côté ce que l'on ajoute de l'autre.

9068	somme.
7859	partie connue.
1209	partie inconnue. ou différence.

Si donc nous ajoutons une dixaine au chiffre supérieur trop faible, nous pourrons dans tous les cas effectuer la soustraction partielle du chiffre inférieur qui ne se composera que d'unités simples, à la condition d'augmenter d'une unité le chiffre du nombre inférieur qui exprime des valeurs dix fois plus fortes que le chiffre soustrait. Nous dirons donc :

On ne peut retrancher 9 unités de 8 unités, il faut retrancher 9 de 18 ce qui,

(*) « Lorsque le chiffre inférieur est plus fort que le supérieur correspondant, comme cela se rencontre en ôtant 28637 de 30024, on dispose ces deux nombres ainsi que nous l'avons indiqué; mais 7 étant plus grand que 4, il est clair que le chiffre cherché ajouté à 7 n'a pas donné 4 pour somme, mais 14 ; on dit alors : de 7 à 14 il y a 7. Cela montre qu'on a retenu une dixaine dans l'addition primitive; il faut donc l'ajouter aux 3 dixaines qu'on a déjà, et dire, 3 et 1 font 4, de 4 à 12 il y a 8; de même 6 et 1 font 7; de 7 à 10 il y a 3, 8 et 1 font 9, de 9 à 10 il y a 1, 2 et 1 font 3, de 3 à 3 il y a 0 qu'on se dispense d'écrire. » (Mutel, *Cours d'Arithmétique*.)

$$\begin{array}{r} 30024 \\ 28637 \\ \hline 1387 \end{array}$$

donne 9 pour la différence des unités. Mais il faut également augmenter de 1 le chiffre des dixaines du nombre inférieur 5 ce qui donne 6.

On retranche donc 6 dixaines de 6 dixaines, et non 5 dixaines de 6 dixaines et on obtient zéro pour la différence des dixaines.

De même on retranche 8 centaines non de 0 centaines, mais de 10 centaines, ce qui donne 2 pour la différence des centaines, et on augmente de 1 le chiffre des mille 7 ce qui donne 8.

La différence des mille sera $9 - 8 = 1$.

71. Comme le plus petit nombre ajouté à la différence doit reproduire la somme, on voit que $7859 + 1209 = 9068$.

On voit de même, dans le premier exemple (**63**), que $5432 + 4444 = 9876$.

Pour la vérification d'une soustraction, il faut donc que l'addition de la différence avec le nombre inférieur reproduise le nombre supérieur.

72. La soustraction ne se borne pas toujours à déterminer la différence en plus (*excès*) d'un nombre sur un autre ; cette différence peut être tantôt en plus, tantôt en moins (*défaut*), c'est-à-dire tantôt *positive*, tantôt *négative*.

Si, au lieu de retrancher 4 de 9, nous avons à retrancher 9 de 4, le résultat de l'opération sera un déficit de 5 unités, et ce déficit sera indiqué par le signe — : $4 - 9 = -5$, expression qui signifie qu'il manque 5 unités à 4 pour rendre ce dernier nombre égal à 9 ; en effet $4 + 5 = 9$.

73. Quand on a plusieurs nombres à soustraire d'une même somme $32 - 4 - 3 - 5$, on peut indifféremment soustraire le premier nombre de la somme, puis le deuxième de la différence obtenue, le troisième de la nouvelle différence, etc. :

$$32 - 4 = 28,\ 28 - 3 = 25,\ 25 - 3 = 20$$

On peut également additionner les nombres à soustraire et les retrancher en bloc : $32 - 4 - 3 - 5 = 32 - 12 = 20$.

Ce procédé peut conduire également à des résultats négatifs :

$$32 - 20 - 9 - 7 = 32 - (20 + 9 + 7) = 32 - 36 = -4.$$

5° DIVISION.

74. Quand il s'agit de retrancher un certain nombre de fois (à déterminer), d'une somme connue, une partie connue, jusqu'à ce qu'on arrive à une dernière différence nulle ou inférieure à la partie connue, on fait une division.

$$32 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 = 32 - (4 \times 8) = 0$$
$$36 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 36 - (7 \times 5) + 1$$

Le problème consiste ici non plus à chercher une différence, mais à déterminer combien de fois 4 est contenu dans 32, combien de fois 7 est contenu dans 36. 32 contient 4 exactement 8 fois $\frac{32}{4} = 8$; 36 contient 5 fois 7 avec un reste 1 ; $(36 = (7 \times 5) + 1)$.

32 et 36 sont les *dividendes*, 4 et 7 les *diviseurs*, 8 et 5 les *quotients* : 1 un *reste* qui dans le premier exemple serait 0.

75. On peut donc procéder de deux manières pour effectuer une division.

1° Par voie de soustraction, en retranchant le diviseur d'abord du dividende,

puis de la différence obtenue, puis de la 2ᵉ différence, puis de la 3ᵉ, etc., jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de soustractions à effectuer; le nombre des soustractions opérées indiquerait le quotient.

2° Par voie de multiplication inverse, en cherchant par quel nombre il faut multiplier le diviseur pour reproduire le dividende.

Dans le 1ᵉʳ cas on peut définir la division : *une opération qui a pour but de déterminer combien de fois un nombre est contenu dans un autre.*

Dans le 2ᵉ cas: *une opération qui a pour but de déterminer le facteur inconnu* (quotient), *d'un produit* (dividende), *dont on connaît le facteur connu* (diviseur).

§ 1. *Considérations générales.*

76. La division ne donne pas toujours un quotient exact en nombres entiers, mais elle le donne toujours en expressions fractionnaires, ainsi que nous allons le constater en examinant les conditions générales de la division.

Dans une division quelconque, le dividende D

1° est égal au diviseur; $D = d$,

2° est plus grand que le diviseur; $D > d$,

3° est plus petit que le diviseur; $D < d$.

77. Dans le 1ᵉʳ cas $D = d$, il est clair que le quotient est 1 (*) $\frac{32}{32} = 1$, car $32 \times 1 = 32$. Ce qui indique que un nombre quelconque considéré comme dividende est toujours égal à son produit par l'unité. En d'autres termes, que *tout nombre peut se décomposer en deux facteurs qui sont le nombre lui-même et l'unité.*

78. Dans le 2ᵉ cas $D > d$ (et c'est le cas général de la division), le quotient q sera nécessairement supérieur à l'unité : $q > 1$ mais il ne sera pas toujours exactement représenté par un nombre entier, or :

79. 1° Quand d est contenu un nombre exact de fois dans D, on dit que le dividende est un *multiple exact*, ou simplement un *multiple* du nombre par lequel il est divisé, et celui-ci est dit *diviseur exact* ou simplement *diviseur* du nombre qu'il divise; alors le quotient est toujours un nombre entier: $\frac{28}{7} = 4$.

28 est un multiple de 7 ou de 4; 4 et 7 sont des diviseurs de 28.

2° Quand d n'est pas contenu un nombre exact de fois dans D, le quotient est compris entre 2 nombres entiers consécutifs, et si l'on se contente de l'exprimer par un de ces 2 nombres, on dit qu'il est *approché* soit par *défaut*, soit par *excès*, suivant qu'on choisit le plus petit ou le plus grand des deux nombres. Il y a alors un reste tantôt *positif*, tantôt *négatif*.

$$\frac{28}{3} = 9\,(+1) \qquad 28 = (3 \times 9) + 1$$

$$\frac{28}{3} = 10\,(-2) \qquad 28 = (3 \times 10) - 2$$

Ainsi le quotient de 28 par 3 est compris entre 9 et 10; il est 9 avec un reste $+1$; il est 10 avec un reste -2.

(*) Quand la division est indiquée sous cette forme qu'on appelle *fractionnaire*, le nombre placé au dessus du trait s'appelle indifféremment *dividende* ou *numérateur*; celui qui est placé au dessous *diviseur* ou *dénominateur*.

80. Dans le dernier cas on peut toujours approcher du quotient en supposant que le dividende est suivi d'une quantité quelconque de zéros à sa partie décimale.

$$\frac{27}{4} = \frac{27,0000...}{4} = 6,75...$$

$$\frac{26}{3} = \frac{26,0000...}{3} = 8,6666...$$

Cette manière d'approcher du quotient fait l'objet d'une théorie qu'on va trouver plus loin (**90**).

81. Quand on veut exprimer le quotient d'une manière exacte, il faut avoir recours aux nombres fractionnaires et considérer le dividende comme un tout, un ensemble à diviser en autant de parties égales que le diviseur indique d'unités. Ce n'est plus le nombre entier 28 qu'on divise par le nombre entier 3, mais la quantité 28 dont on prend le tiers; le quotient de 28 par 3 sera donc exactement représenté par vingt-huit tiers :

$$\frac{28}{3} = 9 + \frac{1}{3} = 10 - \frac{2}{3}.$$

82. Dans le 3ᵉ cas $D < d$, il est clair que le quotient ne pourra jamais être aussi grand que l'unité, et par conséquent ne sera exprimé que par une fraction.

Soit à diviser 3 par 28. Il est clair que 3 n'est pas contenu une seule fois dans 28, encore moins y serait-il contenu plusieurs fois. Au premier abord, une telle division paraît impossible. Cependant si l'on considère qu'on peut diviser l'unité en 28 parties, 3 de ces parties ou 3 vingt-huitièmes seront le quotient de 3 par 28.

En d'autres termes $\frac{1}{28}$ répété 28 fois reproduit l'unité, et 3 fois $\frac{1}{28} \times 28$ reproduisent 3 unités, $\frac{3}{28}$ est donc réellement le quotient, puisque multiplié par le diviseur, il reproduit exactement le dividende.

83. Nous n'avons pas de règles à indiquer pour effectuer la division quand le dividende est égal au diviseur, le résultat est toujours l'unité, 1.

Quand le dividende est supérieur au diviseur, les règles sont plus ou moins compliquées suivant que

1° le quotient et le diviseur n'ont qu'un seul chiffre ;
2° le quotient a un seul chiffre et le diviseur plusieurs;
3° le diviseur a un seul chiffre et le quotient plusieurs;
4° le quotient et le diviseur ont plusieurs chiffres.

Quand le dividende est inférieur au diviseur, il donne naissance à des fractions soit ordinaires, soit décimales.

§ 2. *Manière d'effectuer la division sur les nombres entiers.*

84. Il semble étrange qu'on puisse déterminer, avant d'effectuer l'opération, le nombre des chiffres du quotient. Rien n'est plus facile quand on ne cherche le quotient que par défaut.

Dans la division $\frac{28}{4}$, le quotient n'a qu'un chiffre, car si on multipliait le diviseur 4 par 10, 40 serait plus fort que le dividende; le quotient doit donc

être inférieur à 10 et tous les nombres inférieurs à 10 n'ont qu'un seul chiffre.

Dans la division $\frac{2835}{379}$, on voit de même que $379 \times 10 = 3790$ serait plus fort que 2835 ; le quotient est donc inférieur à 10, c'est-à-dire ne peut avoir qu'un seul chiffre.

Dans la division $\frac{67835}{5}$, on voit que $5 \times 10 = 50 < 67835$, de même $5 \times 100 = 500 < 67835$, $5 \times 1000 = 5000$, $5 \times 10\,000 = 50\,000$, sont également plus petits que 67835, mais $5 \times 100\,000 = 500\,000$ est plus grand que 67835, le quotient sera donc compris entre 10 000 et 100 000 ; et tous les nombres compris entre 10 000 et 100 000 ayant 5 chiffres ; le quotient qui sera l'un de ces nombres aura 5 chiffres.

On verra par le même procédé, dans la division $\frac{67943}{543}$, que D est compris entre $d \times 100$ et $d \times 1000$, le quotient aura ici 3 chiffres, comme tous les nombres compris entre 100 et 1000 ; en général, *le quotient aura autant de chiffres* plus un *qu'on pourra ajouter de zéros à la partie entière du diviseur, sans rendre ce dernier plus fort que le dividende.*

85. 1re Règle. — Le diviseur et le quotient n'ont qu'un seul chiffre.

Dans ce cas, le dividende ne peut avoir que deux chiffres au plus, car tous les produits d'un nombre d'un seul chiffre par un nombre d'un seul chiffre sont plus petits que 100, comme on le voit par la table de Pythagore.

Quand le dividende est multiple exact du diviseur, on trouve le quotient dans la table de Pythagore : soit 63 à diviser par 9 ; cherchant 9 dans la ligne horizontale supérieure nous descendrons la colonne dont il forme le sommet jusqu'à ce que nous trouvions 63. Le chiffre 7 placé en tête de la ligne horizontale qui aboutit à 63 sera le quotient $\frac{63}{9} = 7$.

Quand le dividende n'est pas multiple du diviseur, le quotient se trouve compris entre deux nombres consécutifs dont il faut choisir le plus faible : soit 52 à diviser par 6 ; le quotient 9 serait trop fort, car $52 < 6 \times 9 = 54$; le quotient 8 sera trop faible, car $52 > 6 \times 8 = 48$. Nous choisirons cependant le quotient 8, et nous dirons que la division $\frac{52}{6}$ donne un quotient approché 8 avec un reste $\frac{4}{6}$.

86. 2e Règle. — Le quotient a un seul chiffre et le diviseur plusieurs.

Dans ce cas, le dividende a toujours au moins autant de chiffres que le diviseur, qui est un de ses facteurs.

Pour effectuer l'opération, il faut détacher le chiffre des plus hautes unités du diviseur et chercher combien de fois il est contenu dans le nombre d'un ou deux chiffres qui exprime les plus hautes unités dans le dividende. Le quotient ainsi obtenu est quelquefois trop fort d'une unité (rarement de deux unités) ; on le réduit facilement à sa juste valeur.

Soit 3412 à diviser par 853. Détachons les 8 centaines du diviseur et cherchons combien de fois ces 8 centaines sont contenues dans les 34 cen-

taines du dividende ; ou simplement combien de fois 8 est contenu dans 34 ; il l'est 4 fois, 4 est bien le quotient cherché, car $4 \times 853 = 3412$.

Soit encore 6951 à diviser par 2810, les 2 mille du diviseur sont contenus 3 fois dans les 6 mille du dividende, mais en vérifiant par la multiplication $2810 \times 3 = 8430 > 6951$, 3 est un quotient trop fort ; le quotient véritable sera 2 avec un reste 1331 ; $2810 \times 2 = 5620 = 6951 - 1331$; le quotient total est donc $2 + \frac{1331}{2810}$.

Notons que le reste 1331 doit toujours être inférieur au diviseur, car s'il lui était égal ou supérieur, le diviseur serait contenu au moins une fois de plus dans le dividende.

87. 3ᵉ Règle. — Le diviseur a un seul chiffre et le quotient plusieurs.

Dans ce cas, le dividende a plusieurs chiffres et l'opération s'effectue par divisions successives.

Soit 7455 à diviser par 7 ; nous constatons d'après la méthode indiquée (**84**), que le quotient aura 4 chiffres : soit 1 chiffre de mille, 1 chiffre de centaines, 1 chiffre de dixaines, 1 chiffre d'unités.

Cherchons séparément chacun de ces chiffres.

Il est clair que le produit du diviseur 7 par le chiffre des mille du quotient ne pourra se trouver que dans les mille du dividende, il faut donc détacher la partie du dividende 7 qui exprime les mille et les diviser par le diviseur 7, le quotient est 1 ou plutôt 1 mille.

Si maintenant nous retranchons du dividende le produit du diviseur par les mille du quotient, il est clair que ce qui restera du dividende représentera le produit du diviseur par les autres chiffres du quotient, $7 \times 1000 = 7000$, qui, retranchés de 7455, laissent 455, produit du diviseur 7 par les centaines, les dixaines et les unités.

Par le même raisonnement, le produit de 7 par les centaines ne pourra se trouver que dans les 4 centaines du nouveau dividende ; mais il n'y est pas contenu, même une fois. Le chiffre des centaines du quotient est donc zéro, et 455 représente toujours le produit du diviseur par les dixaines et les unités du quotient.

De même nous diviserons, les 45 dixaines du dividende par le diviseur 7 pour obtenir le chiffre des dixaines du quotient 6, et quand nous aurons retranché le produit $7 \times 60 = 420$ de 455, le reste 35 sera le produit du diviseur par le chiffre des unités du quotient qui est 5.

Les chiffres du quotient déterminés successivement sont donc 1 mille + 0 centaines + 6 dixaines + 15 unités, soit en tout 1065 ; on voit en effet que $1065 \times 7 = 7455$.

On peut effectuer cette division beaucoup plus rapidement et dire, en commençant par les plus hautes unités du dividende : le 7ᵉ de 7 mille est 1 mille ; le 7ᵉ de 4 centaines est 0 centaines ; il reste 4 centaines, qui réunies à 5 dixaines font 45 dixaines dont le 7ᵉ est 6 pour 42 ; il reste 3 dixaines qui réunies à 5 unités font 35 unités, dont le 7ᵉ est 5.

$$\left\{ \begin{array}{l} 7455 \\ 1065 \end{array} \right.$$

Chacun des quotients partiels s'écrit sous le dividende à mesure qu'on le détermine.

88. 4ᵉ Règle. — Le quotient et le diviseur ont plusieurs chiffres.

Dans ce cas le dividende a également plusieurs chiffres, et on procède comme dans le cas précédent, en ne tenant compte que des chiffres des plus hautes unités du diviseur. On a soin, comme dans la 2ᵉ règle, de vérifier si le quotient est trop fort, avant de le soustraire du dividende partiel sur lequel on opère.

Ainsi, soit 75347 à diviser par 23.

On dispose l'opération de la façon suivante :

```
75347 { 23
69    { 3275 + 22/23
---
 063
  46
---
  174
  161
---
   137
   115
---
    22
```

Et on dit : le quotient aura 4 chiffres.

Le chiffre des mille se trouvera en divisant les mille du dividende par le diviseur, division partielle que la 2e règle enseigne à opérer et dont le quotient est 3.

Le produit 23 mille $\times 3 = 69$ mille, retranché de 75 mille, donne un reste 6 mille à la suite duquel on abaisse le chiffre des centaines du dividende 3. En 63 centaines, 23 est contenu 2 fois, 2 est le chiffre des centaines. Le produit $23 \times 2 = 46$ retranché de 63, donne 17 centaines. On y ajoute 4 dixaines : 174 dixaines divisées par 23 donnent 7 dixaines au quotient. Le produit $23 \times 7 = 161$, retranché de 174, donne 13 dixaines qui, augmentées des 7 unités du dividende, forment le dernier dividende partiel 137 dont le quotient par 23 est 5 avec un reste définitif 22 ; ce reste divisé par le diviseur, ne donne d'autre expression que $\frac{22}{23}$.

$$\frac{75347}{23} = 3275 + \frac{22}{23} \text{ ou } 23 \times 3275 = 75347 - 22.$$

De cette quatrième règle on déduit la règle générale suivante :

Pour diviser un nombre quelconque par un nombre quelconque, on place le diviseur à la suite du dividende dans la branche supérieure d'une accolade dont la branche inférieure doit contenir le quotient.

On prend alors en tête du dividende assez de chiffres pour former un dividende partiel qui contienne le diviseur au moins 1 fois et pas plus de 9 fois, et l'on cherche le plus grand multiple du diviseur contenu dans ce dividende partiel.

On divise ce multiple par le diviseur ; on obtient ainsi le chiffre des plus hautes unités du quotient que l'on écrit au dessous du diviseur. On multiplie le diviseur par ce chiffre et l'on retranche le produit ainsi obtenu du dividende partiel.

A côté du reste de la soustraction, on abaisse le chiffre suivant du dividende ; on opère sur ce second dividende partiel comme on a opéré sur le premier, et l'on continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chiffres à abaisser. Si le résultat de la dernière soustraction est zéro, le quotient est exact, sinon il y a un reste définitif plus faible que le dividende.

On vérifie la division en multipliant le diviseur par le quotient et en ajoutant le reste s'il y en a. Le résultat doit être égal au dividende.

89. On se dispense dans la pratique d'écrire sous les dividendes partiels le nombre à soustraire ; l'opération se fait comme il suit :

```
1866 { 81
 246 { 23 + 3/81
   3
```

2 étant le chiffre des dixaines du quotient, on retranchera à mesure qu'on multiplie : 2 fois 1 = 2 de 6 reste 4, 2 fois 8 = 16 de 18 reste 2. De même, en 246, 81 est contenu 3 fois, 3 fois 1 = 3 de 6 reste 3 ; 3 fois 8 = 24, de 24 reste 0 que l'on s'abstient d'écrire.

Lorsque le quotient doit avoir beaucoup de chiffres, 5 ou 6 au moins, il est bon, avant d'effectuer l'opération, de construire les neuf premiers multiples du

diviseur. On évite ainsi les tâtonnements qui accompagnent la détermination de chacun des chiffres du quotient.

§ 3. *Du reste et de la division des décimales.*

90. Considérée au point de vue le plus général, la division des nombres entiers a pour but d'extraire la partie entière d'un quotient écrit sous la forme $\frac{D}{d}$ et d'exprimer cette partie entière dans le système décimal. Il s'agit maintenant d'examiner comment la partie non divisée qui garde la forme du *reste* en fraction sur le *diviseur* $\frac{r}{d}$ s'exprimera dans le même système, c'est-à-dire en *décimales*.

Les restes $\frac{4}{6}$ $\frac{1331}{2810}$ $\frac{22}{23}$ $\frac{3}{81}$, des divisions précédentes, présentent par eux-mêmes un quotient complet sous forme de fraction, mais les parties de l'unité qui sont des 52e, des 2810e, des 23e, des 81e, ne sont pas divisées d'après la graduation décimale, en 10mes, 100mes, 1000mes, etc.

Pour exprimer ces fractions en décimales, il faut ajouter au *numérateur* ou *dividende* autant de zéros qu'on veut avoir de décimales. S'agit-il de savoir combien il y a de millièmes dans $\frac{4}{6}$ on effectue la division 4,000 par 6 en ayant soin de constater que 4000 exprimant des millièmes au lieu d'unités, le quotient 666 exprimera des millièmes et devra s'écrire 0,666.

La division laisse ici un reste qui est plus petit qu'un millième, do même que la division des unités du dividende avait laissé un reste plus petit qu'une unité. Quand on ajoute la partie entière à la partie décimale du quotient $\frac{52}{6} = 8,666$, on a obtenu le quotient $\frac{52}{6}$ à moins d'un millième.

Si on avait voulu le quotient à moins d'un millionième, c'est-à-dire avec 6 décimales, il aurait fallu faire exprimer au dividende des millionièmes au lieu d'unités et diviser 52,000000 par 6; le quotient 8,666666 aurait été approché à moins d'un millionième.

91. On voit ici qu'il y aura toujours un reste 4 à la suite de chaque division partielle; et que le quotient sera indéfiniment composé de 666, etc. La raison de cette particularité et les différentes observations auxquelles elle donne lieu font l'objet de *l'Analyse des nombres.*

6° EXTRACTION DES RACINES.

92. On appelle *racine* 1re, 2e, 3e, 4e, etc. d'un nombre (**63**) un autre nombre qui, pris 1, 2, 3, 4, etc. fois comme facteur, donne pour produit le nombre primitif.

La racine 5e de 32768 est 8 $\sqrt[5]{32768} = 8$, car $8^5 = 8\times8\times8\times8\times8 = 32768$.

La racine 8e de 390625 est 5 $\sqrt[8]{390625} = 5$, car $5^8 = 5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5 = 390625$.

La racine 1re d'un nombre est ce nombre lui-même.

La racine 2e ou *carrée* d'un nombre donné est un autre nombre (à déterminer) qui, multiplié 1 fois par lui-même, reproduit le nombre donné.

La racine 3e ou *cubique* d'un nombre donné est un autre nombre (à déterminer) qui, multiplié 2 fois par lui-même, reproduit le nombre donné.

On ne s'occupe, au point de vue des calculs numériques, que de l'extraction des racines carrées et cubiques; quand on veut obtenir des racines d'un degré plus élevé, on a recours à la méthode des logarithmes.

§ 1. *Racines carrées.*

93. Quand le nombre dont on cherche la racine carrée n'a que deux chiffres sa racine n'a qu'un seul chiffre, car le plus petit nombre de 2 chiffres, 10, multiplié par lui-même donne un nombre de 3 chiffres 100.

De même un nombre compris entre 100 et 10000 n'a que 2 chiffres à sa racine, car le plus petit nombre de 3 chiffres, 100, élevé au carré donne un nombre de 5 chiffres 10000.

On peut ainsi déterminer à l'avance le nombre des chiffres de la racine.

94. Il n'y a que deux cas dans l'extraction de la racine carrée : 1° la racine n'a qu'un seul chiffre; 2° elle en a plusieurs.

95. 1° *La racine n'a qu'un seul chiffre* et par conséquent le nombre dont on l'extrait n'a pas plus de 2 chiffres.

Il n'y a de 1 à 100 que 9 nombres de 1 ou 2 chiffres qui aient une racine exacte.

Ce sont d'après le tableau (**60**)	1	4	9	16	25	36	49	64	81
dont les racines sont :	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tout autre nombre qu'une puissance exacte n'a pas de racine exacte en nombres entiers. On verra plus loin qu'il n'en a dans aucune expression numérique, décimale ou fractionnaire. On dit alors que la racine est *incommensurable;* on disait autrefois qu'elle était *irrationnelle* ou *sourde*, mais ces deux dernières expressions ont été rejetées.

Ainsi la racine carrée de 47 est comprise entre 6, racine carrée de 36, et 7, racine carrée de 49; il faut prendre 6 par défaut pour 36 avec une différence en plus 11, ou 7 par excès pour 49 avec une différence en moins — 2.

On ne prend les racines que par défaut, mais on en approche par des décimales comme on le verra tout à l'heure.

96. 2° *La racine carrée a plus d'un chiffre*, et, par conséquent, le nombre dont on l'extrait a plus de 2 chiffres.

Dans ce cas elle se compose de dixaines et d'unités, et le nombre dout on cherche la racine se compose : 1° du carré des dixaines; 2° du double produit des dixaines par les unités; 3° du carré des unités (**62**); 4° d'un reste si le nombre n'est pas un carré parfait.

Soit à extraire la racine carrée de 4096 : $\sqrt[2]{4096}$ ou plutôt $\sqrt{4096}$, car on ne met pas l'indice 2 dans le radical des racines carrées; 4096 étant un nombre compris entre 100 et 10000 aura deux chiffres à sa racine, un chiffre de dixaines et un chiffre d'unités. Le carré du chiffre des dixaines sera un nombre suivi de 2 zéros, c'est-à-dire de centaines, il ne peut se trouver que dans les 40 centaines du nombre.

Le plus grand carré contenu dans 40 est 36, dont la racine est 6.

Retranchons 36 de 40 ou plutôt 3600 produit de 6 dixaines par 6 dixaines, il reste 4 centaines plus 96 unités, soit 496, qui contient le double produit des dixaines par les unités, plus le carré des unités.

Si nous doublons les dixaines de la racine $60 \times 2 = 120$, et si nous divisons

496 par 120 ou plutôt 49 dixaines par 12 dixaines, nous obtiendrons le quotient 4, qui est le chiffre des unités de la racine.

En effet, retranchons $4 \times 120 = 480$ de 496, c'est-à-dire le double produit des dixaines par les unités, il reste 16, qui fournit le carré des unités ; 64 est donc la racine cherchée.

On peut résumer ces opérations de la façon suivante :

$d^2 + 2du + u^2 = 4096$	$64 = d + u$, racine
$d^2 = 3600$	$120 = 2d$ diviseur
$2du + u^2 = 496$	$\frac{496}{120} = 4 = u$ quotient.
$2du = 480$	
$u^2 = 16$	

Mais il est plus simple de procéder ainsi qu'on le voit ci-contre et de dire :

4096	64
496	124
000	4
	496

Séparons les 2 derniers chiffres 96 du nombre 4096 et cherchons le plus grand carré contenu dans 40 centaines. Ce carré est 36 centaines dont la racine est 6 dixaines. Retranchons le carré des dixaines, 36 centaines, de 40 centaines, il reste 4 centaines à la suite desquelles nous abaissons les 2 chiffres séparés 96, soit 496.

Doublons 6, soit 12, et divisons 49 dixaines par 12 dixaines, le quotient 4 sera le chiffre des unités.

En effet, si nous plaçons 4 à la suite de 12 dixaines, le produit de 124, ou $(120 + 4)$, par 4 représentera le double produit des dixaines par les unités 120×4, plus le carré des unités 4×4. Cette dernière opération démontre que 4096 est un carré parfait.

97. Prenons un nombre plus considérable qui ne soit pas un carré parfait, soit $\sqrt{3678321}$.

D'après le raisonnement qui précède, le carré des dixaines de la racine se trouve dans les centaines du nombre. Il s'agit donc de trouver le plus grand carré contenu dans 36783. Mais ce nombre considéré isolément aura plus de deux chiffres à sa racine, et le carré des dixaines de cette racine partielle se trouvera dans 367. De même 367 ayant encore plus de deux chiffres à sa racine, c'est dans 3 qu'il faudra chercher le carré du chiffre des dixaines de la racine de 367.

3678321	1917
267	29
683	381
30221	3827
3432	

Ce carré est 1 centaine dont la racine est 1 dixaine. Retranchons 1 centaine de 367 il reste 267 qui dans l'opération partielle $\sqrt{367}$ représente $2du + u^2$. Doublant le chiffre des dixaines 1 de la racine, et divisant 26 dixaines par 2 dixaines, il vient 9. La vérification $267 = (29 \times 9) + 6$ montre que 19 est la racine de 367.

Mais ce n'est pas la racine de 367, c'est la racine de 36783 que nous cherchons, et l'opération précédente ne peut être considérée que comme ayant servi à soustraire le carré des 19 dixaines de notre nouvelle racine ; le reste 683 représentera donc le double produit des dixaines par les unités, plus le carré des unités du nombre 36783. Pour obtenir le chiffre des unités, il faut donc diviser les 6068 dixaines du reste par le double des 19 dixaines de la racine. Ce double est 38 et le quotient 2, qui est vérifié par la multiplication $382 \times 2 = 764$ et par la soustraction $683 - 764$ se trouve trop fort. Il faut donc prendre 1 pour quotient et reconnaître que $683 - 381 \times 1$ donne 302 pour reste.

Mais ce n'est pas la racine de 36783 que nous cherchons, c'est la racine de 3678321, et l'opération précédente n'a eu d'autre effet que de retrancher de ce dernier nombre le carré des 191 dixaines de la racine. Le chiffre des unités s'obtiendra en doublant 191, soit 382, et en divisant 3022 par 382, ce qui (après plusieurs tâtonnements que la pratique apprend à éviter) donne 7 pour chiffre réel des unités de la racine; le reste 3432 provenant de la soustraction $30221 - 3827 \times 7$ est le reste de l'opération totale.

Pour reconnaître que la racine est bien 1917, il faut multiplier 1917 par 1917, soit 3674889, nombre qui, augmenté du reste 3432, reproduit 3678321.

97 *bis*. Le reste 3432 peut paraître trop fort et laisser supposer qu'on aurait pu ajouter une unité de plus à la racine, c'est-à-dire prendre 1918 au lieu de 1917. Mais nous avons appris (**66**) que les carrés de deux nombres entiers consécutifs diffèrent de 2 fois le premier nombre plus un. Le carré de 1918 serait donc $3674889 + 1917 \times 2 + 1$, soit $3674889 + 3835$; or le reste 3432 étant inférieur à 3835, il est clair que la racine ne peut être 1918, et qu'elle est 1917 à moins d'une unité.

98. Si nous avions voulu obtenir la racine à moins d'un dixième, il aurait fallu que le nombre 3678321 exprimât des centièmes au lieu d'unités, soit $3678321{,}00 = 367821$. Les 2 zéros de la partie décimale auraient été reportés à la suite du reste 3432, et considérant 343200 comme un nombre entier, on aurait, comme précédemment, cherché le dernier chiffre de la racine en divisant 34320 par $1917 \times 2 = 3834$, et le quotient 8 aurait été le chiffre des dixièmes de la racine.

De même, si l'on voulait obtenir la racine à moins d'un centième, il aurait encore fallu ajouter 2 zéros. En général, il faut ajouter autant de fois 2 zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine.

99. *Règle générale :*

1° Partager le nombre proposé en tranches de 2 chiffres à partir des unités, la dernière tranche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre;

2° Prendre la racine du plus grand carré contenu dans cette dernière tranche dont on soustrait le plus grand carré;

3° Abaisser, à la suite du reste, la tranche suivante dont on sépare le chiffre des unités par un point;

4° Diviser le reste ainsi modifié par le double de la racine déjà trouvée; le quotient donne le chiffre suivant de la racine;

5° Vérifier en écrivant le quotient à la suite du double de la racine, multiplier le tout par ce même quotient, et retrancher du reste total;

6° Abaisser la tranche suivante à la suite du nouveau reste, et procéder comme pour le reste précédent;

7° Continuer de la même façon, jusqu'à ce que l'on ait abaissé toutes les tranches.

§ 2. *Racines cubiques.*

100. Quand le nombre dont on cherche la racine cubique n'a que trois chiffres, sa racine n'a qu'un seul chiffre. Le plus petit nombre de 2 chiffres, 10, multiplié 2 fois par lui-même, ou pris trois fois comme facteur, a pour produit un nombre de 4 chiffres 1000.

De même un nombre compris entre 1000 et 1000000 n'a que 2 chiffres à sa racine cubique.

Si nous désignons par n le nombre des chiffres de la racine il faut que le nombre des chiffres de la puissance soit compris entre 3 fois $(n-1)$ et 3 fois $(n+1)$ chiffres.

Soit 5 le nombre des chiffres de la racine, la puissance doit avoir plus de trois fois 4 chiffres et au plus 3×5 chiffres, c'est-à-dire 13, 14 ou 15 chiffres.

101. 1° *La racine cubique n'a qu'un seul chiffre*, et, par conséquent, le nombre dont on l'extrait n'a pas plus de 3 chiffres.

Il n'y a de 1 à 1000 que neuf nombres de 1, 2 ou 3 chiffres qui aient une racine exacte :

Ce sont, d'après le tableau (**60**)	1	8	27	64	125	216	343	512	729
dont les racines sont :	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tout autre nombre ne peut avoir qu'une racine approchée; ainsi 683 a pour racine cubique 8 avec un reste $683 - 512 = 171$.

102. 2° *La racine cubique a plus d'un chiffre* et par conséquent le nombre dont on l'extrait a plus de 3 chiffres :

Dans ce cas elle se compose de dixaines et d'unités, et le nombre dont on cherche la racine, se compose : 1° du cube des dixaines d^3; 2° du triple produit du carré des dixaines par les unités $3d^2u$; 3° du triple produit des dixaines par le carré des unités $3du^2$; 4° du cube des unités u^3 (**63**); enfin, il y a reste si le nombre n'est pas un cube parfait.

Soit à extraire la racine cubique de 596947688 : $\sqrt[3]{596947688}$.

596947688 ayant plus de 6 chiffres et moins de 10 chiffres, sa racine sera comprise entre 100 et 1000, c'est-à-dire aura 3 chiffres; elle se composera de dixaines et d'unités.

Le cube des dixaines de la racine ne pourra se trouver que dans les mille du nombre. La partie 596947 qui renferme ce cube ayant elle-même plus de trois chiffres, elle sera traitée aussi, si on la considère isolément, comme composée de dixaines et d'unités.

Le cube des dixaines de $\sqrt[3]{596947}$ se trouvera dans les 596 mille.

Le plus grand cube contenu dans 596 est 512 dont la racine est 8.

Retranchons ce cube 512 de 596, il reste 84, à la suite duquel on abaisse les 947 unités du nombre 596947 considéré isolément.

Ce reste 84947 étant la différence entre le cube des dixaines d^3 de la racine et le nombre 596947, représente $3d^2u + 3du^2 + u^3$ (**63**), c'est-à-dire 3 fois le carré des dixaines multiplié par les unités, plus 3 fois les dixaines multipliées par le carré des unités, plus le cube des unités.

Si nous faisons le carré des dixaines $8^2 = 64$ centaines, le résultat de ce carré qui donne des centaines, multiplié par $3 = 192$ centaines, $3d^2$, ne pourra se trouver que dans les 849 centaines du reste 84947.

Remarquons maintenant que la partie $3d^2u$, qui comprend le triple carré des dixaines $3d^2$ par les unités u, se trouve également contenue dans les 849 centaines du nombre 84947.

En divisant 849 centaines par 192 centaines nous obtiendrons pour quotient le chiffre des unités u, car u est l'un des facteurs du produit $3d^2u$ dont l'autre est $3d^2$, produit contenu dans 849 centaines.

Seulement le quotient u pourra être trop fort, car dans les 849 centaines du nombre peut figurer également une partie des produits partiels $3du^2$ et u^3.

Ici le quotient exact serait $\frac{849}{192} = 4$.

Pour vérifier si ce quotient est bien le chiffre des unités, nous pourrions faire la somme $3d^2u + 3du^2 + u^3 = 19200 \times 4 + 3 \times 80 \times 4^2 + 4^3 = 76800 + 3840 + 64 = 80704$, et la retrancher du reste 84947, ce qui donnerait le reste 4243.

Mais il est plus expéditif de faire le cube de 84 et de le retrancher de tout le nombre 596947, ce qui donne le même résultat 4243.

L'extraction de la racine cubique de 596947 s'établira donc comme suit ....

Et donnera pour racine cubique 84 avec un reste 4243.

596947	84
512	64
84947	3
	192
$592704 = 84^3$	
4243	

Mais ce n'est pas la racine 3e de 596947, c'est la racine 3e de 596947688 que nous cherchons; et lorsque nous avons négligé les 688 unités nous voulions trouver la racine cubique des dixaines du nombre; cette racine est 84 dont le cube 592704, d^3, retranché de 59694700 a laissé un reste 4243000 auquel il faut ajouter les 688 unités négligées, soit 4243688 qui représente dans l'opération totale $3d^2u + 3du^2 + u^3$.

L'opération se rétablit donc sous la forme... en ne posant que les résultats des calculs, indiqués ci-dessus dans leurs détails, calculs que l'on effectue à part. Séparons les centaines du reste définitif, et d'après le raisonnement qui précède, cherchons, en divisant les 42436 centaines par le triple du carré des dixaines ($840^2 \times 3 = 21168$ centaines), le chiffre des unités.

596947688	842
84947	192
592704	21168
4243688	
596947688	
000000000	

Le quotient exact est 2 comme le démontre le cube de 842 qui donne exactement le nombre 596947688.

103. On voit que l'extraction de la racine cubique du nombre total donne un résultat exact, tandis que l'extraction de la racine partielle de 596947 laissait un reste 4243; pour vérifier si ce reste n'était pas trop fort et si l'on n'aurait pas dû prendre pour racine 85 au lieu de 84, on aurait pu se reporter au principe (**67**) d'après lequel $85^3 = (84+1)^3$ et d'où l'on déduit la différence entre les cubes de 84 et de 85 : $84^2 \times 3 + 84 \times 3 + 1 = 21421 > 4243$, ce dernier nombre n'était donc pas trop fort. La racine 3e de 596947 était donc obtenue à moins d'une unité.

104. Si nous avions voulu obtenir la racine à moins d'un dixième, il aurait fallu que le nombre 596947 exprimât des millièmes au lieu d'unités, soit $596947{,}000 = 596947$; les 3 zéros de la partie décimale auraient été reportés à la suite du reste 4243, et traitant 4243,000 comme un nombre entier, on aurait, comme précédemment, cherché le chiffre suivant de la racine qui aurait été 0,1.

De même pour obtenir la racine à moins d'un centième, d'un millième, il aurait fallu composer la partie décimale du nombre de 3, 6, 9, etc., zéros, et en général d'autant de fois 3 zéros qu'on aurait voulu obtenir de chiffres à la partie décimale de la racine.

105. *Règle générale* :

1° Partager le nombre en tranches de 3 chiffres à partir des unités, la dernière tranche pouvant rester incomplète;

2° Prendre la racine du plus grand carré contenu dans cette dernière tranche dont on soustrait ce plus grand carré;

3° Abaisser, à la suite du reste, la tranche suivante dont on sépare les 2 derniers chiffres par un point placé à la suite des centaines;

4° Diviser le reste ainsi modifié par le triple carré de la racine déjà trouvée, le quotient donne le chiffre suivant de la racine ;

5° Vérifier en cubant le nombre total déjà obtenu à la racine, et en retranchant ce cube du nombre formé par l'ensemble des tranches sur lesquelles on a déjà opéré ;

6° Abaisser la tranche suivante à la suite du nouveau reste, et procéder comme pour le reste précédent ;

7° Continuer de la même façon jusqu'à ce qu'on ait abaissé toutes les tranches.

1re *Remarque.* — Il est facile de constater que l'extraction des racines cubiques nécessite des calculs déjà très-compliqués. On pourrait établir la théorie de l'extraction des racines quatrièmes, mais elle serait presque inintelligible et sans utilité réelle, car il faudrait renoncer à l'employer dans la pratique.

On apprendra comment, par une simple division ot à l'aide des logarithmes, on obtiendra une racine quelconque d'un nombre quelconque.

L'extraction de la racine cubique elle-même n'est presque jamais pratiquée par les mathématiciens d'après les procédés que nous venons d'indiquer. Il est en général plus prompt et plus sûr d'avoir recours à la méthode des logarithmes pour toutes les extractions de racines sans exception.

2e *Remarque.* — Si l'on a bien saisi l'enchaînement des opérations, on verra qu'elles se bornent à celles que nous avons indiquées.

La graduation se confond déjà avec la multiplication, et le procédé de l'extraction des racines se réduit presque à des divisions.

Les puissances égales de puissances égales $(3^2)^2$ se borneraient à la multiplication de $3^2 \times 3^2$.

Les racines égales de racines égales se borneraient à extraire une première racine, puis la racine de cette racine ; et comme la méthode des logarithmes ramène tout à des divisions, il n'y a en réalité dans la Théorie des nombres que quatre opérations fondamentales : l'*addition*, la *soustraction*, la *multiplication*, et la *division*, avec lesquelles on peut effectuer tous les calculs numériques.

Si nous continuons à parler des puissances et des racines, c'est en vue seulement des théories importantes auxquelles elles donnent lieu en algèbre quand il s'agit de résoudre certains problèmes.

IV

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX.

1° PRÉLIMINAIRES.

106. D'après les principes mêmes de la numération graduée, tout nombre a sa partie significative précédée et suivie d'une infinité de zéros. En considérant les nombres commo s'arrêtant aux unités simples, nous no los avons pas considérés sous leur véritable point de vue, car leur valeur étant déterminée par le dernier chiffre significatif, ils peuvent exprimer des dixaines, des mille, des millions, etc., des dixièmes, des centièmes, des millièmes, etc., aussi bien que des unités simples. Rappelons donc que :

1° Tout nombre peut être considéré comme suivi, au delà du chiffre qui exprime ses unités simples, d'une virgule et d'une infinité de zéros;

2° Pour multiplier ou diviser un nombre quelconque par une puissance de 10, il suffit de faire descendre ou remonter la virgule qui sépare la partie entière de la partie fractionnaire d'autant de chiffres qu'il y a d'unités dans l'exposant, ou de zéros dans la puissance de 10 proposée.

3° On peut donner aux nombres (entiers, fractionnaires ou fractions) écrits dans le système décimal autant de décimales que l'on voudra par l'addition de zéros, sans changer la valeur de ces nombres.

107. Quand on étend les opérations des nombres entiers aux nombres fractionnaires et aux fractions décimales, on doit faire en sorte que tous les nombres proposés aient chacun une même quantité de *décimales* (chiffres placés à la suite de la virgule) en ajoutant des zéros aux nombres qui en manquent.

Cette opération préliminaire est indispensable quand on veut posséder la théorie des opérations sur les nombres décimaux; on néglige, il est vrai, de l'effectuer dans la pratique, mais il faut y avoir recours dans les cas douteux.

2° ADDITION ET SOUSTRACTION.

108. Soit à effectuer l'addition $0{,}008+63{,}7+643{,}5062$	0,0080
qui revient à $0{,}0080+63{,}7000+643{,}5062$, nombres qui ont	63,7000
la même quantité de décimales, sans avoir changé de valeur.	643,5062
Il est clair que la somme..........	707,2142

est bien celle que nous cherchions, puisque les dix millièmes ont été placés sous les dix millièmes, les millièmes sous les millièmes, les centièmes sous les centièmes, etc., et que la virgule a séparé, dans la somme, les dixièmes des unités.

Si l'on avait négligé les zéros additionnels, comme on le fait dans la pratique, il aurait fallu placer les chiffres significatifs les uns sous les autres, de façon que les mêmes graduations décimales soient dans la même colonne verticale ; et on aurait séparé à la somme autant de décimales qu'il y en a dans le	0,008 63,7 643,5062 707,2142

nombre qui en contient le plus. L'opération aurait pris la forme ci-dessus.

Quand il n'y a point de partie entière dans le nombre à additionner, l'opération ne souffre pas plus de difficulté.

(1°) $0,05+0,3002+0,94=1,2902.$

(2°) $0,004+0,0002+0,00009=0,00429.$

On voit même dans l'exemple (1°) que l'addition de fractions proprement dites peut donner un nombre fractionnaire, c'est-à-dire une partie entière 1 et une partie décimale 2902.

On procédera de même pour la soustraction :

$$63-0,07=63,00-0,07=62,93$$
$$0,9025-0,051=0,9025-0,0510=0,8515$$

Au lieu d'opérer sur des nombres composés d'unités simples, on opère ici sur des nombres composés de dixièmes, de centièmes, de millièmes, etc.

3° MULTIPLICATION.

109. Il est inutile de donner aux facteurs la même quantité de décimales ; on effectue l'opération comme sur les nombres entiers, *et on sépare au produit autant de décimales qu'il y en a dans tous les facteurs.*

Si le produit présente à la suite de la partie décimale un certain nombre de zéros, on peut les supprimer sans modifier le résultat.

$$0,008\times 63=0,008\times 63,000=0,504000=0,504$$

Car 63 fois 8 millièmes donnent évidemment 504 millièmes,

$$54,23\times 8,3=54,23\times 8,30=450,1090=450,109,$$

car 5423 centièmes multipliés par 83 *unités* auraient donné des centièmes ; multipliés, en réalité, par des dixièmes 8,3 ils donneront des valeurs dix fois moindres, c'est-à-dire des millièmes.

110. Le dernier exemple nous apprend que des fractions multipliées par des fractions donnent un produit plus faible que l'un quelconque des facteurs. Cette particularité s'étend à la multiplication d'un nombre entier ou fractionnaire par une fraction, mais elle ne s'étend pas au cas où il n'y a pas de fractions comme facteurs du produit ; c'est-à-dire, pour être plus explicite :

111. 1° Le produit de deux ou plusieurs facteurs entiers ou fractionnaires est plus fort que chacun de ces facteurs ;

2° Le produit de nombres entiers ou fractionnaires par une fraction est plus faible que chacun des facteurs entiers ou fractionnaires, mais plus fort que la fraction.

3° Le produit de fractions par des fractions est plus faible que chacun de ses facteurs.

4° DIVISION.

112. Quand on a donné au dividende et au diviseur le même nombre de décimales, la division s'effectue comme sur les nombres entiers, et, dans le cas $D > d$ (**78**), le quotient est toujours un nombre exact ou approché à moins d'une unité d'un ordre décimal donné.

1° $\frac{0,63}{0,0009} = \frac{0,6300}{0,0009} = 700$ exactement.

2° $\frac{450,109}{8,3} = \frac{450,109}{8,300} = \frac{450\ 109}{8\ 300} = 54$ à moins d'une unité.

3° $\frac{11,7}{9} = \frac{11,7}{9,0} = \frac{117}{90} = 1,3$ exactement.

4° $\frac{56,273}{3} = \frac{56,273}{3,000} = \frac{56273}{3000} = 18,757$ à un millième près.

Ces exemples nous apprennent que, dans le cas $D > d$, les quotients de deux nombres quelconques (entiers, fractionnaires ou fractions) sont des nombres entiers exacts ou approchés avec une suite décimale. Cela tient à ce qu'un nombre quelconque de dixièmes, de centièmes, de millièmes, etc., est contenu dans un nombre supérieur de dixièmes, de centièmes, de millièmes, etc., de la même façon qu'un nombre quelconque d'unités l'est dans un nombre plus fort d'unités.

Les exemples (2°) et (4°) nous apprennent en outre que quand le quotient n'est pas exact, on peut en approcher à moins d'une unité simple ou d'une unité d'un ordre décimal quelconque, comme on le fait pour les nombres entiers (**90**).

Nous constatons enfin que la division d'une fraction par une fraction donne un nombre supérieur au dividende; et cela se conçoit facilement puisque (**111**) le dividende, qui peut être considéré comme le produit du diviseur par le quotient, doit être plus faible que ses facteurs quand ils sont des fractions.

113. Dans le cas où $D < d$, le quotient est, comme dans les nombres entiers, une fraction ordinaire et nous examinerons plus loin à l'article *Fractions*, comment nous en obtiendrons la notation.

5° GRADUATION ET EXTRACTION DE RACINES.

114. La graduation et l'extraction des nombres décimaux ne donnent lieu à aucune règle particulière puisque les opérations s'y bornent à des multiplications et à des divisions.

Nous remarquerons cependant que d'après les règles de la multiplication décimale (**109**), chaque décimale donnera deux chiffres au carré du nombre, 3 au cube, 4 à la 4e puissance, etc., en sorte qu'avec une puissance 2e, on ne peut avoir un nombre impair de décimales; avec une puissance 3e, un nombre de décimales qui ne soit pas multiple de 3, etc.

Lors donc que l'on voudra extraire la racine d'une fraction ou d'un nombre fractionnaire, il sera indispensable d'ajouter, s'il y a lieu, autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre des décimales soit multiple de l'indice de la racine.

Ainsi, dans l'extraction de la racine carrée ou cubique d'un nombre décimal, il faut que le nombre, partagé en tranches de 2 ou 3 chiffres, ne comprenne pas à la fois, dans une même tranche, des entiers et des décimales, et que le chiffre des unités du nombre proposé soit toujours le dernier d'une des tranches à abaisser.

V

DES OPÉRATIONS APPROCHÉES.

1° PRÉLIMINAIRES.

115. Quand nous avons à évaluer des nombres considérables, il nous est indifférent de négliger des valeurs insignifiantes, surtout lorsqu'elles n'apportent aucune modification appréciable dans la pratique. S'il s'agissait d'évaluer la quantité de gouttes de pluie qui ont formé un fleuvo, nous nous estimerions satisfaits d'en savoir le nombre à quelques milliers près. De même nous ne noùs soucions pas que notre taille ait un millionième de mètre de moins ou de plus, ni qu'il y ait un centimètre de plus ou de moius dans le chemin qui mène de Paris à Rome. Les mathématiciens, d'ailleurs, ont reconnu qu'il est certains calculs où l'on ne peut formuler que des résultats approchés. La division de 4 par 3, par exemple, quand on veut obtenir un quotient exprimé en décimales, donne une série infinie de chiffres 1, 3 3333..., etc., série qu'on ne peut faire entrer dans une opération sans négliger des valeurs de plus en plus petites, sous peine de consacrer l'éternité à écrire un seul nombre qui ne se terminera jamais.

Ces considérations out conduit la science à déterminer les règles qui président au calcul des nombres approchés. Nous allons signaler les lois les plus importantes des opérations effectuées sur des nombres exprimés à l'aide du système décimal; nous aurons lieu de revenir, à propos des *fractions* et du *calcul infinitésimal*, sur la théorie générale des approximations.

116. On dit qu'un nombre est approché quand on se contente de l'exprimer à moins d'une unité d'un ordre décimal donné, c'est-à-dire quand l'erreur provenant des chiffres négligés ne dépasse pas une puissance entière ou fractionnaire de 10, en d'autres termes : 1 unité, 1 dixaine, 1 centaine, etc., ou 1 dixième, 1 centième, 1 millième, etc.

Lorsqu'au lieu du nombre 3,1415926... nous nous contentons du nombre 3,1415, nous négligeons 0,0000926... et nous disons que le 1er nombre est approché du 2e à moins de 1 dix millième, puisque la partie négligée est moindre que 1 dix millième, quelle que soit d'ailleurs la suite indéfinie de décimales 0,000926...

117. Remarquons ici qu'en substituant le nombre 3,1416 au nombre 3,1415, l'approximation aurait été plus satisfaisante, car la différence entre les deux nombres 3,1415926... — 3,1415 = 0,0000926... est beaucoup plus grande que la différence entre les deux nombres 3,1416 — 3,1415926... = 0,0000126... On arrive facilement à conclure de ceci que quand on substitue un nombre approché à un nombre exact, il faut augmenter do 1 le dernier chiffre du nombre approché si la suite négligée dans le nombre exact commence par un chiffre plus grand que 5; on ne fait aucune modification dans le cas contraire. On dit alors que le nombre est approché à moins d'une demi-unité de l'ordre donné.

Cependant, de peur d'introduire trop de complications dans les calculs, nous ne parlerons que des nombres approchés par défaut, c'est-à-dire des nombres dont on n'a pas modifié le dernier chiffre.

2° OPÉRATIONS.

118. *Addition abrégée.* Soit à additionner 235,067298 + 3,565089 + 0,00072 à moins de 1 dix millième :

La question se réduit à savoir combien il y a au juste de dix	235,0672
millièmes dans la somme; et il semble qu'en additionnant les	3,5650
dix millièmes des nombres, nous obtiendrons le résultat cherché;	0,0007
mais ce résultat...	238,6329

comparé au résultat exact 238,633107, nous donne une erreur absolue de 0,000207 = 238,633107 — 238,6329, erreur plus grande que 1 dix-millième, cela tient à ce que les retenues, provenant de l'addition de la colonne des cent millièmes dans l'addition complète, ont augmenté de 2 la somme des dix millièmes; il n'aurait donc pas fallu, dans l'addition abrégée, se borner à additionner les dix millièmes, mais il aurait fallu, additionner aussi les cent millièmes pour obtenir la somme 238,6331 à 1 dix-millième près. On aurait pu négliger les décimales inférieures aux cent millièmes.

Les retenues peuvent être d'autant plus considérables qu'il y a plus de nombres à additionner. Une colonne de l'addition peut en effet ne se composer que de 9. Douze nombres qui fourniraient chacun un 9 à la colonne des millionièmes donneraient un total $12 \times 9 = 108$, qui augmenterait de 1 les dix-millièmes de la somme; cent douze nombres, dans les mêmes conditions, fourniraient à la colonne des dix-millionièmes un total $112 \times 9 = 1008$ qui augmenterait de 1 les dix millièmes de la somme. Il résulte de là que, dans l'addition abrégée de 2 à 12 nombres, on doit conserver les chiffres d'un ordre 1 fois plus faible que celui auquel on veut s'arrêter; dans l'addition de 12 à 112 nombres, il faut faire entrer les chiffres d'un ordre 2 fois plus faible; dans l'addition de 112 à 1112 nombres, les chiffres d'un ordre 3 fois plus faible, etc.

119. *Multiplication et graduation abrégées.* — Il semble résulter de ces considérations que, dans la multiplication, et surtout dans la graduation, où 439×235, 439^2, équivalent à l'addition de 235 fois 439, 439 fois 439, il est impossible de procéder par voie abrégée. Mais il suffira de pousser chaque produit partiel jusqu'à une unité d'un ordre décimal deux fois plus faible que celui auquel on veut s'arrêter, et comme ces produits partiels n'excèdent que fort rarement le nombre 12, on obtiendra le produit total à moins d'une unité de l'ordre donné.

Soit 23,527190634... à multiplier par 52,30524986 à moins de 1 millième.

Poussons chaque produit partiel jusqu'aux cent millièmes en commençant par les produits partiels les plus élevés.............. 23,527190634...

52,30524986....

23,527190	× 50 donnent..................	1176,35950
23,52719	× 2..........................	47,05438
23,5271	× 0,3.........................	7,05813
23,527	× 0,00	0,00000
23,52	× 0,005.......................	0,11760
23,5	× 0,0002......................	0,00470
23	× 0,00004.....................	0,00092
2	× 0,000009....................	0,00018
	Total............	1230,59541

Si l'on a suivi avec attention les opérations, on reconnaîtra qu'en négligeant les deux derniers chiffres, le total 1230,595 est le produit cherché, à moins de 1 millième; car chaque produit partiel peut être assimilé à une addition où le multiplicande n'entrerait pas plus de 9 fois, et où, par conséquent, l'erreur ne peut affecter que le dernier chiffre; cependant, comme dans l'addition des produits partiels, les erreurs provenant de l'addition des derniers chiffres peuvent encore affecter l'avant-dernier chiffre du total, on est forcé d'introduire deux chiffres de plus dans l'opération. Il faudrait en introduire 3 si le nombre des produits partiels dépassait 11, mais ce cas est rare.

Pour faciliter le calcul, Oughtred propose d'écrire chaque chiffre du multiplicateur sous le chiffre à multiplier du multiplicande afin d'obtenir l'ordre décimal auquel on limite l'opération. Cela revient à renverser le multiplicateur, à placer le chiffre de ses unités simples sous le chiffre du multiplicande auquel on limite l'opération, et à négliger tous les chiffres isolés, soit du multiplicande soit du multiplicateur, ainsi qu'on le voit ci-contre. On commencera chaque produit partiel par la multiplication du chiffre du multiplicande placé au dessus de chaque chiffre du multiplicateur. La virgule est absente de part et d'autre, car, sachant d'avance quelle est la valeur décimale du dernier chiffre du produit total, on lui assigne facilement sa place.

```
 23527190634...
...6894250325
-------------
 117635950
  4705438
   705813
   000000
    11760
      470
       92
       18
-------------
 1230,59541
```

Ces principes s'appliquent à la graduation, car les puissances s'obtiennent par des multiplications successives.

120. Il est facile de reconnaître que ces principes s'appliquent également aux nombres entiers quand on veut obtenir une somme, un produit, une puissance à moins d'une unité, d'une dixaine, d'une centaine, etc.

121. *Soustraction abrégée.* Quand on a donné à chacun des deux nombres sur lesquels on opère le degré d'approximation le plus exact possible, on effectue l'opération sans observer d'autre méthode que celles indiquées dans la soustraction des nombres entiers ou décimaux.

122. *Division abrégée.* Il est facile de la déduire de la règle de la multiplication abrégée lorsque l'on considère le dividende comme un produit, le diviseur comme un des facteurs de ce produit, et le quotient comme l'autre facteur.

```
163025413...
613245
```

La multiplication abrégée, ci-contre, à moins d'un centième, nous fournit les produits partiels a, b, c, d, e, f............................

```
815125... a
 65208... b
  3260... c
   489... d
    16... e
     6... f
```

et le produit total.............................. 88,4104

que nous allons prendre comme dividende.

Le multiplicande **16,3025413...** servira de diviseur.

Il s'agit de retrouver le multiplicateur 5,42316 qui sera le quotient.

Constatons d'abord que dans la multiplication abrégée nous n'avons opéré que sur les dix millièmes du multiplicande, et que nous nous sommes arrêtés aux dix millièmes du produit en négligeant de part et d'autre les autres chiffres.

Il faudra donc, dans la division abrégée, n'introduire, dans le dividende et dans le diviseur, que les décimales d'un ordre cent fois plus faible que celui auquel on veut s'arrêter ; ici ce sont les dix millièmes.

En supposant que le dividende soit 88,41049999... le diviseur étant **16,3025413...** l'opération se posera sous la forme ci-contre.

884104	163025
815125	5,
68979	

où ne figureront de part et d'autre que les dix millièmes, et où la virgule sera supprimée d'après la règle de la division des nombres décimaux (**111**).

Le premier chiffre du quotient sera évidemment 5 unités ;

Le produit du diviseur par 5 donnera le premier produit partiel **a**, de la multiplication abrégée ; soit 815125 que nous retrancherons de 884104.

La différence 68979 représentera la somme des produits partiels *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Le second chiffre du quotient exprimera des dixièmes ; et, comme nous arrêtons les opérations aux dix millièmes, il sera inutile d'introduire dans la nouvelle division le chiffre 5 des dix-millièmes du diviseur, qui, multiplié par les dixièmes du quotient, donnerait des cent millièmes.

La seconde division partielle s'établira donc sous la forme suivante : dont le quotient est 4, le produit partiel $16302 \times 4 = b =$ ....

Le reste sera................................

68979	16302
65208	*4 dixièmes*
3771	

Ce reste est la somme des produits partiels *c*, *d*, *e*, *f*.

Remarquons ici que le dernier chiffre du précédent diviseur a été supprimé.

Par les mêmes raisons, la 3[e] division partielle prendra la forme.. où le dernier chiffre du précédent diviseur sera supprimé.

3771	1630
3260	*2 centièmes*
511	

3260 représente le produit partiel *c* ; et le reste de la division, 511, la somme des produits partiels *d*, *e*, *f*.

4[e] division partielle,	511	163 *diviseur réduit à 3 chiffres.*
produit partiel d...	489	3 *chiffre des millièmes du quotient.*
Somme des produits partiels *e*, *f*...	22	

5[e] division partielle,	22	16 *diviseur réduit à 2 chiffres.*
produit partiel e...	16	1 *chiffre des dix millièmes du quotient.*
produit partiel f...	6	

6[e] division partielle,	6	1
	6	6
	0	

Le raisonnement que nous venons de faire pouvant s'appliquer à tous les

cas, résumons toutes les divisions partielles en une seule et établissons la règle générale de la division abrégée :

1° Supprimer au diviseur tous les chiffres inférieurs à ceux exprimant des valeurs cent fois plus faibles que les valeurs auxquelles on veut s'arrêter.

2° Ne garder au dividende qu'autant de chiffres qu'il en faut pour contenir le diviseur au moins une fois et pas plus de 9 fois.

(Dans le cas où l'un des deux nombres n'aurait pas assez do décimales, ajouter à sa suite un nombre suffisant do zéros. On no tiendra pas compte de la virgule s'il y en a une).

3° Déterminer le premier chiffre du quotient selon les règles ordinaires..............................

4° Supprimer le dernier chiffre du diviseur (on indique cette suppression en surmontant ce chiffre d'un point) et diviser le reste (68979) par le diviseur (16302), ainsi modifié;

5° Supprimer, à chaque division partielle, le dernier chiffre du précédent diviseur, et diviser chaque nouveau reste par le diviseur ainsi modifié;

6° Continuer de la sorte jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chiffres au diviseur.

7° Vérifier l'opération par la multiplication abrégée; on devra retrouver comme produits partiels tous les nombres soulignés d'un trait dans la division.

8° Supprimer comme inexacts les deux derniers chiffres du quotient qui expriment, le dernier des valeurs cent fois plus faibles, l'avant-dernier des valeurs dix fois plus faibles que celles auxquelles on veut s'arrêter.

```
884104 | 163025
815125 | 5,42316
------
 68979
 65208
 -----
  3771
  3260
  ----
   511
   489
   ---
    22
    16
    --
     6
     6
     -
     0
```

123. *Extraction abrégée*. — 1° *Racine carrée*. Lorsque l'on a obtenu par le procédé ordinaire 3 chiffres à la racine, on peut en obtenir immédiatement deux autres et, en général, lorsqu'on a obtenu un nombre quelconque m de chiffres à la racine on peut en obtenir immédiatement $m - 1$ autres.

Soit $\sqrt{76807698,53673}$ dont on complètera préalablement la partie décimale par l'addition d'un zéro (**114**). Les trois premiers chiffres de la racine sont 876 dont le carré, retranché du nombre total, a laissé un reste 700.

Abaissons, à la suite de ce reste, autant de tranches que nous cherchons de chiffres à la racine, soit 98,53 (nous savons d'avance que la virgule se trouvera placée entre les deux nouveaux chiffres de la racine (**114**).

```
76807698,536730 | 8764,000
   70098,53     | 1752
76807696,00       175280
---------------
       2,53
```

Considérons provisoirement le nombre 7009853 comme entier, négligeons la dernière tranche 53 et divisons 70098 par le double 1752 des 876 centaines de la racine de ce nombre entier. Il est clair que si l'on décompose la racine en centaines et en unités, 700 dixaines de mille sera le reste provenant de la soustraction du carré de 876 centaines, et 7009853 renfermera le double produit des centaines par les unités, plus le carré des unités. Ici le quotient de 70098 centaines (le double produit des centaines par les unités ne peut se trouver que dans les centaines) par $876 \times 2 = 1752$, est 40. Faisons le carré de 87640 et retranchons-le

du nombre total, il vient $(87640)^2 = 76807696{,}00$ qui, retranché de 76807698,53 donne pour reste 2,53.

Il reste encore deux tranches de 2 chiffres qui nous donneront 2 chiffres à la racine. On peut obtenir ces deux chiffres par le même raisonnement, en considérant le nombre total comme entier et le reste 258 comme provenant de la soustraction du carré des 87640 centaines de la racine, 2536730 renfermant les autres parties du carré du nombre décomposé en centaines et en unités. La division 25367 par $87640 \times 2 = 175280$ donne pour quotient 00 qui seraient les deux derniers chiffres de la racine, et cette racine sera 8764,000 obtenue à moins de 0,001.

Si l'on avait voulu pousser l'approximation à moins de 0,00001 on aurait pu étant donnés les 5 premiers chiffres seulement de la racine, 8764,0 trouver immédiatement les 4 autres. Pour cela, ayant ajouté 4 zéros à la suite du reste 2,536730, on aurait considéré ce reste comme entier et provenant de la soustraction du carré des 87640 dixaines de mille (puisqu'il y a encore 4 chiffres à déterminer à la racine). Le reste 25367300000 contiendrait donc lo double produit des dixaines de mille par les unités plus le carré des unités (les unités peuvent comprendre ici non seulement des unités mais des dixaines, des centaines et des mille), or, en divisant les dixaines de mille du reste par le double des dixaines de mille de la racine, on trouvera le nombre des unités. On peut effectuer cette opération par la division abrégée. Le quotient de

$$2536730 \text{ par } 87640 \times 2 = \frac{253673000}{175280} = 14,$$

14 est donc le nombre des unités, et comme il n'y a ni des centaines ni des mille dans ce résultat, on les remplace par des zéros, ce qui donne en réalité un quotient 0014, et une racine totale 8764,00014 à moins de 0,00001.

2° *Racine cubique*. On extraira la racine cubique par le même procédé, en déterminant à la fois autant de nouveaux chiffres qu'il y en a de trouvés, moins un, à la racine. On pourrait, à la vérité, déterminer un nombre de chiffres nouveaux égal à celui du nombre trouvé, mais on doit craindre que le dernier chiffre ne soit erroné, ce qui n'arrive jamais dans le cas contraire.

Il importe de bien remplacer par des zéros les chiffres significatifs qui manquent à la racine.

THÉORIE DES NOMBRES. — IIe PARTIE

ANALYSE DES NOMBRES.

124. L'analyse des nombres n'est pas destinée seulement à satisfaire notre curiosité ; elle nous conduit à introduire des simplifications et des abréviations dans les calculs les plus compliqués.

I

NOTIONS GÉNÉRALES.

1° PROCÉDÉS GÉNÉRAUX D'ANALYSE.

125. Les nombres, tels que les établit la numération, doivent être considérés comme des fractions introduites par l'esprit dans l'unité absolue du temps ; ils se perdent d'un côté dans l'infiniment grand, de l'autre dans l'infiniment petit.

Entre ces deux extrêmes, l'intelligence de l'homme établit une unité relative qui, d'un côté se répète à l'indéfini en formant les nombres entiers, de l'autre se décompose à l'indéfini en formant les fractions décimales.

Entre deux nombres entiers consécutifs quelconques, on peut introduire autant de fractions décimales que l'on voudra, et, si petites que l'on conçoive ces fractions, elles approcheront sans cesse du *Rien*, ou zéro arithmologique, sans y être absorbées.

126. Les nombres, considérés au point de vue des opérations auxquelles ils peuvent donner lieu, s'agrègent ou se désagrègent par trois méthodes différentes ;

1° Comme parties de sommes, par voie d'addition et de soustraction ;

2° Comme facteurs de produits, par voie de multiplication ou de division ;

3° Comme bases de puissances, par voie de graduation ou d'extraction ;

Il est de la dernière importance d'examiner à quels résultats conduisent les nombres considérés à chacun de ces points de vue.

2° NOMBRES ENTIERS.

127. Par voie d'addition, de multiplication et de graduation, les nombres entiers concourent à former d'autres nombres entiers, *sommes*, *multiples*, *puissances*, plus grands que chacun des composants.

128. Par voie de soustraction les nombres entiers concourent à former d'autres nombres, *différences*, qui sont :

1° Tantôt plus petits que chacun des composants :

$$5-3=2, \quad 12-4-5=3;$$

2° Tantôt plus petits que l'un au moins, ou quelques-uns des composants, et plus grands que les autres :

$$5-2=3, \quad 18-4-3=11;$$

3° Tantôt plus petits que zéro et *négatifs :*

$$6-7=-1, \quad 16-9-8-2=-3.$$

129. Par voie de division, les nombres entiers positifs concourent à former d'autres nombres, *quotients*, qui sont :

1° Tantôt entiers et plus petits que chacun ou que l'un au moins des composants : *diviseurs ;*

2° Tantôt fractionnaires, c'est-à-dire composé d'entiers et de *fractions* soit décimales, soit autres (*fractions ordinaires*).

3° Tantôt fractions proprement dites.

(Nous ne parlons ici que des nombres entiers positifs; nous verrons tout à l'heure à quels résultats donne lieu l'intervention des nombres négatifs dans les opérations.)

130. Par voie d'extraction, les nombres entiers concourent à former :

1° Tantôt d'autres nombres plus petits que les composants, entiers et *commensurables*.

2° Tantôt d'autres nombres également plus petits que les composants, mais fractionnaires et *incommensurables*.

3° NOMBRES FRACTIONNAIRES ET FRACTIONS.

131. Par voie d'addition, les fractions décimales concourent à former des nombres plus grands.

1° Tantôt entiers, $0{,}023+0{,}977+0{,}6+0{,}4=2$.

2° Tantôt fractionnaires, $0{,}5+0{,}7+0{,}9=2{,}1$.

3° Tantôt fractions, $0{,}05+0{,}3=0{,}8$.

132. Par voie de multiplication et de graduation, les fractions décimales concourent à former des nombres plus petits et toujours fractions :

$$0{,}02\times0{,}003=0{,}0006 \qquad (0{,}02)^4=0{,}00000016:$$

car le produit doit avoir autant de décimales qu'il y en a dans tous les facteurs.

133. Par voie de soustraction, les fractions décimales positives concourent à former des nombres plus petits et par conséquent toujours fractionnaires.

134. Par voie de division, les fractions décimales concourent à former des nombres plus grands, tantôt entiers, tantôt fractionnaires, tantôt fractions.

(On voit ici que la multiplication, la graduation, et la division des fractions produisent des résultats inverses en grandeur à ceux des nombres entiers).

135. Par voie d'extraction, les fractions décimales donnent des fractions plus grandes, exactes ou incommensurables, mais jamais de nombres entiers, car les nombres entiers n'ont pas de fractions pour racine exacte; ils ne peuvent avoir que des nombres fractionnaires pour racine approchée.

II

DES NOMBRES CONSIDÉRÉS COMME SOMMES OU DIFFÉRENCES.

1° DES SOMMES.

136. Considérer les nombres comme sommes, c'est supposer qu'ils ont été formés à la suite d'additions, quelles que soient d'ailleurs les quantités introduites dans le calcul, pourvu que le résultat soit une seule expression numérique.

L'unité peut être considérée comme résultant de l'addition de fractions :

$$0,5+0,5=1 \qquad 0,73+0,007+0,263=1.$$

Un nombre entier quelconque peut être considéré comme formé par l'addition de deux ou plusieurs autres nombres entiers ou fractionnaires :

$$3+24=27 \qquad 0,5+6,07+162,43=169.$$

Il en est de même pour une fraction :

$$0,8=0,024+0,776.$$

Cette manière de concevoir les nombres ne donne lieu à aucune considération particulière.

2° DES DIFFÉRENCES POSITIVES.

137. Tous les nombres peuvent être considérés comme résultant d'une ou plusieurs soustractions; et quand la différence finale est positive, elle ne donne lieu à aucune remarque particulière.

$$37-36=1 \qquad 4,36-3,36=1,$$
$$5-2=3 \qquad 7,65-4,05=3,6.$$

138. Mais, quand la différence finale est négative, elle suscite dans les calculs des difficultés qu'il faut savoir résoudre.

3° DES NOMBRES NÉGATIFS.

139. Il faut entendre par *nombre négatif* tout nombre à retrancher d'un calcul ou d'une série de calculs.

Il y a toujours une absurdité à considérer les nombres négatifs comme absolument indépendants de quantités positives, et les mathématiciens qui sont tombés dans cette erreur n'ont abouti qu'à des conclusions contradictoires.

§ 1. *Opérations agrégatives où entrent des nombres négatifs.*

140. Les nombres négatifs s'additionnent comme les nombres positifs et leur résultat est négatif. — 2 — 15 — 0,05 = — 17,05.

Quand les nombres négatifs se trouvent mêlés aux nombres positifs, on fait le total des nombres négatifs et on le retranche du total des nombres positifs : + 3 — 5 + 24,034 — 2,7 = 27,034 — 7.7 = 19,334.

Le résultat peut être négatif si la somme des nombres négatifs l'emporte sur celle des nombres positifs.

Certains mathématiciens, quand ils ont à additionner des nombres négatifs, les réunissent dans une parenthèse comme s'ils étaient positifs et font précéder le tout du signe — :

$$3 - 5 + 24,034 - 2,7 = 3 + 24,034 - (5 + 2,7) = 19,334.$$

141. Quand on multiplie un nombre négatif par un nombre positif, — 4 × 7, le résultat est négatif, — 28; car on a ajouté 7 fois à elle-même la quantité négative — 4.

Quand on multiplie un nombre positif par un nombre négatif, 7 × — 4, le résultat est le même — 28, car 7 est pris 4 fois en moins, c'est-à-dire qu'il est à retrancher 4 fois.

Quand, dans une série de calculs, on multiplie un nombre négatif par un nombre négatif — 7 × — 4 le résultat est positif + 28, car cela revient à retrancher 4 fois une quantité négative 7 de la somme des quantités positives; or si l'on retranche, ou si l'on supprime, un certain nombre de fois une même quantité qui devait être soustraite elle-même du résultat, cela revient à ajouter cette quantité le même nombre de fois au résultat.

On déduit de ce qui précède une règle générale à suivre dans toutes les séries de calculs où entrent des quantités négatives.

Le produit de deux facteurs négatifs est *positif* comme celui de deux facteurs positifs.

Le produit de deux facteurs dont l'un est positif et l'autre négatif *est négatif.*

Là où il y a plus de deux facteurs, le produit est *positif* quand le nombre des facteurs négatifs est pair, *négatif* quand il est impair; en effet une quantité positive multipliée par un facteur négatif donne un produit négatif; ce produit négatif multiplié par un facteur négatif donne un nouveau produit positif; les produits formés par la multiplication successive de facteurs négatifs seront donc tour à tour positifs et négatifs.

142. Les puissances successives d'un nombre négatif sont donc, d'après la règle précédente, alternativement positives et négatives, suivant que l'exposant est pair ou impair. $(-3)^2 = -3 \times -3 = 3^2 = 9$; $(-3)^3 = 3^2 \times -3 = -3^3 = -27$.

§ 2. *Opérations désagrégatives où entrent des nombres négatifs.*

143. Quand on divise un nombre négatif par un nombre positif, le quotient est négatif; car, multiplié par le diviseur, il doit reproduire le dividende, qui est négatif.

Quand on divise un nombre positif par un nombre négatif, le quotient est encore négatif; car il doit, multiplié par le diviseur négatif, reproduire un dividende positif.

Quand on divise un nombre négatif par un nombre négatif, le quotient est positif; car il doit, multiplié par le diviseur négatif, reproduire un dividende négatif.

Quand on a plusieurs diviseurs négatifs d'un nombre positif, le quotient est *positif* si le nombre des diviseurs négatifs est impair, *négatif* s'il est pair.

On voit que les résultats de la division de plus de deux nombres sont inverses de ceux de la multiplication.

144. La racine à exposant pair d'un nombre positif peut être positive ou négative $\sqrt[2]{9} = -3$ ou $+3$ car $(-3)^2 = 9$ et $(+3)^2 = 9$.

On dit donc que toute racine à exposant pair d'un nombre positif doit être précédée du signe *plus* ou *moins* $\pm$; $\sqrt[2]{9} = \pm 3$.

Mais la racine à exposant pair d'un nombre négatif n'existe pas (**142**), car il n'y a pas de nombre négatif qui, pris un nombre de fois pair comme facteur, puisse donner une puissance négative. $\sqrt[2]{-9}$ n'a pas d'expression possible. On dit qu'une telle racine est *imaginaire;* on devrait dire *irréalisable*, pour être plus exact.

Par opposition, on appelle racine *réelle* la racine à exposant pair d'un nombre positif.

145. La racine à exposant impair d'un nombre positif ne peut être que positive, car tout nombre négatif, pris un nombre impair de fois comme facteur, reproduit une quantité négative. $\sqrt[3]{8}$ ne peut être ± 2, mais seulement $+2$, car toute puissance à exposant impair se compose d'un nombre impair de facteurs négatifs et le résultat est négatif (**142**).

Par conséquent, la racine à exposant impair d'un nombre négatif ne peut être que négative.

146. Quand on divise deux puissances différentes d'un même nombre l'une par l'autre, on a pour quotient une puissance de ce même nombre égale à la différence des exposants.

$$\frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3, \text{ car } 4^2 \times 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$$

Or, quand les exposants sont égaux, le dividende est égal au diviseur, et le quotient est évidemment 1, $\frac{4^3}{4^3} = \frac{64}{64} = 1$ d'où $4^{3-3} = 4^0 = 1$, d'où, comme nous l'avons dit (**39**), tout nombre qui a pour exposant zéro est égal à l'unité.

147. Quand l'exposant du diviseur l'emporte sur l'exposant du dividende, l'exposant du quotient est négatif:

$\frac{4^2}{4^5} = 4^{-3}$, mais $\frac{4^2}{4^5} = \frac{4^2 \times 1}{4^2 \times 4^3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{27}$, car le diviseur $4^5 = 108$, multiplié par le quotient $\frac{1}{27}$, reproduira le dividende $4^2 = 16 = \frac{108}{27}$. D'où il faut conclure que tout nombre à exposant négatif est une fraction de l'unité égale à la puissance du nombre indiquée par l'exposant considéré comme positif.

148. Quand on élève une puissance à une autre puissance, on multiplie l'exposant de la 1re puissance par l'exposant de la 2e : $(3^4)^5 = 3^{4\times5} = 3^{20}$. Ce qu'il est facile de vérifier en décomposant l'opération en facteurs égaux à 3.

149. La notation $3^{\frac{10}{4}}$ indiquera donc une extraction de racine 4e de 3^{10} : $\sqrt[4]{3^{10}}$.

De même $23^{\frac{1}{3}}$ équivaudra à $\sqrt[3]{23}$.

III

DES NOMBRES CONSIDÉRÉS COMME PRODUITS OU FACTEURS DE PRODUITS.

1° PRÉLIMINAIRES.

§ 1. *Théorèmes fondamentaux.*

150. Quand on construit les nombres par voie de multiplication ou de division, ou, quand on considère les nombres comme produits ou comme quotients, on est conduit à étudier leur *divisibilité*, étude qui repose sur plusieurs *théorèmes* fondamentaux.

Un *Théorème* est une vérité cachée qu'il importe de mettre en évidence par une démonstration. Le théorème n'est pas évident de lui-même comme l'*axiôme* qu'il suffit d'énoncer.

151. *Un produit de deux ou plusieurs facteurs ne change pas, quel que soit l'ordre dans lequel on dispose les facteurs de ce produit.*

En effet, la *table de Pythagore* nous apprend déjà (**54**) que 7×8 ou 8×7 conduisent au même produit 56.

Cela tient à ce qu'une multiplication quelconque n'est pas autre chose qu'un cas particulier de l'addition (**9**) et, quel que soit l'ordre dans lequel on fasse l'addition des nombres qui composent la somme, cette somme reste la même.

$$4\times3=3\times4, \text{ car } 4=1+1+1+1.$$

$$\text{et } 4\times3=\left\{\begin{array}{l}1+1+1+1,\\1+1+1+1,\\1+1+1+1.\end{array}\right.$$

Or, dans quelque ordre que l'on fasse la somme des 1, par colonnes verticales : 1 répété 3 fois et le tout 4 fois, ou par colonnes horizontales : 1 répété 4 fois et le tout 3 fois, le résultat sera toujours le même, 12.

Par la même raison $4\times3\times5=4\times5\times3$,

car 4 répété 5 fois donne..... $4+4+4+4+4$,
et le tout répété 3 fois donne.. $4+4+4+4+4$,
$4\times5\times3=60$ $\quad 4+4+4+4+4$.

Or, dans quelque ordre que l'on additionne les 4, soit par colonnes horizontales $4\times5\times3$, soit par colonnes verticales $4\times3\times5$, le résultat sera toujours 60.

Dans une série quelconque de facteurs $6\times3\times4\times5\times2\times7$, on pourra par les mêmes motifs faire occuper à un facteur, 7, une place quelconque, la 3e par exemple, car d'après ce que nous venons de voir.

$$(6\times3)\times(4\times5\times2)\times(7)=(6\times3)\times(7)\times(4\times5\times2).$$

Ce qui revient à dire, en effectuant les produits placés entre parenthèses;

$$18 \times 40 \times 7 = 18 \times 7 \times 40.$$

Le même raisonnement peut s'appliquer à un facteur quelconque, et permet de justifier tous les changements que l'on peut introduire dans une série quelconque de facteurs.

152. *Quand un nombre divise deux autres nombres, il divise leur somme et leur différence* :

Il divise leur somme, car, si 9, par exemple, divise 342 $(=38 \times 9)$ et 531 $(= 59 \times 9)$, il divisera évidemment $342 + 531 = 38 \times 9 + 59 \times 9 = (38 + 59) \times 9$.

Il divise leur différence, car si 9, par exemple, divise 342 et 531 il divisera $531 - 342 = 9 \times 59 - 9 \times 38 = (59 - 38) \times 9$.

153. *Quand un nombre en divise un autre, il divise les multiples de cet autre* : 7 divise 56, car $56 = 8 \times 7$; il divisera $56 \times 3 = 8 \times 7 \times 3 = 8 \times 3 \times 7$.

154. *Quand un produit a plusieurs facteurs, il est divisible non-seulement par chacun de ces facteurs, mais aussi par chaque produit partiel formé par 2, 3, 4, etc., de ces facteurs.*

Cela résulte du théorème précédent, car le produit total est multiple non seulement de chacun de ces facteurs, mais aussi de tous les produits partiels que l'on peut former avec ces facteurs.

$120 = 2 \times 3 \times 4 \times 5$ est divisible par 2, par 3, par 4 et par 5.

Il l'est aussi par $2 \times 3 = 6$ parce que ce produit partiel est contenu $4 \times 5 = 20$ fois dans $(2 \times 3) \times (4 \times 5) = 120$.

Il le sera pour les mêmes raisons par $2 \times 4 = 8$, par $2 \times 3 \times 4 = 24$, par $3 \times 4 = 12$, par $5 \times 5 = 25$, par $3 \times 4 \times 5 = 60$, par $4 \times 5 = 20$.

2° DES NOMBRES PREMIERS ABSOLUS.

155. Nous avons vu (**77**), que tout nombre entier peut se décomposer en deux facteurs qui sont le nombre lui-même et l'unité.

La plupart des nombres, peuvent se décomposer, en outre, en d'autres facteurs; c'est ainsi que tous les nombres pairs sont égaux à leur moitié multipliée par 2.

156. Il y a cependant des nombres entiers qui ne sont divisibles par aucun autre nombre entier qu'eux-mêmes et l'unité; on les appelle *nombres premiers absolus*, ou simplement *nombres premiers*,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,
101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199,
211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293,
307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397,
401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499,
503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599,
601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691,
701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797,
809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887,
907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997,

sont les nombres premiers compris entre 1 et 1000.

157. On obtient ces nombres par le procédé dit *Crible d'Eratosthènes* (Eratosthènes est un géomètre qui vivait 200 ans avant J.-C.). On supprime dans la suite des nombres 1, 2, 3, 4... 1,000, tous les nombres de 2 en 2 (4, 6, 8, 10, 12, etc.), à partir de 2, que l'on conserve, parce que ces nombres (étant pairs) sont divisibles par 2.

On supprime ensuite, à partir de 3, que l'on conserve, tous les nombres restants, de 3 en 3, (9, 15, 21, etc.), parce que ces nombres, étant triples, sont divisibles par 3.

On voit que tous les nombres de 4 en 4 ont été supprimés quand on a criblé les nombres de 2 en 2, car les nombres divisibles par 4 l'étaient aussi par 2.

On supprime, à partir de 5 que l'on conserve, tous les nombres de 5 en 5 (25, 35, 45, etc.), parce que ces nombres, étant quintuples, sont divisibles par 5.

On voit que tous les nombres de 6 en 6 ont été supprimés, les pairs dans la suppression de 2 en 2, les impairs dans la suppression de 3 en 3.

On continue à supprimer de 7 en 7, de 11 en 11, de 13 en 13, de 17 en 17, en négligeant tous les nombres qui ne sont pas premiers, car on constate que toutes les suppressions sont effectuées par celles des multiples des nombres premiers.

158. De la seule inspection du tableau (**156**) il ressort qu'à l'exception de 2 et de 5, tous les nombres premiers ne se terminent que par un des chiffres 1, 3, 7, 9.

Une autre propriété des nombres premiers, plus curieuse encore, c'est qu'ils sont multiples de 6 à une unité près, soit par excès soit par défaut (2 et 3 exceptés).

159. Quand on veut savoir si un nombre, supérieur à ceux qu'indique la table ci-dessus, est premier, il faut :

1° Constater que son dernier chiffre est 1, 3, 7 ou 9.

2° Vérifier si le reste, par défaut, de sa division par 6 est 1 ou 5.

Quand le nombre satisfait à ces deux conditions, il faut :

3° Extraire sa racine carrée.

4° Vérifier s'il est divisible exactement par un des nombres premiers inférieurs à cette racine; c'est-à-dire essayer successivement sa division par 2, 3, 5, 7, etc.

Dans ce dernier cas on peut être certain que le nombre est premier.

160. Il est inutile de pousser les essais de division au delà de la racine carrée du nombre, car on pourra toujours décomposer le nombre en deux facteurs, plus un reste.

Or ces deux facteurs seront chacun la racine même du nombre, avec ou sans reste; ou bien l'un d'eux sera plus grand que la racine, et l'autre sera plus petit.

Exemple : 1009 est terminé par un 9,

$1009 = 6 \times 168 + 1.$

$\sqrt{1009} = 31$ avec un reste 38, c'est-à-dire que $1009 = 31^2 + 38$.

La division de 1009 par 3, puis par 5, puis par 7, etc., jusqu'à 31, ne donne pas de quotient exact;

Donc 1009 est un nombre premier; il figurerait immédiatement à la suite de la table (**156**).

Il est inutile de diviser par un nombre premier plus fort que 31, car si un tel facteur pouvait donner un quotient exact, ce quotient, qui serait l'autre facteur, serait plus petit que 31,

Et il n'a pas été trouvé de facteur, plus petit que 31, qui divise 1009.

3° DÉCOMPOSITION EN NOMBRES PREMIERS.

161. Tous les nombres qui ne sont pas premiers peuvent se décomposer en facteurs premiers, pour cela il suffit de diviser le nombre proposé successivement par chacun des nombres premiers qui sont inférieurs à la racine, en n'effectuant que les divisions exactes et en divisant le quotient, soit par le diviseur tant que la division peut se faire exactement, soit par les nombres premiers successifs :

360	2 ... $360 = 180 \times 2$	
180	2 ... $180 = 90 \times 2$	
90	2 ... $90 = 45 \times 2$	$5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 360$
45	3 ... $45 = 15 \times 3$	$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
15	5 ... $15 = 5 \times 3$	

162. Il résulte, de cette décomposition, que l'on peut former tous les diviseurs d'un nombre en combinant diversement ses facteurs premiers :

Ainsi 360 est divisible :

1° par	$1, 2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 5$	soit : 1, 2, 4, 8, 3, 9, 5.
2° par	$2 \times 3,\ 2 \times 3^2,\ 2 \times 5$	soit : 6, 18, 01
	$2^2 \times 3,\ 2^2 \times 3^2,\ 2^2 \times 5$	soit : 12, 36, 20
	$2^3 \times 3,\ 2^3 \times 3^2,\ 2^3 \times 5$	soit : 24, 72, 40
	$3 \times 5,\ 3^2 \times 5,$	soit : 15, 45
3° par	$2 \times 3 \times 5,\ 2 \times 3^2 \times 5$	soit : 30, 90
	$2^2 \times 3 \times 5,\ 2^2 \times 3^2 \times 5$	soit : 60, 180
	$2^3 \times 3 \times 5,\ 2^3 \times 3^2 \times 5$	soit : 120, 360

Voici un autre exemple tiré des œuvres de Platon : *Dialogue sur les lois.*

5040	1
2520	2
1260	2, 4
630	2, 8
315	2, 16
105	3,6,12,24,48
35	3,9,18,36,72,144
7	5,10,20,40,80, 15,30,60,120,240, 45,90,180,360,720
1	7,14,28,56,112, 21,42,84,168,336, 63,126,152, 35;70,140,280,560, 105,210,420,840,1680,1260, 315,630,2520,5040.

Ainsi 5040 a 60 diviseurs sans compter 5040 et 1.

Pour obtenir ces diviseurs, on multiplie chacun des facteurs premiers et des diviseurs déjà trouvés par chaque facteur premier nouvellement déterminé.

4° DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

163. On appelle *diviseur commun* à deux ou plusieurs nombres donnés, tout

nombre qui divise exactement chacun des nombres donnés; ainsi 3 est un diviseur commun à 9, à 12, à 348, à 5019, etc.

Deux nombres peuvent avoir plusieurs *diviseurs communs :* 42 et 210 sont divisibles chacun par 2, 3 et 7.

164. On appelle *plus grand commun diviseur* P. G. C. D. de deux ou plusieurs nombres le plus grand nombre qui divise exactement chacun d'eux, 4 est le plus grand commun diviseur de 12 et de 16.

Le plus grand commun diviseur de deux nombres est quelquefois le plus petit des deux nombres : 42 est le P. G. C. D., de 42 et de 210, puisqu'il est contenu 1 fois dans 42 et 5 fois dans 210. $42=42\times1$, $210=42\times5$.

165. Dans les calculs relatifs aux fractions ordinaires, il est très-important de connaître le *p. g. c. d.* entre 2 nombres; on y parvient par la méthode suivante :

Soit à déterminer le plus grand commun diviseur entre 56 et 21 :

Il faut d'abord voir si 21 ne divise pas 56, car il serait le *p. g. c. d.* cherché; or $\frac{56}{21}=2+\frac{14}{21}$; le quotient n'est pas exact puisqu'il est 2 avec un reste 14, 21 n'est donc pas le *p. g. c. d.* cherché.

Le *p. g. c. d* entre 56 et 21 devra diviser le reste 14, car $56=21\times2+14$ et(**152**) tout nombre qui divise une somme, 56, et l'une de ses parties, 21, avec ses multiples, divise l'autre partie 14; la question revient donc à chercher le *p. g. c. d.* entre le plus petit nombre 21 et le reste 14. Or $\frac{21}{14}=1+\frac{7}{14}$. Mais le *p. g. c. d.* qui doit diviser 21 et 14 doit diviser aussi le reste 7, car $21=14\times1+7$, et le *p. g. c. d.* divisant la somme, 21, et l'une de ses parties, 14, devra diviser l'autre, 7; la question revient encore à chercher le *p. g. c. d.* entre le 1er et le 2e reste. On voit ici que 7 divise exactement 14; 7 sera donc le plus grand commun diviseur cherché.

166. Règle. — Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, on divise le plus grand par le plus petit; s'il n'y a pas de reste, le plus petit nombre sera le *p. g. c. d.* cherché; s'il y a un reste, on divise le plus petit nombre par ce reste; si le 2e reste de cette nouvelle division est zéro, le 1er reste est le *p. g. c. d.* Dans le cas contraire, on divise le 1er reste par le 2e reste; si le 3e reste est zéro, le 2e reste est le *p. g. c. d.*, sinon il faut diviser le 2e reste par le 3e, etc., ... On continue ainsi à diviser les restes successifs les uns par les autres jusqu'à ce que l'on obtienne un quotient exact; le reste qui divisera exactement le reste précédent sera le *p. g. c. d.* cherché.

Si ce reste est l'unité, les nombres proposés n'ont pas d'autres diviseurs communs que l'unité, et on dit qu'ils sont *premiers entre eux.*

Quand on arrive à un reste qui est un nombre premier, si ce reste n'est pas le *p. g. c. d.*, il est clair que les nombres sont premiers entre eux, car un nombre premier n'est divisible que par lui-même et l'unité.

On dispose les calculs de la manière suivante :

1° Recherche du *p. g. c. d.*

1° entre 462 et 330 :

Quotients...	1	2	2	
Dividendes et diviseurs...	462	330	132	66 *p. g. c. d.*
Restes	132	66	0	

2° entre 17 et 9 :

Quotients...	1	1	8	
Dividendes et diviseurs...	17	9	8	1 *p. g. c. d.*
Restes	8	1	0	

167. Le *p. g. c. d.* entre trois nombres sera le même que celui qui est commun au *p. g. c. d.* des deux premiers nombres et au troisième nombre.

Entre quatre nombres il sera le *p. g. c. d.* entre le quatrième nombre et le *p. g. c. d.* des trois premiers.

5° SIGNES DE LA DIVISIBILITÉ DES NOMBRES.

168. On voit combien il serait important de reconnaître à première vue si un nombre est divisible par un autre. Nous savons qu'un nombre terminé par 1, 2, 3 zéros est divisible par 10, 100, 1000, puisqu'il exprime exactement des dixaines, des centaines, des mille ; nous savons également que tout nombre pair est divisible par 2, mais il faut chercher d'autres signes de divisibilité des nombres pour abréger les essais de division.

169. *Divisibilité par* 2 *et* 5. Si tous les nombres n'étaient composés que de dixaines, ils seraient divisibles par 2 et 5, puisque $2 \times 5 = 10$.

Or tous les nombres, 6745 par exemple, peuvent toujours se décomposer en deux parties $6740 + 5$, dont l'une, celle des dixaines 6740 est toujours divisible par 2 et 5, et l'autre, celle des unités 5, sera divisible par 2 ou 5, si le chiffre qui l'exprime est divisible par 2 ou 5, donc :

Quand le chiffre des unités d'un nombre est divisible par 2 *ou* 5, *le nombre est divisible par* 2 *ou* 5.

Ici 6745 est divisible par 5, et ne l'est pas par 2.

6740 est divisible par 2 et par 5.

6742 est divisible par 2 et ne l'est pas par 5

6741, 6743 ne sont divisibles ni par 2 ni par 5.

170. *Divisibilité des nombres par les puissances de* 2 *et de* 5 (4, 8, 16, etc. 25, 125, 625...)

100 est divisible par 4 et 25, car $100 = 25 \times 4 = 5^2 \times 4^2$; donc tout nombre plus grand que 100 pourra être partagé en deux parties, l'une comprenant les centaines, l'autre les dixaines et les unités. La partie des centaines étant toujours divisible par 4 et 25, l'autre le sera si elle est un multiple de 4 ou de 25. Le total sera donc divisible par 4 ou par 25, suivant que le nombre formé par les deux derniers chiffres sera divisible par 4 ou 25.

$6700 = 6700 + 00$ est divisible par 4 et 25.

$6736 = 6700 + 36$ est divisible par 4 et ne l'est pas par 25;

$6750 = 6700 + 50$ est divisible par 25 et ne l'est pas par 4.

1000 est divisible par 8 et 125, car $1000 = 125 \times 8$. Tout nombre > 1000 sera divisible par 8 ou 125, suivant que la partie des centaines, dixaines et unités de ce nombre sera divisible par 8 ou par 125.

$10000 = 625 \times 16$. Tout nombre > 10000 sera divisible par 16 ou 625, suivant que la partie des mille, centaines, dixaines et des unités sera divisible par 16 ou 625.

En général, quand on a décomposé un nombre en deux parties dont la dernière comprend autant de chiffres qu'il y a d'unités dans l'exposant d'une puissance quelconque de 2 ou de 5, le nombre total est divisible par la même puissance de 2 ou de 5 quand cette dernière partie est divisible par la puissance proposée.

171. *Divisibilité par* 9 *et* 3. — Les nombres formés par l'unité suivie d'un, deux, ou plusieurs zéros : 10, 100, 1000, etc., divisés par 9 donnent 1 pour reste : $10 = 9 + 1$, $100 = 11 \times 9 + 1$, $1000 = 111 \times 9 + 1$.

Cela tient à ce que : $10 = 9 + 1$

$$100 = 99 + 1 = (9 \times 10 + 9) + 1$$
$$1000 = 999 + 1 = (9 \times 100 + 99) + 1.$$
$$10000 = 9999 + 1 = (9 \times 1000 + 999) + 1$$

. . . .

Il est évident que 2, 3, 4, etc., fois 10, 100, 1000 donneront pour restes 2, 3, 4, etc.

Or, si on décompose un nombre quelconque (5436 par exemple) en unités, dixaines, centaines, mille, etc. $(6+30+400+5000)$, la division de chacune de ces parties laissera pour restes la somme des chiffres significatifs $(6+3+4+5=18)$ et *le nombre sera divisible par 9 si la somme de ses chiffres significatifs est divisible par* 9.

C'est ce qu'il est facile de démontrer par la décomposition de 5436.

$$6=6 \qquad =0\times9\ +6$$
$$30=3\times10\ \ =3\times9\ +3$$
$$400=4\times100\ =4\times99\ +4$$
$$5000=5\times1000=5\times999+5$$

Le nombre total 5436 se décompose en deux parties :

L'une, $5\times999+4\times99+3\times9+0\times9=5418$ } total 5436.
L'autre $5\times4\times3\times6=$ .... 18 }

La première de ces parties est divisible par 9, la seconde l'est également, donc le nombre est divisible par 9; en effet, $5436=604\times9$.

On verrait de même que 36402 n'est pas divisible par 9, car la somme de ses chiffres significatifs est $15=9\times1+6$, mais il se compose d'une partie divisible par 9, et d'une autre partie divisible par 3; or, comme tous les nombres divisibles par $9=3\times3$ sont également divisibles par 3, si le reste de la division est divisible par 3, le nombre entier sera divisible par 3.

Donc, *un nombre est divisible par* 3 *quand la somme de ses chiffres significatifs est divisible* par 3.

172. *Divisibilité par* 7, 11 *et* 13. — On peut admettre que la division laisse un reste plus fort que le diviseur; si ce reste est multiple du diviseur, le nombre entier sera divisible; sinon, le reste définitif sera le même que celui de l'opération régulière.

On peut même considérer le dividende tout entier comme un reste dont on vérifiera plus tard la divisibilité.

Les nombres formés par les chiffres des unités, dixaines et centaines, de 1 à 999 pourront donc être considérés comme les restes *positifs* de la division par 7, 11 et 13, et nous dirons que 1, 2, 3... 100... 999 sont les multiples de $7\times0+1+2+3...+100+999$.

Les nombres formés par les chiffres des mille, de 1 mille à 999 mille, seront au contraire les restes *négatifs* de la division par 7, 11 et 13, car $7\times11\times13=1001$; d'où 1000, nombre immédiatement inférieur à 1001, sera égal à $(7\times11\times13)-1$, soit $1001-1$; de même $2000=(2\times1001)-2$; $3000=(3\times1001)-3$... $999000=(999\times1001)-999$.

Les nombres formés par les chiffres des millions, de 1 million à 999 millions, seront les restes *positifs* de la division par 7, 11 et 13, car $1000\,000=1000\times1000=(1001-1)^2$ carré qui, d'après les règles de la graduation (**62** *nota*) et de la multiplication des quantités négatives (**141**) donne $1001^2-2\times1001+1$. Il est évident que $1001^2-2\times1001$, qui est égal à $(7\times11\times13)^2-2\times(7\times11\times13)$ est multiple de 7, 11 et 13 (*) et que 1000 000, qui est égal à cette quantité augmentée d'une unité, sera multiple des mêmes nombres avec un reste $+1$. De même 2, 3, 4... 100... 999 millions seront multiples de 7, 11 et 13, $+2+3+4...+100+999$.

(*) En d'autres termes, $1001\times999=999999$ est multiple de 7, 11 et 13; par conséquent 1000 000 sera divisible avec un reste positif $+1$.

On reconnaîtrait pareillement que les nombres formés par les chiffres des billions seraient les restes négatifs de la division par 7, 11 et 13.

Cela posé, un nombre tel que 123678054325, est égal à 123 billions + 678 millions + 054 mille + 325 unités.

Or : 123 billions sont divisibles par 7, 11 et 13 avec un reste —123
678 millions.................................... + 678
054 mille.. —054
325 unités....................................... + 325

Le nombre entier sera divisible si la différence entre ses restes négatifs et ses restes positifs est divisible, c'est-à-dire si :

$$(678 + 325) - (123 + 054) = 1003 - 177 = 826$$

est divisible par 7, 11 et 13.

Or : $826 = 118 \times 7$ exactement.
$826 = 75 \times 11$ avec un reste + 1.
$826 = 63 \times 13$ avec un reste + 7.

Le nombre sera donc divisible par 7 et ne le sera pas par 11 et 13. Divisé par 11, il laissera un reste 1, et, divisé par 13, un reste 7; c'est ce qu'il est facile de vérifier.

Comme les restes + 678 + 325 sont les tranches de 3 chiffres de rang impair et — 123 — 054 les tranches de 3 chiffres de rang pair, on en déduit la règle de vérification qui est très-simple et d'une application facile :

Un nombre est divisible par 7, 11 ou 13, quand la différence entre la somme de ses tranches de 3 chiffres de rang pair et la somme de ses tranches de 3 chiffres de rang impair, est divisible par 7, 11 ou 13.

On voit ainsi qu'au lieu d'essayer la divisibilité sur un nombre considérable, on l'essaye sur un nombre qui ne comprend généralement pas plus de 3 chiffres.

Il est clair que si la différence entre les tranches de rang pair et les tranches de rang impair était zéro, le nombre serait divisible par 7, 11 et 13.

173. Il y a des règles de vérification pour la divisibilité des nombres par un nombre premier quelconque; mais elles sont d'une application beaucoup moins simple que les précédentes; il faut en excepter toutefois la divisibilité spéciale par 11. Les autres conduisent à des opérations plus compliquées que les essais de la division même par les nombres premiers inférieurs à la racine.

174. *Divisibilité spéciale par* 11. — Tout nombre (24035 par ex.) est décomposable en unités, dizaines, centaines, mille, etc.

Or le chiffre des unités..........	5	$= 11 \times 0$		+ 5.
— dizaines........	30	$= 11 \times 3$		— 3.
— centaines.......	000	$= (11 \times 9) \times 0$		+ 0.
— mille...........	4000	$= (11 \times 91) \times 4$		— 4.
— dizaines de mille.	20000	$= (11 \times 909) \times 2$		+ 2.
	24035 =	A	+	B

Pour abréger, désignons par A la partie du nombre 24035 divisible par 11, et par B. l'autre partie qui se compose des restes $+ 5 + 0 + 2 - (3 + 4) = 7 - 7 = 0$; il est clair que les restes à ajouter étant égaux aux restes à retrancher, le nombre sera divisible par 11. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

Le même raisonnement pouvant s'appliquer à un nombre quelconque, on en déduira la règle générale :

Un nombre est divisible par 11 quand la différence entre la somme de ses chiffres significatifs de rang pair et la somme de ses chiffres significatifs de rang impair est zéro ou multiple de 11.

Si la différence n'est ni zéro ni multiple de 11, le reste de la division de cette différence par 11 sera le même que celui de la division du nombre par 11.

175. *Preuves des opérations par* 9. Quand deux ou plusieurs nombres sont multiples de 9, leur somme, leur différence et leur produit doivent être également multiples de 9, ce qu'il est toujours facile de vérifier.

Quand ils ne sont pas multiples de 9, on trouve pour chaque nombre un reste dont on effectue l'addition, la soustraction, la multiplication avec les restes des autres nombres; le résultat de ces opérations divisé à nouveau par 9 doit laisser un reste définitif égal à celui de la somme, de la différence ou du produit des nombres sur lesquels on a opéré.

$34+53=87$ qui, divisé par 9, laisse un reste 6. Or, 34 divisé par 9 laisse un reste 7, 53 un reste 8. La somme des restes $7+8=15$ divisée à nouveau par 9, laisse un reste 6 égal à celui de la somme 87.

$53-34=19$ qui, divisé par 9; laisse un reste 1 égal à la différence des restes $8-7$ de 53 et 34.

$53\times 34=1802$ qui, divisé par 9, laisse un reste 2 égal à celui qui provient du produit des restes $8\times 7=56$, quand ce produit a été divisé par 9.

176. *Divisibilité par* 6, 12, 14, 15, 18, 21, etc. — Quand on a décomposé un nombre en ses facteurs premiers, ce nombre est divisible (**154**) par tous les produits partiels que l'on peut former avec les facteurs premiers.

Il résulte de là qu'un nombre, divisible à la fois par 2 et 3, comptera 2 et 3 au nombre de ses facteurs premiers et sera divisible par $2\times 3=6$; un nombre divisible par 2^2 et 3 le sera par 12; il le sera par $14=2\times 7$ quand il sera multiple à la fois de 2 et de 7; par $15=3\times 5$ quand il sera multiple de 3 et de 5; par $18=2\times 9$ quand il sera multiple de 2 et de 9, etc.

177. De tout ce qui précède, on voit qu'il y a des signes assez prompts pour reconnaître la divisibilité par 2, 3, 5, 7, 11, 13. Ces nombres premiers sont ceux qui entrent le plus fréquemment dans la composition des nombres entiers. D'après la méthode employée dans le crible d'Eratosthènes, 2 compose la moitié des nombres, 3 le tiers, 5 le cinquième, etc.; au delà de 13, et en admettant qu'on n'ait pas supprimé déjà une partie des multiples des nombres premiers suivants, on a 16 chances contre une de trouver un nombre qui soit divisible par les nombres premiers supérieurs à 17.

6° DES NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX.

178. Quand deux ou plusieurs nombres n'ont pas d'autre diviseur commun que 1 on dit qu'ils sont *premiers entre eux*, quoique, isolément, chacun d'eux puisse n'être pas un nombre premier.

36, 55, 49 sont des nombres premiers entre eux.

179. Tous les nombres premiers sont naturellement premiers entre eux.

180. Tout nombre premier est premier avec un nombre quelconque quand il ne le divise pas exactement.

181. Deux nombres entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux; car, s'ils avaient un facteur commun plus grand que l'unité, ce facteur commun diviserait leur différence (**152**) et leur différence est l'unité.

182. *Les quotients de deux nombres divisés par leur p. g. c. d. sont premiers entre eux*; car tout nombre m qui a divisé 2 autres nombres a rendu m fois plus

petit leur plus grand commun diviseur; or, si ce nombre m est le *p. g. c. d.* lui-même, ce *p. g. c. d.*, divisé par lui-même, est réduit à 1.

7° FAITS PARTICULIERS A LA DIVISIBILITÉ.

183. *Tout diviseur de deux nombres divise leur plus grand commun diviseur;* car il divise tous les restes de la division de ces deux nombres l'un par l'autre, et le plus grand commun diviseur est un de ces restes.

Par la même raison :

184. *Si on multiplie ou divise deux nombres par un 3ᵉ, leur plus grand commun diviseur est multiplié ou divisé par ce 3ᵉ nombre.*

185. *Quand un nombre premier divise un produit, il divise au moins un des facteurs de ce produit:*

1° Supposons d'abord que le produit ne se compose que de 2 facteurs :

Soit $462 = 22 \times 21$.

462 est divisible par 7 qui ne divise pas 22 ; il faudra que 7 divise 21.

7 étant premier et ne divisant pas 22 sera premier avec 22 (**176**) et le plus grand commun diviseur entre 7 et 22 est 1.

Cela posé, si nous multiplions 7 et 22 par 21, le plus grand commun diviseur 1 sera également multiplié par 21 (**180**). Les nouveaux nombres seront: 7×21, 22×21, et leur *p. g. c. d.* sera 1×21 ; or 7 divise évidemment 7×21, il divise $22 \times 21 = 462$ d'après la donnée même, il doit donc diviser le *p. g. c. d.* entre ces deux nombres 1×21 ou 21 ; en effet 7 est contenu 3 fois dans 21.

2° le produit se compose de plus de 2 facteurs :

Soit $13860 = 84 \times 3 \times 5 \times 11$;

13860 est divisible par 7 qui, à première vue, est premier avec 3, 5 et 11 ; il faut que 84 soit divisible par 7.

En effet 7 ne peut diviser $3 \times 5 = 15$, car, divisant le produit 15, il devrait, d'après ce qui précède, diviser 3 ou 5. Il ne divisera pas non plus le produit $15 \times 11 = 165$, car il devrait diviser 15 ou 11 ; mais comme il divise le produit $165 \times 84 = 13860$, il faut qu'il divise 84 ; en effet 7 est contenu 12 fois dans 84.

186. *Tout nombre premier qui divise une puissance d'un nombre divise ce nombre;* car cette puissance est un produit formé avec ce nombre pris plusieurs fois comme facteur, et il faut que le nombre premier divise un de ces facteurs.

187. *Un nombre n'est décomposable qu'en un seul système de facteurs premiers;*

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ne saurait être égal :

à $7 \times 11 \times 13$, ni à $2^2 \times 3 \times 5^2$.

C'est-à-dire que 360 ne peut avoir d'autres facteurs premiers que 2, 3 et 5 ni d'autres exposants pour chacun de ces facteurs que 2^3, 3^2, et 5^1.

Si 360 pouvait avoir pour facteurs premiers $7 \times 11 \times 13$, il faudrait que 5, qui est un nombre premier, et qui divise 360, divisât 7, 11 ou 13, ce qui est absurde.

Si 360 pouvait avoir pour facteurs premiers $2^2 \times 3 \times 5^2$, il faudrait que 5^2, par exemple, divisât un des facteurs 2^3, 3^2 et 5, or comme 5^2 ne divise pas 2, il ne divisera pas 2^3 (car s'il divisait 2^3, il faudrait qu'il divisât 2, d'après le théorème précédent); 5^2 ne divisera pas 3^2 par la même raison; il ne divisera pas $5 < 5^2$. Il faut donc que 5 n'ait pas d'autre exposant que l'unité.

Il résulte de là que, comme on ne peut pas introduire de nombres premiers

étrangers dans une série, préalablement dressée des facteurs d'un nombre, et comme aucun des facteurs premiers de cette série ne peut être affecté d'un exposant différent de celui qu'il a, les autres facteurs ne peuvent avoir des exposants différents de ceux qu'ils ont; car, dès l'instant que l'on ne peut renforcer l'exposant de 5, il est absurde de dire que 360, qui est égal à $2^3 \times 3^2 \times 5$, serait en même temps égal à $2^2 \times 3 \times 5$.

188. De tout ce qui précède on peut arriver à déterminer avec certitude tous les diviseurs d'un nombre, comme nous l'avons fait au § **162**, puisque ces diviseurs ne peuvent être composés que des produits partiels entre les facteurs premiers du nombre.

189. Les multiples communs à deux ou plusieurs nombres sont infinis. Mais il en est un, plus petit que les autres et qu'il importe souvent de déterminer, comme on va le voir dans les fractions.

Ce *plus petit commun multiple* s'obtient en décomposant les nombres en leurs facteurs premiers. Le plus petit commun multiple de tous les nombres qui divisent 360 est 360 lui-même. En effet, un nombre inférieur à 360 ne pourrait être multiple de $2^3 \times 5$ s'il ne contenait pas les facteurs 2^3 et 5; il ne pourrait être multiple de 2×3^2 s'il ne contenait pas le facteur 3^2: il faut donc qu'il contienne les facteurs premiers 2^3, 3^2 et 5, affectés chacun de leur plus fort exposant, et dont le produit est 360.

Le plus petit commun multiple est donc le produit de tous les facteurs premiers des nombres donnés, et pris une fois chacun avec son plus fort exposant.

190. On verra de même que *le plus grand commun diviseur* de deux ou plusieurs nombres *est le produit des facteurs premiers communs à tous ces nombres pris chacun avec son plus faible exposant.*

Le *p. g. c. d.* entre $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $2026 = 3^3 \times 5^2$ sera $3^2 \times 5$; car lorsque l'on aura divisé 360 et 2026 chacun par $3^2 \times 5 = 45$, il restera pour quotients $2^3 = 8$, et $3 \times 5 = 15$ qui seront premiers entre eux.

Le *p. g. c. d.* entre 360 et 2026 étant $45 = 3^2 \times 5$, il sera encore 45 si l'on prend un troisième nombre $6930 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$, car si 6930 divisé par 45 laisse un quotient $2 \times 7 \times 11$, ce quotient n'est pas premier à la vérité avec 360, mais il l'est avec 2026. Les seuls facteurs communs aux trois nombres seront donc $3^2 \times 5$.

191. Ces propriétés de la divisibilité vont devenir plus intéressants et seront d'un grand secours dans les calculs relatifs aux fractions ordinaires, aux expressions fractionnaires, et à ce que nous appellerons les *quotités* en général.

IV

DES NOMBRES CONSIDÉRÉS COMME QUOTIENTS (QUOTITÉS).

1° PRÉLIMINAIRES.

192. La véritable clef du calcul est de traiter tous les nombres comme s'ils étaient des quotients.

Nous laisserons toutefois le nom de *quotients* aux résultats de la division exprimés en nombres entiers, mais nous donnerons le nom de *quotités* aux fractions, aux expressions fractionnaires, aux entiers, et en général à toute représentation d'une valeur numérique quelconque.

193. Toute division, qu'elle donne ou non un reste, a sa quotité exactement représentée sous la forme fractionnaire $\frac{N}{D}$ *numérateur ou dividende.* / *dénominateur ou diviseur.*

$\frac{63}{7}$, 63 septièmes, sont réellement la quotité de 63 par 7, quoique cette quotité soit représentée d'un autre manière par le quotient exact 9, car il y a 9 fois 7 septièmes ou 9 unités dans 63 septièmes.

De même $\frac{62}{7}$, 62 septièmes, sont encore la quotité exacte de 62 par 7, car la division donne un quotient 8 avec un reste 6 ; ce qui veut dire qu'il y a 8 fois 7 septièmes ou 8 unités, plus 6 septièmes d'unité dans 62 septièmes.

Mais ces quotités dans lesquelles le numérateur est plus grand que le dénominateur sont dites *fractionnaires*, parce qu'elles sont plus fortes que 1. La véritable *fraction* est une quotité plus petite que 1, et cette quotité résulte toujours de la division d'un nombre entier par un nombre entier plus fort. $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{968}{969}$, sont des fractions.

194. Lorsque le numérateur et le dénominateur sont égaux, la quotité est égale à 1 (**77**), puisque le numérateur est un dividende et le dénominateur un diviseur.

195. Le système des nombres écrits sous forme de quotités, diffère essentiellement du système décimal. C'est un système de numération bien autrement complet car il embrasse tous les systèmes et conduit à des résultats beaucoup plus rigoureux.

196. Un nombre entier quelconque peut toujours être représenté par son carré en fraction sur le nombre lui-même.

$$63 = \frac{63^2}{63} = \frac{63 \times 63}{63} = \frac{63}{63} \times 63 = 1 \times 63$$

De même une fraction décimale, $0{,}63 = \frac{63}{100}$;

de même un nombre entier suivi d'une fraction décimale $8{,}63 = \frac{863}{100}$,

de même un quotient composé d'un nombre entier et d'une fraction ordinaire

$$6+\frac{3}{9}=\frac{57}{9},\ \text{car}\ \frac{9}{9}=1,\ 6\ \text{fois}\ \frac{9}{9}=\frac{54}{9}=6,\ \text{et}\ \frac{54}{9}+\frac{3}{9}=\frac{57}{9}=6+\frac{3}{9}.$$

Ce dernier cas nous apprend que, *pour convertir en une quotité un entier joint à une fraction, il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction, ajouter son numérateur au produit, et mettre cette somme en fraction sur le dénominateur de la fraction donnée.*

197. Il est inutile de démontrer qu'il y a des quotités négatives, puisque tout nombre entier peut être traduit sous la forme de quotité, c'est-à-dire sous forme fractionnaire :

$$-3,\ -4\ \text{sont égaux à}\ -\frac{3^2}{3}\ \text{à}\ -\frac{4^2}{4}\ \text{ou à}\ -\frac{9}{3}-\frac{16}{4}.$$

198. Une même quotité a un nombre infini d'expressions équivalentes.

Les deux termes (numérateur et dénominateur) d'une quotité étant les deux termes d'une division, nous savons déjà que le quotient ne change pas quand on multiplie ces deux termes (dividende et diviseur) par un même nombre.

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ \frac{7}{3}\ \text{exprimant la même valeur que}\ \frac{1\times5}{2\times5},\ \frac{3\times5}{7\times5},\ \frac{7\times5}{3\times5}\ \text{ou}\ \frac{5}{10},\ \frac{15}{35},\ \frac{35}{15}.$$

Pour former $\frac{1}{2}$, on a partagé l'unité en deux parties égales et pris une de ces parties. Si l'on partage encore cette partie en 5 autres parties égales, et que l'on prenne 5 fois plus de ces parties, le résultat ne changera pas, mais la quotité aura une nouvelle forme $\frac{5}{10}$.

Le raisonnement, quand on multiplie les deux termes d'une quotité quelconque autre que $\frac{1}{2}$ par un nombre quelconque autre que 5, se résume dans la série d'égalités suivantes :

$$\frac{3}{7}=\frac{3\times11}{7\times11}=\frac{33}{77}=\frac{3}{7}\times\frac{11}{11}=\frac{3}{7}\times1.$$

En d'autres termes, quand on multiplie le numérateur d'une quotité par un nombre entier N, on rend la quotité N fois plus forte, car on prend N fois plus de parties de l'unité; et quand on multiplie le dénominateur par N, on rend la quotité N fois plus faible, car on réduit les parties de l'unité à des fractions N fois plus petites.

Il suit de là qu'en multipliant à la fois les deux termes par N, la quotité est à la fois rendue N fois plus grande et N fois plus petite : son expression seule est changée ; sa valeur reste la même.

D'autre part, en divisant le numérateur par N, on rendra la fraction N fois plus faible, et en divisant le dénominateur par N, on la rendra N fois plus forte.

Ainsi on pourra également diviser les deux termes de la quotité par un même nombre sans en changer la valeur.

Il y aura donc autant de quotités équivalentes à une quotité quelconque qu'il y a de nombres par lesquels on multipliera ou divisera à la fois ses deux termes.

199. On peut substituer à une *fraction* quelconque une quotité équivalente dans laquelle le numérateur sera représenté par un nombre donné.

S'agit-il de trouver à $\frac{3}{12}$ une *quotité-fraction* équivalente, dont le numérateur soit 5 par exemple? on multipliera le dénominateur 12 par 5, et on divisera le produit 60 par le numérateur primitif 3; le quotient 20 sera le dénominateur de la nouvelle quotité $\frac{5}{20} = \frac{3}{12}$.

En effet, s'il s'agissait de $\frac{1}{12}$, l'opération $\frac{1}{12 \times 5}$ aurait rendu $\frac{1}{12}$ 5 fois plus petit, et il aurait fallu multiplier le numérateur par 5 pour rétablir l'égalité $\frac{1}{12} = \frac{1 \times 5}{12 \times 5} = \frac{5}{60}$, mais $\frac{1}{12}$ est 3 fois plus petit que $\frac{5}{60}$, et comme on veut conserver le numérateur, on rendra la fraction 3 fois plus forte, en divisant le dénominateur par 3.

200. On peut substituer à une quotité *fractionnaire* quelconque une quotité équivalente dans laquelle le dénominateur sera représenté par un nombre quelconque.

S'agit-il de trouver à $\frac{12}{3}$ une *quotité fractionnaire* équivalente dans laquelle le dénominateur soit 5? il faut, d'après le même raisonnement, multiplier le numérateur primitif 12 par 5 et diviser le produit 60 par le dénominateur primitif 3, le quotient 20 sera le numérateur de la nouvelle quotité $\frac{20}{5} = \frac{12}{3}$.

Ainsi on pourra donner à une fraction le numérateur que l'on voudra dans une fraction équivalente, et aux nombres fractionnaires le dénominateur que l'on voudra dans un nombre fractionnaire équivalent.

Mais ce numérateur, comme ce dénominateur, ne sera qu'approché quand la division ne pourra pas se faire exactement.

201. Ces principes nous permettent d'établir la valeur des quotités les unes par rapport aux autres.

Il est facile de déterminer la valeur respective de deux ou plusieurs quotités quand ces quotités ont le même numérateur ou le même dénominateur. De deux quotités qui ont un même numérateur $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{11}$, la plus forte est évidemment celle qui a le plus petit dénominateur; et, de deux quotités qui ont le même dénominateur $\frac{7}{3}$, $\frac{11}{3}$, la plus forte est évidemment celle qui a plus fort numérateur.

Mais quand les quotités ont leur deux termes complètement différents, il devient difficile d'apprécier leur valeur respective : $\frac{5}{7}$ et $\frac{8}{11}$, sont des quotités qui n'ont aucun point de comparaison commun. Il faut donc les représenter par des quotités équivalentes qui aient un de leurs termes identique de part et d'autre.

C'est ce que l'on fera en leur donnant, par la méthode ci-dessus indiquée, un même numérateur ou un même dénominateur.

Un procédé plus simple consiste à traduire les quotités dans le système décimal, c'est-à-dire à diviser 5,00000... par 7 et 8,00000... par 11, d'après les

principes mêmes de l'approximation (**90**). Les quotients 0,714... et 0,727... obtenus chacun à un millième près, nous donneraient les valeurs équivalentes de $\frac{5}{7}$ et de $\frac{8}{11}$.

202. Mais le procédé le plus rapide, et le seul usité, consiste à réduire les quotités au même dénominateur.

Pour réduire deux quotités au même dénominateur sans déterminer au préalable leur numérateur, il faut multiplier les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre. Les deux quotités équivalentes qui résultent de cette opération ont pour dénominateur commun le produit des deux dénominateurs.

$$\frac{3}{4} \text{ et } \frac{5}{8} = \frac{3\times8}{4\times8} \text{ et } \frac{5\times4}{8\times4}, \text{ soit } \frac{24}{32} \text{ et } \frac{20}{32}.$$

On réduira plusieurs quotités au même dénominateur en donnant à chacune d'elles pour dénominateur le produit de tous les dénominateurs, et en multipliant chaque numérateur par le produit des dénominateurs des autres quotités.

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{2}{7} = \frac{3\times(8\times7)}{4\times8\times7}, \frac{5\times(4\times7)}{8\times4\times7}, \frac{2\times(4\times8)}{7\times4\times8} = \frac{168}{224}, \frac{140}{224}, \frac{64}{224}.$$

203. Lorsque les dénominateurs ne sont pas tous premiers entre eux, il faut prendre pour dénominateur le plus petit commun multiple de tous les dénominateurs. On divise ce plus petit commun multiple par le dénominateur de chaque quotité, et on multiplie le numérateur correspondant par le quotient de cette division.

Les quotités $\frac{2}{3}, \frac{11}{6}, \frac{8}{9}, \frac{3}{4}$ ont, pour plus petit commun multiple de leurs dénominateurs : $3^2\times2^2=36$.

Il est clair que

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times12}{3\times12}=\frac{24}{36}$$

$$\frac{11}{6}=\frac{11\times6}{6\times6}=\frac{66}{36}$$

$$\frac{8}{9}=\frac{8\times4}{9\times4}=\frac{32}{36}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times9}{4\times9}=\frac{27}{36}$$

204. Les expressions équivalentes, en nombre indéfini, que l'on peut substituer à une quotité quelconque proviennent toutes de la multiplication des deux termes par un même nombre; la plus simple sera donc celle où les deux termes n'auront aucun multiple commun, c'est-à-dire seront premiers entre eux.

On réduira donc une quotité à sa plus simple expression en divisant ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.

205. Tous les changements que l'on fait subir à une quotité, autres que ceux de multiplier ou de diviser ses deux termes par un même nombre, altèrent sa valeur.

1° Si on ajoute un même nombre aux deux termes d'une quotité, la nouvelle quotité sera plus grande si elle est une fraction, plus petite si elle est un nombre fractionnaire.

$$\frac{2+4}{3+4} > \frac{2}{3} \text{ soit } \frac{6}{7} > \frac{2}{3}$$

Cela résulte de la réduction au même dénominateur :

$$\frac{2\times3+4\times3}{3\times3+4\times3} > \frac{2\times3+4\times2}{3\times3+4\times3}, \text{ soit } \frac{18}{21} > \frac{14}{21}.$$

Cette réduction montre évidemment que le numérateur de la 2e est plus faible que celui de la 1re.

D'autre part, $\frac{3+4}{2+4} < \frac{3}{2}$ car $\frac{3\times2+2\times4}{2\times2+4\times2} < \frac{3\times2+3\times4}{2\times2+4\times2}$, soit $\frac{14}{12} < \frac{18}{12}$.

2° Le contraire se produira nécessairement si on retranche un même nombre des deux termes.

Nota. — Nous avons déjà vu qu'en augmentant d'un nombre quelconque, tantôt le numérateur, tantôt le dénominateur, on rend la quotité tantôt plus forte, tantôt plus faible. Si l'on augmente ou diminue les deux termes de deux nombres différents, il faut que la nouvelle quotité formée par les deux nombres donne le même quotient que la quotité primitive, et il est facile de comprendre que dans toute autre condition la quotité est altérée.

Quand on élève les deux termes d'une quotité qui n'est pas égale à 1 à une puissance quelconque, la quotité est également altérée, car les deux termes ne sont pas multipliés de part et d'autre par le même nombre.

Il en est de même quand on extrait une même racine de chaque terme.

Quand les deux termes d'une quotité sont premiers entre eux, leurs puissances sont premières entre elles.

Car si un nombre pouvait diviser à la fois les deux termes élevés à une puissance quelconque, ces puissances auraient un facteur commun. Leur décomposition en facteurs premiers, montre évidemment qu'ils n'en ont pas.

$\frac{4}{5}$ étant irréductible $\frac{4^3}{5^3}$ est également irréductible ; sinon 4^3 et 5^3 auraient un facteur commun. Ce facteur, s'il n'est pas nombre premier, se décomposerait en facteurs premiers, et l'un d'eux, devant diviser $4\times4\times4$ et $5\times5\times5$, devrait diviser 4 et 5.

Les puissances des deux termes d'une quotité irréductible sont donc irréductibles.

§ 2. *Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales.*

206. Essayons d'abord de ramener toutes les quotités à des expressions décimales, car si elles étaient représentées rigoureusement dans la numération graduée, il deviendrait inutile d'engager les calculs dans les complications d'expressions à doubles termes.

Nous avons vu qu'on ramène une quotité fractionnaire à une expression décimale en divisant son numérateur par son dénominateur. Le quotient est exact en nombres entiers, ou bien il laisse un reste qui est toujours une fraction. Nous n'aurons à nous occuper ici que de ce reste, c'est-à-dire des fractions considérées, soit isolément, soit comme reste de quotients inexacts.

207. La traduction d'une fraction dans le système décimal donne toujours lieu à un nombre quelconque de décimales, et quelquefois ce nombre est indéfini (**97**). Il importe d'examiner comment de tels nombres se produisent.

Nous admettrons d'abord que toutes les fractions sur lesquelles nous allons opérer sont réduites à leur plus simple expression.

208. Quand le dénominateur de la fraction irréductible ne contient pas d'au-

tres facteurs premiers que 2 ou 5, la division du numérateur suivi d'un nombre indéterminé de zéros par le dénominateur est toujours un nombre défini.

N étant un numérateur quelconque, N fois 10 sera toujours exactement divisible par 2 ou par 5, ou par 2×5; $N \times 100$ sera toujours divisible par 2^2 ou 5^2, ou par $2^2 \times 5^2$; il le sera également par 2 et 5, par 2^2 et 5, par 2 et 5^2 et en généra par tous les diviseurs de $2^2 \times 5^2 = 100$.

On verra de même que $N \times 1000$ ou 10^3 sera divisible par 2, 2^2, 2^3, 5, 5^2 5^3, 2×5, $2^2 \times 5$, $2^3 \times 5$, 2×5^2, 2×5^3, $2^2 \times 5^2$, $2^3 \times 5^3$.

En général, N sera toujours exactement divisible par 2 ou 5, quels que soient leurs exposants, quand on aura ajouté à N autant de zéros qu'il y a d'unités dans le plus fort exposant de 2 ou de 5.

209. Quand le dénominateur de la fraction irréductible ne contient que des facteurs étrangers à 2 et à 5, on aura beau multiplier N par 10, 100, 1000, etc., on n'introduira aucun facteur commun au dénominateur, et le numérateur ne sera jamais multiple du dénominateur. On ne pourra donc obtenir aucun quotient exact en nombres décimaux.

Ainsi $\frac{5}{7} = 0,714285\ 714285\ 714285...$

210. Le quotient ainsi obtenu est appelé *périodique*, parce que les chiffres s'y reproduisent dans un même ordre.

Cela tient à ce que chaque reste étant plus petit que le diviseur, on doit, après un certain nombre d'opérations, retomber sur un des restes déjà obtenus; et alors toute la série des chiffres du quotient se reproduit dans le même ordre, comme si l'on recommençait la division à nouveau.

Cette fraction décimale est appelée *périodique simple*, parce que la période commence immédiatement après la virgule, c'est-à-dire que le 1[er] chiffre de la 1[re] période exprime des dixièmes.

211. Quand le dénominateur contient des facteurs 2 et 5 combinés avec d'autres facteurs, la période ne commence pas immédiatement après la virgule et la fraction décimale est appelée *périodique mixte*.

$\frac{134}{825} = 0,1624\ 24\ 24...$

Les deux premiers chiffres **16** qui n'appartiennent pas à la période, proviennent de ce qu'en multipliant le numérateur par 10^n, nous l'avons rendu multiple de 2 et de 5, sans le rendre multiple des autres facteurs premiers de 825 qui sont $11 \times 3 \times 5^2$. Il y a donc une partie du numérateur, divisible par le dénominateur, qui donne un quotient non périodique et fini 16, et une autre partie non divisible qui donne un quotient périodique indéfini 24 24 24...

§ 3. *Conversion des fractions décimales en fractions ordinaires.*

212. Si nous avons des expressions numériques indéfinies dans le système décimal, elles ont une expression numérique équivalente et finie sous forme de quotités.

Nous ne nous occuperons ici que de la conversion des fractions décimales indéfinies; car toute fraction décimale finie est représentée, sous forme de quotité, par un nombre entier, égal au nombre exprimé en décimales, et mis en fraction sur 1 suivi d'autant de zéros que ce nombre a de chiffres :

$$0,5 = \frac{5}{10} \quad 0,6327 = \frac{6327}{10000}.$$

213. Soit une fraction décimale périodique simple 0,383838... en la multipliant par 100, il vient 38,3838... si on retranche une fois 0,3838... de 100 fois 0,3838 ou de 38,3838... il reste 99 fois 0,3838 = 38. Par conséquent, puisque 38 vaut 99 fois 0,3838... 0,3838... vaut 99 fois moins que 38 soit $\frac{38}{99}$.

C'est ce qu'il est facile de voir en divisant 38 par 99.

De même la fraction décimale périodique (**209**) 0,714285714285... multipliée par une puissance de 10 dont l'exposant a autant d'unités qu'il y a de chiffres dans la période, soit 1000000, donne 714285, 714285 714285... qui équivaut à 1 million de fois la fraction proposée. Retranchant cette fraction de 1 million de fois sa valeur, la différence 714285 vaut 99999 fois la fraction périodique, qui est dès lors représentée par la fraction $\frac{714285}{99999}$; d'où il faut conclure que :

Toute fraction décimale périodique simple est égale à une fraction ordinaire qui a pour numérateur un nombre entier formé de la période, et pour dénominateur un nombre entier composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.

214. Evaluons par le même procédé la fraction décimale périodique mixte 0,16 24 24... seulement multiplions-la par 1 suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique : soit 100 fois 0,162424... = 16,24 24 24... de laquelle on obtient, par la soustraction de 1 fois 0,16 24 24..., la différence 16,24—0,16, égale à 99 fois la fraction proposée; cette dernière, dès lors, est égale à $\frac{16,24 - 0.16}{99}$, et (si nous multiplions les deux termes par 100) à $\frac{16\,24 - 16}{9900}$; d'où il est facile de conclure que :

Toute fraction décimale périodique mixte est égale à une fraction ordinaire qui a :

Pour numérateur la différence entre deux nombres entiers formés, le premier de la partie non périodique suivie de la période, et le second de la période seulement ;

Et pour dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période, suivi d'autant de. zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.

Nota. — On appelle *génératrices* des fractions décimales périodiques les fractions ordinaires qui leur sont équivalentes.

Il est inutile de faire remarquer que les fractions $\frac{714285}{99999}$ et $\frac{1624-16}{9900}$ réduites à leur plus simple expression (**204**), nous ramènent aux quotités primitives $\frac{5}{7}$ et $\frac{134}{825}$; ce que l'on peut vérifier.

215. Ces conclusions nous conduisent à une considération curieuse. Il est clair que la fraction décimale 0,999... poussée à l'infini, est égale à 1. C'est ce que démontre la fraction $\frac{9}{9}$ qui est l'équivalente de la fraction périodique 0,999...

On voit ainsi que les notations mathématiques, malgré leur diversité apparente, concourent au même résultat.

216. Une fraction périodique mixte dont la période serait 9, telle que 0,87999..., revient, quand on la multiplie par 100, c'est-à-dire par 1 suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie périodique, à 87 + 0,999... = 87 + 1 = 88, c'est-à-dire à un nombre formé par la partie périodique

augmentée de 1 ; et comme cette nouvelle expression est 100 fois trop forte, il faudra la diviser par 100. La fraction périodique mixte sera donc représentée par $\frac{88}{100} = 0{,}88$ c'est-à-dire par une fraction décimale formée de la partie non périodique seulement augmentée de 1.

On voit en effet, à première vue, que 0,87999... = 0,88 quand on admet que la partie périodique est poussée à l'infini.

4° OPÉRATIONS SUR LES QUOTITÉS.

217. On ne peut se dispenser, d'après ce que l'on vient de voir, d'écrire certaines expressions numériques sous forme de quotités quand on veut avoir des nombres finis. La connaissance des règles relatives aux opérations sur les quotités devient donc indispensable.

§ 1. *Addition des fractions et des nombres fractionnaires.*

218. Quand les quotités sur lesquelles on opère ont toutes le même dénominateur, il est clair que leur somme se composera de la somme de leurs numérateurs mise en fraction sur le dénominateur commun :

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{11}{7} = \frac{16}{7}.$$

Quand les quotités n'ont pas le même dénominateur, on les remplace, d'après la méthode sus-indiquée (**202**) par des quotités équivalentes qui ont le même dénominateur ; ce qui nous ramène au cas précédent.

§ 2. *Soustraction des fractions et des nombres fractionnaires.*

219. Pour déterminer la différence entre deux ou plusieurs quotités, on les réduit préalablement au même dénominateur, et on détermine la différence des numérateurs, comme pour les nombres entiers.

Cette différence, mise en fraction sur le dénominateur commun, donne évidemment le résultat cherché :

$$\frac{11}{7} - \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{6}{7}.$$

La différence peut être négative comme dans les nombres entiers :

$$\frac{2}{7} - \frac{5}{7} = -\frac{3}{7}.$$

220. La quotité $-\frac{3}{7}$ est évidemment égale à $\frac{-3}{7}$; d'où il résulte qu'une quotité dont le numérateur est négatif est négative.

On le démontrerait en cherchant quelle est la valeur qui, multipliant le dénominateur 7, devrait reproduire le numérateur -3 ; il faut évidemment que ce soit un nombre négatif entier, fractionnaire ou fraction, car 7 étant

considéré comme un diviseur positif, il faut le multiplier par un quotient négatif pour obtenir le dividende négatif — 3.

On verra de même que la quotité $\frac{3}{-7}$ est négative, car il n'y a qu'une quantité négative qui, multipliant — 7, peut reproduire le dividende positif 3.

Mais la fraction $\frac{-3}{-7}$ sera une valeur positive, car il n'y a qu'une quantité positive qui, multipliant le diviseur négatif — 7, puisse reproduire le dividende négatif — 3.

Ces considérations résultent des règles que nous avons établies au sujet des nombres négatifs (**139** et suivants).

§ 3. *Multiplication des fractions ou des nombres fractionnaires.*

221. Nous avons défini la multiplication (**51**) *une opération qui a pour but d'additionner rapidement deux ou plusieurs fois le même nombre;* nous aurions pu la définir, comme on le fait d'ordinaire, *une opération qui a pour but de répéter le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur*, ce qui revient au même. Mais ces définitions ne peuvent s'appliquer qu'aux nombres entiers, car elles entraînent l'idée d'un produit plus fort que les facteurs. Nous avons eu soin d'indiquer en note la véritable définition :

La multiplication a pour but, étant donnés deux nombres, d'en obtenir un troisième qui soit composé avec l'un des deux nombres comme l'autre est composé avec l'unité.

En effet, multiplier 3 par 7, c'est former un produit, 21, composé d'autant de fois 3 qu'il y a d'unités dans 7.

De même, multiplier $\frac{3}{4}$ par 7, c'est former un produit $\frac{21}{4}$, composé d'autant de fois $\frac{3}{4}$ qu'il y a d'unités dans 7.

De même encore, multiplier 7 par $\frac{3}{4}$, c'est former un produit, $\frac{21}{4}$, composé d'autant de fois 7 qu'il y a de quarts dans l'unité, quand on prend chacun de ces quarts 3 fois.

De même enfin, multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{6}$, c'est former un produit, $\frac{15}{24}$, composé d'autant de fois $\frac{3}{4}$ qu'il y a de sixièmes dans l'unité, quand on prend chacun de ces sixièmes 5 fois.

222. Examinons comment on parvient à ces trois derniers résultats.

1° *Pour multiplier une quotité,* $\frac{11}{7}$ ou $\frac{7}{11}$, *par un nombre entier*, 3, *on multiplie seulement le numérateur de la quotité, sans changer le dénominateur.*

En effet, multiplier $\frac{11}{7}$ ou $\frac{7}{11}$ par 3, revient à prendre 3 fois plus de septièmes ou de onzièmes que la quotité n'en a.

Les produits sont donc bien : $\frac{11 \times 3}{7} = \frac{33}{7}$, et $\frac{7 \times 3}{11} = \frac{21}{11}$.

Dans le 1er cas, le résultat est plus fort que les deux facteurs;

Dans le 2[e] cas, il est plus fort que la quotité, et plus faible que l'entier.
Le 1[er] cas se reproduira toujours quand la quotité sera une expression fractionnaire, le 2[e] quand la quotité sera une fraction.

223. 2° *Pour multiplier un nombre entier 5 par une quotité* $\frac{4}{3}$ *ou* $\frac{3}{4}$, *on aura également pour résultat le produit du nombre entier par le numérateur, en fraction sur le dénominateur de la quotité.*

En effet, multiplier 5 par $\frac{4}{3}$ revient à prendre 5 quatre fois $5 \times 4 = 20$, mais comme ce n'est pas par 4 unités, mais par 4 tiers d'unité que nous multiplions 5, le produit 20, au lieu d'exprimer des unités, exprimera des tiers d'unité et sera $\frac{20}{3}$.

On démontrerait de même que le produit $5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

Nous remarquerons également que, quand la quotité est fractionnaire, le produit est plus fort que les deux facteurs, et que, quand la quotité est une fraction, le produit est plus fort que la quotité primitive, mais plus faible que le nombre entier.

224. 3° *Pour multiplier une quotité* $\frac{3}{4}$ *par une autre quotité* $\frac{5}{7}$, *on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, et on met le premier produit en fraction sur le second.*

En effet, si l'on avait à multiplier $\frac{3}{4}$ par 5, on aurait le produit $\frac{3 \times 5}{5} = \frac{15}{4}$;

mais ce n'est pas par 5 unités qu'il faut multiplier $\frac{3}{4}$, c'est par des septièmes,

c'est-à-dire par des parties 7 fois plus petites que l'unité. Le produit $\frac{15}{4}$ est donc 7 fois trop grand, et, pour le réduire à sa juste valeur, il faut le rendre 7 fois plus petit en multipliant le dénominateur par 7.

Donc : $$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}.$$

On démontrerait de même que $\frac{4}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{4 \times 7}{3 \times 5} = \frac{28}{15}$.

Remarquons que, quand les quotités facteurs sont des fractions, leur produit est plus petit que chacun des facteurs, et on a des fractions de fractions. Le contraire arrive quand les quotités facteurs sont fractionnaires.

225. Les règles que nous venons d'établir pour deux facteurs s'étendront facilement à plusieurs facteurs, et nous dirons, en général :

1° Pour multiplier une quotité par des nombres entiers, on prend pour numérateur le produit de son numérateur par le produit des nombres entiers, et pour dénominateur le dénominateur de la quotité.

2° Pour multiplier plusieurs quotités entre elles, on met le produit de leurs numérateurs en fraction sur le produit de leurs dénominateurs.

$$\frac{3}{4} \times 5 \times 7 = \frac{3 \times 5 \times 7}{4} = \frac{105}{4}.$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 4 \times 2}{4 \times 5 \times 7} = \frac{24}{140}.$$

226. La seule inspection des exemples ci-dessus démontre qu'on peut, dans

tous les cas, intervertir l'ordre des facteurs, car cela revient à les intervenir séparément dans chaque numérateur et dans chaque dénominateur de la quotité définitive qui n'en est pas altérée.

§ 4. *Division des fractions et des nombres fractionnaires*

227. Si le produit de deux quotités doit être composé avec un des facteurs comme l'autre est composé avec l'unité, *le quotient de deux quotités doit être composé avec l'unité comme le dividende l'est avec le diviseur.*

Dans les nombres entiers, le quotient exact 9, de 36 par 4, est composé avec l'unité comme 36 l'est avec 4, c'est-à-dire qu'il contient autant de fois l'unité que 36 contient de fois 4.

Le quotient inexact de 39 par 4 qui est $9+\frac{3}{4}$ ou $\frac{39}{4}$ ou 9,75, contient également autant de quarts d'unités que le dividende 39 contient de fois le diviseur 4, car si l'on multiplie $\frac{39}{4}$ ou 9,75 par 4 on obtient 39.

De même le quotient de 5 par $\frac{3}{4}$ est un nombre qui, multiplié par $\frac{3}{4}$, doit reproduire 5, et ce nombre est $\frac{20}{3}$ car $\frac{20}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3\times 20}{12}=\frac{60}{12}=5$.

Le quotient de $\frac{3}{4}$ par 5 sera également un nombre qui, multiplié par 5, doit reproduire $\frac{3}{4}$, et ce nombre est $\frac{3}{20}$, car $\frac{3}{20}\times 5=\frac{15}{20}$, dont l'expression la plus simple est $\frac{3}{4}$.

Le quotient de $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{6}$ sera $\frac{18}{20}$, car $\frac{18}{20}\times\frac{5}{6}=\frac{90}{120}=\frac{3}{4}$.

228. Examinons comment on parvient à ces quatre derniers résultats :

1° Le quotient inexact de deux nombres entiers peut toujours être représenté, dans tous les cas par une quotité soit fractionnaire, soit fraction, suivant que le dividende est plus grand ou plus petit que le diviseur $\left(D \gtrless d\right)$.

En effet le quotient de $\frac{39}{4}$ est $9+\frac{3}{4}$, expresssion qu'on peut ramener à une quotité en remplaçant 9 unités par une somme équivalente de quarts; or, comme il y a 4 quarts dans une unité, il y en aura 4 fois 9 dans 9 unités, soit $\frac{36}{4}$ qui, ajoutés aux $\frac{3}{4}$ restants, donnent $\frac{39}{4}$.

229. L'expression $\frac{39}{4}$, qui équivaut à $9+\frac{3}{4}$, nous apprend que *pour transformer en une seule quotité un nombre entier suivi d'une fraction, on multiplie le nombre entier par le dénominateur de la fraction et on ajoute ce produit au numérateur.*

Chaque fois que, dans le calcul, on trouvera une expression numérique $Q+\frac{r}{d}$

composée d'un nombre entier Q suivi d'une fraction $\frac{r}{d}$, on pourra considérer cette expression comme un quotient inexact qui sera plus simplement exprimé par le dividende en fraction sur le diviseur $\frac{D}{d}$, et ce dividende se retrouvera toujours en multipliant le diviseur d par le quotient Q, puis en ajoutant au produit le reste r.

Réciproquement, quand on trouvera, dans le calcul, une quotité fractionnaire dont le numérateur n'est pas multiple du dénominateur, on pourra la décomposer en un nombre entier suivi d'une fraction additionnelle. Il suffira de diviser le numérateur par le dénominateur pour en extraire les unités entières du quotient, et d'ajouter au nombre qui exprime les unités entières, une fraction dont le numérateur sera le reste r de la division, et le dénominateur le diviseur d.

On pourra opérer indifféremment avec les deux expressions $\frac{D}{d}$ ou $Q+\frac{r}{d}$ et on arrivera aux mêmes résultats.

Multiplions, soit $\frac{33}{7}$ par $\frac{28}{3}$, soit les expressions équivalentes $4+\frac{5}{7}$ par $9+\frac{1}{3}$:

1° $\frac{33}{7}\times\frac{28}{3}=\frac{924}{21}=44.$

2° $\left(4+\frac{5}{7}\right)\times\left(9+\frac{1}{3}\right)=4\times9+4\times\frac{1}{3}+\frac{5}{7}\times9+\frac{5}{7}\times\frac{1}{3}.$

$$=36+\frac{4}{3}+\frac{45}{7}+\frac{5}{21}.$$

$$=36+\frac{28}{21}+\frac{135}{21}+\frac{5}{21}.$$

$$=36+\frac{168}{21}.$$

$$=36+8=44.$$

230. 2° *Pour diviser un nombre entier, 5, par une quotité,* $\frac{8}{7}$ ou $\frac{7}{8}$, *il faudra multiplier ce nombre par la quotité renversée.*

5 divisé par $\frac{8}{7}$ est égal à $5\times\frac{7}{8}$.

En effet, cherchons d'abord quel est le quotient qui, multipliant $\frac{8}{7}$, reproduirait 1 :

Ce quotient est évidemment $\frac{7}{8}$, car $\frac{8}{7}\times\frac{7}{8}=\frac{8\times7}{7\times8}=\frac{56}{56}=1.$

Le quotient qui doit reproduire 5 sera 5 fois plus fort que le quotient $\frac{7}{8}$ qui reproduit 1.

Il sera donc $5\times\frac{7}{8}=\frac{35}{8}$.

On prouverait de même que le quotient de 5 par $\frac{7}{8}$ serait $\frac{5 \times 8}{7} = \frac{40}{7}$.

231. 3° *Pour diviser une quotité par un nombre entier, il faudra multiplier le dénominateur ou diviser le numérateur de la quotité par ce nombre.*

$\frac{5}{6}$ divisé par 7 est égal à $\frac{5}{6 \times 7} = \frac{5}{42}$, car la quotité exprime des valeurs 7 fois plus petites, et $\frac{5}{42} \times 7 = \frac{5 \times 7}{42} = \frac{35}{42} = \frac{5}{6}$.

232. 4° *Pour diviser une quotité par une autre quotité, il faudra multiplier les deux termes de la première par les deux termes renversés de la seconde.*

$\frac{5}{6}$ divisé par $\frac{2}{3}$ donne pour quotient $\frac{5 \times 3}{6 \times 2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$, et $\frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

En effet, si l'on divisait $\frac{5}{6}$ par 2, il faudrait rendre la quotité 2 fois plus petite en multipliant le dénominateur par 2, soit $\frac{5}{6 \times 2}$; mais ce quotient n'est pas exact, car nous avons divisé par des unités au lieu de diviser par des tiers; il est donc 3 fois trop faible, et pour lui rendre sa juste valeur, il faut le multiplier par 3, soit $\frac{5 \times 3}{6 \times 2}$.

§ 5. *Puissances des fractions et des nombres fractionnaires.*

233. *Pour élever une quotité à la 2°, à la 3°, à la 4°, etc., puissance, il faut élever chacun de ses deux termes à la puissance proposée.*

Cela résulte de la règle même de la multiplication, car :

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5 \times 5 \times 5}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}.$$

§ 6. *Racines des fractions et des nombres fractionnaires.*

234. De ce qui précède, il suit évidemment que : *Pour extraire la racine d'une quotité, il faut extraire la racine de chacun de ses deux termes.*

$\sqrt[3]{\frac{125}{216}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{216}} = \frac{5}{6}$, car 5^3 reproduit 125, et 6^3 reproduit 216.

235. Quand ni l'un ni l'autre des deux termes n'est un carré parfait, on ne sait plus au juste sur quelle quantité on opère; car le dénominateur n'a aucune précision. Il faut donc rendre le dénominateur carré parfait en multipliant

les deux termes de la quotité par ce dénominateur lui-même. On approchera ensuite du numérateur par l'extraction abrégée.

$$\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5 \times 6}{6 \times 6}}\sqrt{\frac{30}{36}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}, \text{ à } \frac{1}{6} \text{ près, mais si nous voulons une}$$

suite décimale à la racine de 30, nous trouverons $\frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{5,477}{6}$ à 1 millième de 6e près, ou, ce qui revient au même, à un six-millième près.

236. On peut rendre un nombre carré parfait en le décomposant en facteurs premiers. On découvre ainsi par quels facteurs il faut le multiplier pour qu'il soit un carré parfait.

$20 = 2^2 \times 5$; il est clair que si on multiplie cette expression par 5, soit $2^2 \times 5^2 = (2 \times 5)^2$, elle donnera un carré parfait.

Si donc on veut rendre carré parfait le dénominateur 20 d'une quotité $\frac{21}{20}$, au lieu de multiplier les deux termes par 20, il suffira de les multiplier par 5 : $\frac{105}{100}$ aura pour dénominateur un carré parfait dont la racine est 10.

Ce procédé est plus simple que le précédent quand on peut déterminer rapidement les facteurs premiers du dénominateur.

5° FRACTIONS CONTINUES.

237. On appelle *fractions continues* des expressions numériques dont on approche non pas à l'aide d'expressions décimales, mais d'expressions *quotitatives* (écrites sous forme de quotités).

« Nous avons vu, dit Mutel dans son *Cours d'Arithmétique*, qu'il était utile de réduire les fractions à leur plus simple expression, pour se faire une idée de leur valeur, et pour simplifier les calculs auxquels on doit les soumettre. Lorsqu'on trouve qu'une fraction, dont les deux termes sont un peu considérables, est irréductible et que la nature de la question n'exige pas un grand degré d'approximation, on peut s'en procurer des valeurs approchées assez simples.

« Soit $\frac{143}{609}$ la fraction donnée, si l'on divise ses deux termes par 143, ce qui n'en change pas la valeur, le numérateur deviendra 1 et le dénominateur $4 + \frac{37}{143}$, de sorte qu'en négligeant le reste 37 de la seconde division, on aura $\frac{1}{4}$ pour une première valeur approchée de la fraction proposée. Mais en négligeant le reste 37, on emploie un dénominateur trop faible ; par conséquent la fraction $\frac{1}{4}$ est *plus grande* que la proposée dont la vraie valeur est $\frac{1}{4 + \frac{37}{143}}$.

« Opérant sur $\frac{37}{143}$ comme sur la fraction donnée, on divisera ses deux termes par 37, ce qui donnera 1 pour le numérateur, et $3 + \frac{32}{37}$ pour le dé-

nominateur; négligeant le reste 32 de cette seconde division, on aura $\frac{37}{143} = \frac{1}{3}$, et par conséquent $\frac{143}{609} + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}} = \frac{3}{13}$ qui est une seconde valeur approchée. Mais, en négligeant le reste 32, le dénominateur de la fraction $\frac{1}{3}$ est trop petit, cette fraction est donc trop grande, et, comme elle sert à compléter le dénominateur 4 de la première valeur trouvée $\frac{1}{4}$, il s'ensuit que ce dénominateur $4 + \frac{1}{3}$ est trop grand, et que la fraction elle-même $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}$ ou $\frac{3}{13}$ est *plus petite* que la proposée dont la vraie valeur est $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{32}{37}}}$.

« Faisant la même opération sur $\frac{32}{37}$, et continuant toujours de la même manière, on aura des valeurs alternativement trop petites et trop grandes. Mais en divisant les deux termes de la dernière fraction par son numérateur, comme les restes que donnent les divisions des dénominateurs par les numérateurs sont précisément les mêmes que ceux qu'on obtiendrait en cherchant le plus grand commun diviseur entre les deux termes de la fraction donnée supposée irréductible, on doit arriver à un reste égal à l'unité; et puisque chaque reste forme le numérateur de la fraction suivante, on finira par arriver à une fraction dont le numérateur soit l'unité, et par conséquent ne puisse plus servir de diviseur. »

238. Nous obtenons en effet pour valeurs successives de $\frac{143}{609}$.

1° $\frac{143}{609} = \frac{1}{4}$ trop forte;

2° $\frac{143}{609} = \left\{\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}\right\} = \frac{3}{13}$, trop faible;

3° $\frac{143}{609} = \left\{\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}\right\} = \frac{4}{17}$, trop forte;

4° $\frac{143}{609} = \left\{\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}\right\} = \frac{27}{115}$, trop faible;

5° $$\frac{143}{609}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}}}=\frac{58}{247},\text{ trop forte;}$$

6° $$\frac{143}{609}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}=\frac{143}{609},\text{ exactement.}$$

239. Pour revenir d'une de ces fractions continues, la dernière par exemple, à la fraction proposée, on remarque que :

$$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\text{ et }\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}.$$

de même $$6+\frac{2}{5}=\frac{32}{5},\text{ et }\frac{1}{6+\frac{2}{5}}=\frac{5}{32}.$$

de même $$1+\frac{5}{32}=\frac{37}{32},\text{ et }\frac{1}{1+\frac{5}{32}}=\frac{32}{37}.$$

de même $$3+\frac{32}{37}=\frac{143}{37},\text{ et }\frac{1}{3+\frac{32}{37}}=\frac{37}{143}.$$

de même, enfin, $$4+\frac{37}{143}=\frac{609}{143},\text{ et }\frac{1}{4+\frac{37}{143}}=\frac{143}{609}.$$

240. Les valeurs successives finales de chacune des fractions continues s'appellent *réduites;* on les appelle encore *convergentes*, parce qu'elles approchent de plus en plus de la fraction proposée qui est leur *génératrice.*

On doit les considérer comme des approximations obtenues sous forme de quotités.

241. Les fractions continues provenant d'une fraction irréductible se terminent toujours. Mais il en est qui ne se terminent pas et qui sont périodiques. Ces fractions sont alors des expressions équivalentes à un nombre incommensurable. Il serait trop obscur d'en parler ici.

242. Toutes les réduites d'une fraction contiuue quelconque, finie ou indéfinie, se déduisent des deux précédentes d'après une règle très-simple.

Il suffit de multiplier les deux termes de la dernière réduite par le déno-

minateur entier de la quotité négligée, et d'ajouter terme à terme la réduite précédente :

Ici les deux premières réduites étant $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{13}$, la troisième sera $\frac{3\times1+1}{13\times1+4}$ $=\frac{4}{17}$.

Les réduites 2e et 3e étant $\frac{3}{13}$ et $\frac{4}{17}$, la 4e sera $\frac{4\times6+3}{17\times6+13}=\frac{27}{115}$.

Les réduites 3e et 4e étant $\frac{4}{17}$ et $\frac{27}{115}$ la 5e sera $\frac{27\times2+4}{115\times2+17}=\frac{58}{247}$.

Enfin les réduites 4e et 5e étant $\frac{27}{115}$ et $\frac{58}{247}$ la 6e sera $\frac{58\times2+27}{247\times2+115}=\frac{143}{609}$.

243. En résumé, toute quotité irréductible un peu compliquée peut être exprimée en fractions continues partielles dont les réduites approcheront de plus en plus de la valeur exacte, et ces fractions continues partielles aboutiront toujours à une fraction continue totale qui donnera pour réduite la génératrice elle-même.

Les fractions continues indéfinies ou périodiques n'appartiennent pas aux quotités qui expriment des quotients et sont toujours commensurables puisqu'elles ont toujours une expression quotitative finie comme nous l'avons vu (**228**).

V

DES NOMBRES CONSIDÉRÉS COMME PUISSANCES OU RACINES.

Nous nous contenterons de résumer ici ce que nous avons fait constater, en différents endroits, sur les puissances et les racines.

244. Tout nombre peut être considéré comme puissauce d'un autre nombre commensurable ou incommensurable.

$4 = 2^2$, $16 = 2^4$.

$5 = (2{,}24)^2 = (1{,}71)^3$ à moins d'un centième.

245. Nous avons dit que tout nombre entier qui n'a pas sa racine exacte en nombre entier n'en a pas sous forme de quotité.

Cela tient à ce que les deux termes d'une quotité irréductible étant premiers entre eux, leurs puissances sont premières entre elles.

Si $\sqrt{5}$ pouvait être $\frac{A}{B}$, il faudrait que $\frac{A^2}{B^2} = 5$, soit $A^2 = 5 \times B^2$, et $\frac{5 \times B^2}{B^2}$ ne serait plus une fraction irréductible, puisqu'elle aurait un facteur commun B^2 qui réduirait la fraction à $\frac{5}{1} = 5$.

246. Tout nombre positif, considéré comme puissance à exposant pair, a pour racine un autre nombre commensurable ou incommensurable, positif ou négatif.

$4 = 2^2$ et $(-2) \times (-2) = (+2) \times (+2) = +2^2$. La racine de 4 est donc ± 2.

247. Tout nombre positif, considéré comme puissance à exposant impair, ne peut avoir pour racine qu'un nombre positif. $27 = 3^3$; mais 27 n'est pas égal à $(-3)^3$ car le produit d'un nombre impair de facteurs négatifs est négatif.

248. On déduit de là que tout nombre négatif ne peut être considéré que comme puissance à exposant impair d'un autre nombre négatif, jamais comme puissance à exposant impair d'un nombre positif, ni comme puissance à exposant pair d'un nombre quelconque positif ou négatif.

249. Une racine à exposant pair d'un nombre négatif n'a pas d'expression; elle est *imaginaire*.

On fait néanmoins figurer ces racines dans les calculs algébriques parce qu'elles conduisent souvent à des solutions réelles, mais il serait trop obscur d'en établir ici la théorie.

250. Tout ce que nous venons de dire des nombres s'applique aux fractions, avec cette seule réserve que les fractions irréductibles ne peuvent avoir pour puissances ou pour racines quelconques que des fractions.

VI

CONCLUSIONS GÉNÉRALES DE L'ANALYSE DES NOMBRES.

251. Il résulte de tout ce qui précède que tout nombre fini (entier, fractionnaire ou fraction) a son expression numérique précise sous forme de quotité.

L'unité, étant arbitraire, n'a sa valeur précisée que sous forme de quotité. L'unité de temps, qu'elle soit la seconde, la minute, l'heure, le jour, l'année, le siècle, est une fraction du temps; la seconde est la 60ᵉ partie de la minute, la minute la 60ᵉ partie de l'heure, l'heure la 24ᵉ partie du jour, le jour la 365ᵉ partie de l'année, l'année la 100ᵉ partie du siècle, etc.

Réciproquement l'année est 365 fois le jour, le jour 24 fois l'heure, etc.

L'unité abstraite, suivant qu'on la détermine comme base du système décimal ou de tout autre système, n'est également qu'une fraction de quantités qui lui sont supérieures, et un nombre fractionnaire des quantités qui lui sont inférieures. Dans le système décimal, 1 est la 10ᵉ partie d'une dixaine, la 100ᵉ partie d'une centaine, etc., ou bien 10 fois la valeur d'un dixième, 100 fois la valeur d'un centième, etc.

Ce raisonnement pouvant s'étendre aux nombres entiers comme aux nombres fractionnaires et aux fractions, il en résulte que la Théorie des nombres doit se borner au calcul des quotités. Elle doit s'en tenir aux approximations quand elle aborde l'étude des nombres incommensurables, et laisser à l'*Algèbre*, c'est-à-dire à la *Théorie des quantités fixes ou variables*, le soin de poursuivre la détermination des quantités indéfinies.

Ces considérations sont de la plus haute importance quand il s'agit de déterminer le rôle du calcul numérique, c'est-à-dire du calcul opéré avec des nombres. Elles nous apprennent que la Théorie des nombres ne traite que des quantités qui peuvent être écrites avec des chiffres, et à condition que les chiffres ne soient pas employés à l'infini.

Or toutes les quantités écrites en chiffres d'une manière finie sont :

1° Les nombres considérés comme sommes, produits ou puissances d'autres nombres finis;

2° Les nombres positifs ou négatifs considérés comme différences, en plus ou en moins, d'autres nombres finis;

3° Les nombres positifs ou négatifs considérés comme quotients d'autres nombres finis, et qui ont toujours leur expression rigoureuse et complète sous forme de quotités;

4° Les nombres positifs ou négatifs considérés comme racines exactes, c'est-à-dire comme facteurs identiques d'autres nombres positifs ou négatifs finis;

5° Les nombres positifs ou négatifs incommensurables, quand on rejette leur expression indéfinie pour s'en tenir à une approximation.

En d'autres termes, il faut exclure de la Théorie des nombres :

1° Toute racine incommensurable qui n'est pas limitée à une approximation numérique quelconque.

2° Toute racine imaginaire.

THÉORIE DES NOMBRES. — IIIᵉ PARTIE

RELATIONS DES NOMBRES.

I

RELATIONS ÉLÉMENTAIRES.

1° NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

252. Nous arrivons au véritable objet de l'Arithmologie, qui est de découvrir des quantités inconnues d'après les relations qui existent entre des quantités connues.

On appelle relation une expression composée de plusieurs quantités divisées en deux groupes ou *membres* que l'on réunit à l'aide des signes $=$ ou $>$, $<$.

253. La relation dont les membres sont réunis par le signe $=$, prend le nom d'*égalité* quand tous ses *termes*, c'est-à-dire tous les nombres qui la composent, sont connus.

Quand l'un ou quelques uns des termes sont inconnus, la relation prend le le nom d'*équation*.

On appelle *inégalité* la relation dont les deux membres sont séparés par le signe $>$ ou $<$.

254. Toute équation est donc fondée sur une égalité où l'on suppose qu'un terme, au moins, est inconnu; il faut alors déterminer ce terme de manière à rétablir l'égalité primitive.

2° DES RELATIONS ENTRE DEUX NOMBRES.

255. Les relations où n'entrent pas plus de deux nombres se réduisent à une identité ou à une inégalité.

$81 = 81$ est une identité. Cette expression ne nous apprend rien, sinon que les deux membres de la relation sont les mêmes.

Remarquons cependant que l'on peut faire l'addition ou la soustraction d'une même quantité aux deux membres d'une identité, multiplier ou diviser ces deux membres, les élever à la même puissance ou en extraire la même racine, et que le résultat est toujours une égalité.

256. $81 > 3$ est une inégalité qui a une autre expression : $3 < 81$ correspondante à la première. Le résultat que fournit une telle relation est très-vague, insignifiant en lui-même ; et, dès l'instant qu'on cherche à le préciser, on tombe dans une relation où 3 nombres au moins se trouvent engagés.

3° DES RELATIONS ENTRE TROIS NOMBRES.

257. En effet, si l'on veut savoir de combien d'unités 81 est plus grand que 3, on sera forcé d'ajouter à 3 un certain nombre, 78, d'unités qui le rende égal à 81, ou bien de retrancher de 81 le même nombre d'unités pour le rendre égal à 3 ; d'où il résulte que les trois égalités :

$$3 + 78 = 81, \quad 81 - 78 = 3, \quad 81 - 3 = 78$$

ont la même signification. Si l'un des nombres 81, 3 et 78 est inconnu, on le retrouve à l'aide d'une des trois équations :

$$3 + 78 = x, \quad 81 - 78 = y, \quad 81 - 3 = z,$$

x, y et z sont les notations par lesquelles on désigne généralement les inconnues dans les équations.

258. Si l'on veut savoir, d'un autre côté, dans quelle proportion la valeur de 81 est à celle de 3, on remarque que 81 est 27 fois plus grand que 3, ou que 3 est la 27e partie de 81 ; et les trois expressions :

$$81 = 3 \times 27, \quad 3 = \frac{81}{27}, \quad 27 = \frac{81}{3}$$

ont la même signification, en sorte que, si l'un des nombres 81, 3 et 27 est inconnu, on le retrouvera à l'aide des équations :

$$x = 3 \times 27, \quad y = \frac{81}{27}, \quad z = \frac{81}{3}.$$

259. On voit que les égalités entre 3 nombres nous ramènent à deux sortes d'équations :

La première sorte se résout tantôt par voie d'addition, tantôt par voie de soustraction ; la seconde tantôt par voie de multiplication, tantôt par voie de division. On trouverait de même une troisième sorte d'équations qui embrasserait les puissances et les racines : $81 = 3^4$, $\sqrt[4]{81} = 3$. Mais il faut en réserver l'examen pour la *Théorie des quantités*.

260. Nous sommes donc en état de résoudre toutes les équations qui ne comprennent que 3 termes, et on peut dire que tout ce qui précède n'a eu d'autre but que de nous préparer à cette solution. Il nous reste maintenant à dire quelques mots de la manière dont on peut traiter une égalité, avant de passer aux relations qui comprennent plus de 3 termes.

261. Nous avons vu que l'égalité $3+78=81$ avait pour expressions équivalentes les égalités $81-78=3$, et $81-3=78$. Montrons qu'on peut isoler un quelconque des termes de l'égalité, et réunir les autres termes dans le membre correspondant; on établira ainsi la valeur d'un terme quelconque en relation des autres.

Si nous voulons isoler 3 dans l'égalité $3+78=81$, il suffira de retrancher de chaque membre de l'égalité le même nombre 78 et on aura $(3+78)-78=81-78$, ce qui revient à $3+0=81-78$, ou simplement à $3=81-78$; car il est évident qu'en retranchant un même nombre des deux membres d'une égalité, il y a encore égalité.

De même, pour isoler 78, on aurait retranché de part et d'autre le nombre 3, et l'expression $3+78-3=81-3$, qui se réduit à $78=81-3$, aurait donné le résultat cherché.

On obtient donc, par le procédé que nous venons d'indiquer, les trois égalités :

$$81=3+78,\ 3=81-78,\ \text{et}\ 78=81-3.$$

262. De même, si nous voulons, dans l'égalité $3\times27=81$, isoler 3, nous diviserons chaque membre de l'égalité par 27, ce qui, en rendant chaque membre 27 fois plus faible, laisse encore subsister l'égalité.

$\frac{3\times27}{27}=\frac{81}{27}$ équivaut à $3\times\frac{27}{27}=\frac{81}{27}$, et à $3\times1=\frac{81}{27}$, et enfin à $3=\frac{81}{27}$.

De même encore, pour isoler 27, on aurait divisé chaque membre par 3 :

$$\frac{3\times27}{3}=\frac{81}{3}\ \text{et}\ 27=\frac{81}{3}.$$

On obtient également par ce procédé les trois expressions équivalentes $81=3\times27$, $3=\frac{81}{27}$ et $27=\frac{81}{3}$.

263. Il résulte de là que pour faire passer un des termes d'une égalité d'un membre dans l'autre, il suffit de l'écrire dans l'autre membre :

Avec le signe — s'il a le signe +; avec le signe + s'il a le signe —;

Comme diviseur de toutes les parties de l'autre membre, s'il est facteur dans le premier membre;

Comme facteur de toutes les parties de l'autre membre, s'il est diviseur dans le premier membre.

Par suite, si l'un des termes est inconnu, on l'isole dans un membre, et l'autre membre donne sa valeur en nombres connus.

264. On peut ajouter ou retrancher membre à membre deux égalités, et le résultat est encore une égalité; car, les deux membres d'une égalité se résolvant en deux nombres égaux, cela revient à ajouter ou à retrancher un même nombre à chaque membre de l'égalité.

$16-7=9$ et $14-6=8$, ajoutés membre à membre, donnent $16-7+(14-6)=9+8$, ce qui revient à $9-8=9-8$.

Par la même raison on peut multiplier ou diviser membre à membre deux égalités, les élever à la même puissance ou en extraire la même racine, et le résultat est encore une égalité.

265. Tout ce que nous venons de dire des égalités s'applique aux inégalités. Mais, ce qu'il y a de particulier aux inégalités, c'est que l'on peut modifier un seul de ses termes jusqu'à une certaine limite, sans que l'inégalité cesse de persister; ainsi dans l'inégalité $18>13$, on peut ajouter à 18, par

exemple, 1, 2, 3 et même 4 unités, sans que l'inégalité cesse de persister; mais si on en ajoutait 5, l'inégalité se transformerait en égalité $18 = 13 + 5$. Au delà de cette limite et de l'égalité qu'elle fournit, le signe de l'inégalité est renversé et reste tel indéfiniment : $18 < 13 + 6$, $18 < 13 + 7$, etc.

4° DES RELATIONS ENTRE QUATRE NOMBRES.

266. Si l'on admet que quatre nombres sont reliés un à un, soit comme sommes, soit comme différences, soit comme facteurs, soit comme termes d'un quotient, et si l'on sépare deux de ces nombres des deux autres, on obtiendra soit des égalités soit des inégalités diverses.

Nous laisserons de côté la plupart des relations que l'on peut former ainsi entre quatre nombres, et nous ne nous attacherons qu'aux égalités où la somme, la différence, le produit, le quotient de deux termes sont égaux respectivement à la somme, à la différence, au produit et au quotient de deux autres termes, car elles renferment toutes les autres.

Cette étude constitue la théorie des *Proportions*.

II

PROPORTIONS.

1° GÉNÉRALITÉS.

267. Quand la somme de deux nombres est égale à la somme de deux autres nombres, les quatre nombres forment une *équisomme* :

$$6+11=8+9=17.$$

Quand la différence de deux nombres est égale à la différence de deux autres nombres, les quatre nombres forment une *équidifférence* :

$$8\times 6=11\times 9=2.$$

Quand le produit de deux nombres est égal au produit de deux autres nombres, les quatre nombres forment un *équiproduit* :

$$6\times 8=12\times 4=48.$$

Quand le quotient de deux nombres est égal au quotient de deux autres nombres, les quatre nombres forment un *équiquotient:*

$$\frac{8}{4}=\frac{12}{6}=2.$$

268. Quatre nombres ainsi combinés forment une *proportion.*

Le 1[er] et le 4[e] terme d'une proportion s'appellent *extrêmes*, le 2[e] et le 3[e] *moyens* ;

Le 1[er] et le 3[e] terme sont dits *antécédents*, le 2[e] et le 4[e] *conséquents*.

Dans une équidifférence, la différence commune aux deux membres s'appelle *codifférence* ; 2 est la codifférence de $8-6=11-9$.

Dans un équiquotient, le quotient commun aux deux nombres s'appelle *rapport*, 2 est le rapport de $\frac{8}{4}=\frac{12}{6}$; 7 serait le rapport de $\frac{63}{9}=\frac{21}{3}$.

269. *On peut renverser les deux membres d'une proportion sans que la proportion soit modifiée* :

Il est évident que les proportions :

$$6+11=8+9,\quad 8-6=11-9,\quad 6\times 8=12\times 4,\quad \frac{8}{4}=\frac{12}{6}.$$

Sont les mêmes que les proportions :

$$8+9=6+11,\quad 11-9=8-6,\quad 12\times 4=6\times 8,\quad \frac{12}{6}=\frac{8}{4}.$$

270. *On peut renverser les deux termes de chaque membre, dans une équisomme et dans un équiproduit, sans que la proportion soit changée.*

Il est évident que les proportions :

$$6+11=8+9,\ \text{et}\ 6\times 8=12\times 4$$

Sont les mêmes que les proportions :

$$11+6=9+8,\ \text{et}\ 8\times 6=4\times 12.$$

271. Mais *si l'on renverse les deux termes de chaque membre d'une équidifférence, il y a une nouvelle proportion. La codifférence, si elle était positive, devient négative; et réciproquement.*

Il est évident que, dans ce cas, la proportion $8-6=11-9$ dont la codifférence est $+2$ se transforme en $6-8=9-11$, proportion nouvelle, dont la codifférence est -2.

272. *Si l'on renverse les deux termes de chaque membre dans un équiquotient, il y a une nouvelle proportion. Le rapport, s'il était un nombre entier, devient une fraction; et réciproquement.*

Il est évident que, quand on renverse les deux termes de chaque membre de l'équiquotient $\frac{8}{4}=\frac{12}{6}$, dont le rapport est 2, le nouvel équiquotient $\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$ a pour raison $\frac{1}{2}$ car si 8 est égal à 2 fois 4, 12 à 2 fois 6, réciproquement 4 sera $\frac{1}{2}$ de 8, 6 sera $\frac{1}{2}$ de 12.

273. Mais *si l'on renverse les deux termes de l'un des membres d'une équidifférence ou d'un équiquotient sans renverser les deux termes de l'autre membre, il n'y a plus de proportion*, car une codifférence positive ne peut être égale à une codifférence négative, et un rapport plus grand que 1 ne peut être égal à un rapport qui est plus petit que 1, c'est-à-dire à une fraction.

Remarquons que l'on peut renverser les deux termes d'une équisomme et d'un équiproduit sans renverser les deux termes de l'autre membre, et néanmoins ne pas changer la proportion.

274. Maintenant, faisons passer l'un des termes d'un membre dans l'autre membre, conformément à ce que nous avons établi (**261**).

1° Dans l'équisomme $6+11=8+9$, chassons 6 dans le second membre.

Nous aurons $(6+11)-6=(8+9)-6$.

qui équivaut à $11+6-6=(8+9)-6$.

et enfin à $11=(8+9)-6$.

On verrait de même que $6=(8+9)-11$, $8=(6+11)-9$, $9=(6+11)-8$.

D'où : *l'un des termes d'une équisomme est égal à la somme des termes de l'autre membre diminuée de l'autre terme.*

Donc si l'égalité se transforme en une équation correspondante où l'un des termes est inconnu on déterminera ce terme à l'aide des trois autres.

Dans l'équation $12+x=27+3$,

$x=(27+3)-12=18$.

2° Dans l'équiproduit $6\times 8=12\times 4$, faisons passer 6 dans le second membre :

Nous aurons $\frac{6\times 8}{6}=\frac{12\times 4}{6}$,

qui équivaut à $8\times\frac{6}{6}=\frac{12\times 4}{6}$,

et à........ $8\times 1=\frac{12\times 4}{6}$,

Et enfin à... $8...=\frac{12\times 4}{6}$.

On verrait de même que $6 = \frac{12 \times 4}{8}$, $12 = \frac{6 \times 8}{4}$, $4 = \frac{6 \times 8}{12}$.

D'où : *l'un des termes d'un membre d'un équiproduit est égal au quotient de l'autre membre divisé par l'autre terme.*

Donc si l'égalité est remplacée par une équation où l'un quelconque des termes est inconnu, on déterminera ce terme à l'aide des trois autres.

Ainsi dans l'équation $48 \times 4 = x \times 12$,

$$x = \frac{48 \times 4}{12} = 16.$$

275. Il n'en sera plus ainsi, si nous voulons traiter, dans les mêmes conditions, une équidifférence et un équiquotient.

1° Dans une équidifférence nous ferons à la vérité passer le plus petit des termes de chaque membre dans l'autre, sans difficulté.

$$8 - 6 = 11 - 9, \quad (8 - 6) + 6 = (11 - 9) + 6, \quad 8 = (11 - 9) + 6.$$

Mais, quand il s'agira du plus grand terme, nous arriverons à une égalité dont le terme isolé sera négatif.

$$8 - 6 - 8 = 11 - 9 - 8, \text{ d'où } - 6 = 11 - 17.$$

2° De même dans un équiquotient, lorsqu'on isolera le plus petit des deux termes d'un membre, ce terme isolé se transformera en fraction.

Dans l'équation $\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$ si nous isolons 6, il vient :

$$\frac{12}{6 \times 12} = \frac{8}{4 \times 12}, \text{ d'où : } \frac{1}{6} = \frac{8}{48}.$$

On voit que, de part et d'autre, les proportions persistent ; mais ce n'est plus la valeur positive de 6 que l'on obtient dans l'équidifférence, ni la valeur de 6 unités dans l'équiquotient ; et, en supposant que les proportions se transforment en équations, on ne peut plus obtenir la valeur du plus petit terme à l'aide des trois autres, car ce petit terme est modifié.

On parviendra au résultat cherché à l'aide des considérations suivantes :

276. 1° *Dans toute équidifférence, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens* ; car, si dans l'équidifférence $8 - 6 = 11 - 9$, on fait passer chaque conséquent, ou nombre à soustraire, dans l'autre membre, il vient $8 + 9 = 11 + 6$.

D'où l'on conclut que *les quatre nombres d'une équidifférence peuvent toujours former une équisomme* ; et dès lors, au lieu de tirer la valeur d'un petit terme d'une équidifférence où ce petit terme devient négatif, on le tire de l'équisomme correspondante où il reste positif.

En effet $6 = (8 + 9) - 11$.

(Nota) Par la même raison : *les quatre termes d'une équisomme peuvent toujours former une équidifférence.* Pour s'en convaincre, il suffira de faire passer chaque conséquent de l'équisomme dans l'autre membre.

277. *Dans tout équiquotient, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Car si, dans l'équiquotient $\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$ on fait passer chaque conséquent (ou diviseur) dans l'autre membre, il vient $12 \times 4 = 8 \times 6$.

D'où l'on conclut que *les quatre nombres d'un équiquotient peuvent toujours former un équiproduit.*

Dès lors, au lieu de tirer la valeur du petit terme dans l'équiquotient où ce petit terme se transforme en fraction, on la tire de l'équiproduit correspondant où il demeure entier.

En effet $6 = \frac{12 \times 4}{8}$.

Nota.— Par la même raison : *les quatre termes d'un équiproduit peuvent toujours former un équiquotient.*

Pour s'en convaincre, il suffira de faire passer chaque conséquent d'un membre de l'équiproduit dans l'autre.

278. *Lors donc que quatre nombres a, b, c, d, pourront former deux à deux une des égalités suivantes, ils constitueront une proportion.*

1°	$a+b=c+d$	2°	$a\times b=c\times d.$
	$a-b=c-d$		$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$
	$b+a=d+c$		$b\times a=d\times c.$
	$b-a=d-c$		$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$

Nota. — Il est évident que, de l'une quelconque des égalités de chaque série (1° et 2°) on peut déduire les trois autres ; en sorte que si quatre nombres ne peuvent former une seule des égalités précédentes ils ne pourront reproduire aucune des trois autres, et ne formeront pas une proportion.

2° ÉQUIDIFFÉRENCES.

279. Examinons maintenant quels sont les changements que l'on introduit dans une équidifférence quand on soumet ses termes à différentes opérations.

280. *On ne change pas une équidifférence :*

1° *Quand on ajoute un même nombre à chaque terme*:

En effet, si l'on augmente de 1, 2, 3, etc., unités l'équidifférence $8-5=6-3$, on formera autant d'équidifférences nouvelles $9-6=7-4$, $10-7=8-5$, etc., qui auront toujours la même codifférence, car, dans chaque membre, on ajoute d'un côté ce que l'on retranche de l'autre.

Remarquons que le nombre des équidifférences ainsi formées n'a pas de limite.

2° *Quand on retranche un même nombre de chaque terme :*

Cela résulte du principe précédent. Mais il faut remarquer ici que quand l'un des termes est réduit à zéro, l'équidifférence se réduit à trois termes.

$$7-4=5-2,\quad 6-3=4-1,\quad 5-2=3-0.$$

281. Cette dernière expression équivaut à $3=5-2$, qui n'est plus une proportion.

Or ce fait se reproduira toujours quand on retranchera de chaque terme de l'équidifférence un nombre égal au plus petit des termes; car nous aurions pu passer immédiatement de l'équidifférence primitive $8-5=6-3$ à la relation $5-2=3$ en retranchant 3 de chaque terme.

Le deuxième principe n'est donc vrai que quand on retranche de chaque terme un nombre plus faible que le plus petit des termes (le plus petit des termes pouvant excéder le nombre d'une fraction aussi faible qu'on le voudra) (*).

282. *On change une équidifférence quand on multiplie ou divise tous ses termes par un nombre autre que l'unité, mais le résultat donne une nouvelle équidifférence.*

Si nous multiplions chaque terme de l'équidifférence $5 - 2 = 11 - 8$ par un nombre quelconque, 7 par exemple, il vient $5 \times 7 - 2 \times 7 = 11 \times 7 - 8 \times 7$, ce qui revient à multiplier la codifférence par 7; on obtiendra donc la nouvelle équidifférence $35 - 14 = 77 - 56$, où la codifférence primitive 3 se trouve multipliée par 7 et devient 21.

On démontrerait de même que la division de tous les termes d'une équidifférence par un même nombre donne une nouvelle équidifférence; cela résulte du théorème **152** qui peut s'énoncer d'une manière générale ainsi qu'il suit:

Quand un nombre *multiplie ou divise* deux autres nombres, il *multiplie ou divise* leur somme et leur différence.

283. *On détruit une équidifférence quand on élève tous ses termes à la même puissance ou quand on en extrait la même racine.*

Si nous élevons au carré tous les termes de l'équidifférence $5 - 2 = 11 - 8$, il vient $5 \times 5 - 2 \times 2$ pour le 1er membre et $11 \times 11 - 8 \times 8$ pour le second. Il est évident que l'égalité entre les deux membres est détruite, car le premier membre est ostensiblement plus petit que le second. Chaque terme y est multiplié par un nombre différent, et ne peut, par conséquent, donner le même résultat que la multiplication de tous les termes par un même nombre.

Il en sera de même si nous extrayons la racine de chaque terme.

3° ÉQUIQUOTIENTS.

284. *On détruit un équiquotient quand on augmente ou diminue chacun de ses termes d'un même nombre.*

Si nous ajoutons à chaque terme de l'équiquotient $\frac{18}{6} = \frac{21}{7}$ un même

(*) Si l'on voulait pousser les soustractions au delà de cette limite, c'est-à-dire, si l'on voulait retrancher des nombres de plus en plus forts, que le plus petit des termes, on obtiendrait successivement :

(A) $4 - 1 = 2 - (-1)$, expression qui équivaut à $4 - 1 = 2 + 1$, car une quantité doublement négative, $-(-1)$, est évidemment positive, puisque retrancher une quantité négative fournit le résultat que l'on obtiendrait en ajoutant cette même quantité. En d'autres termes, supprimer une dette c'est acquérir une somme équivalente à cette dette; et dans un autre ordre d'idées encore, *deux négations valent une affirmation*.

(B) $3 - 0 = 1 - (-2)$, soit $3 = 1 + 2$.

(C) $2 - (-1) = 0 - (-3)$, soit $2 + 1 = 3$.

(D) $1 - (-2) = -1 - (-4)$, soit $1 + 2 = -1 + 4$, ou encore $1 + 2 = 4 - 1$.

(E) $0 - (-3) = -2 - (-5)$, soit $3 = -2 + 5$, ou encore $3 = 5 - 2$.

(F) $-1 - (-4 = -3 - (-6)$, soit $-1 + 4 = -3 + 6$, ou encore $4 - 1 = 6 - 3$.

Dès lors toutes les expressions suivantes $5 - 2 = 7 - 4$, $6 - 3 = 8 - 5$, etc., nous ramènent à la série indéfinie d'équidifférences que l'on forme en ajoutant 1, 2, 3, etc., à chaque terme.

Ces études donnent lieu à des constatations curieuses dont nous laisserons à la sagacité du lecteur le soin de tirer les conséquences. Nous nous contenterons de signaler que les remarques faites à propos de l'expression (A) attestent qu'une même logique préside aux opérations de l'entendement humain dans les ordres d'idées qui semblent au premier abord les plus disparates, c'est-à-dire que toutes les les spéculations de l'esprit humain ne constituent au fond qu'une seule et même science.

Les expressions de B à F nous donnent une première idée du rôle que jouent les quantités négatives dans les procédés analytiques de l'Algèbre.

nombre 5; il vient pour le 1er membre $\frac{18+5}{6+5}$, et pour le 2e $\frac{21+5}{7+5}$; or ces deux nouvelles quotités ne sont plus égales.

Pour le constater, établissons que la différence entre $\frac{18}{6}$ et $\frac{18+5}{7+5}$ n'est pas égale à la différence entre $\frac{21}{7}$ et $\frac{21+5}{7+5}$ (**205**).

1° Réduisant au même dénominateur $\frac{18}{6}$ et $\frac{18+5}{6+5}$ il vient :

$\frac{18\times 6+18\times 5}{6\times 6+6\times 5}$ et $\frac{18\times 6+6\times 5}{6\times 6+6\times 5}$ dont la différence est $18\times 5 - 6\times 5 = 12\times 5$;

2° Réduisant au même dénominateur $\frac{21}{7}$ et $\frac{21+5}{7+5}$ il vient :

$\frac{21\times 7+21\times 5}{7\times 7+7\times 5}$ et $\frac{21\times 7+7\times 5}{7\times 7+7\times 5}$ dont la différence est $21\times 5 - 7\times 5 = 14\times 5$.

Il résulte de là que $\frac{21+5}{7+5}$ est plus grand que $\frac{18+5}{6+5}$ de 2×5; il n'y a donc plus d'égalité entre ces deux quotités.

On démontrerait de même que $\frac{21-5}{7-5}$ n'est pas égal à $\frac{18-5}{6-5}$.

285. *On ne change pas un équiquotient quand on multiplie ou divise chacun de ses termes par un même nombre.*

Car chaque membre de l'équiquotient étant une quotité, on ne change pas une quotité quand on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre.

286. *On obtient un nouvel équiquotient lorsqu'on élève chacun des termes d'un équiquotient à une même puissance, ou lorsque l'on en extrait la même racine.*

En effet, la quotité $\frac{21}{7}$, quand on l'élève au carré, a pour quotient le carré du quotient primitif $\frac{21^2}{7^2} = 3^2$. Or, comme dans le nouvel équiquotient, le quotient est le même de part et d'autre, le rapport est toujours égal entre les deux quotités.

$\frac{21^2}{7^2} = 3^2$, car, $\frac{21^2}{7^2} = \frac{21}{7} \times \frac{21}{7} = 3\times 3$; de même $\frac{18^2}{6^2} = 3^2$.

On reconnaîtra de même que $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$, car en élevant chaque terme au carré, il vient $\frac{21}{7} = \frac{18}{6} = 3$.

4° RELATIONS GÉNÉRALES DES PROPORTIONS.

287. En résumé :

1° On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux quatre termes

d'une équidifférence; 2° multiplier ou diviser par un même nombre quatre termes d'un équiquotient, sans modifier les proportions.

On obtient de nouvelles proportions : 1° quand on multiplie ou divise les quatre termes d'une équidifférence par un même nombre; 2° quand on élève les quatre termes d'un équiquotient à la même puissance, ou quand on en extrait la même racine.

On détruit les proportions: 1° quand on ajoute ou retranche un même nombre aux quatre termes d'un équiquotient; 2° quand on prend la même puissance ou la même racine des quatre termes d'une équidifférence.

288. *On obtient de nouvelles proportions quand on additionne ou soustrait, terme à terme, deux ou plusieurs équidifférences, et quand on multiplie terme à terme deux ou plusieurs équiquotients.*

Dans le 1er cas, la codifférence de l'équidifférence nouvelle se compose, comme il est facile de le constater, de la somme ou de la différence des autres codifférences.

Dans le 2e cas, le rapport de l'équiquotient nouveau se compose, comme il est facile de le constater, de la somme ou de la différence des autres rapports.

289. *Il n'y a plus de proportion quand on multiplie ou divise terme à terme plusieurs équidifférences, ou quand on ajoute ou retranche terme à terme deux ou plusieurs équiquotients.*

5° PROPRIÉTÉS EXCLUSIVES AUX ÉQUIQUOTIENTS.

290. On obtient un nouvel équiquotient en augmentant ou en diminuant, dans chaque membre, le numérateur de son dénominateur.

Il est clair que la valeur de chaque quotité est augmentée ou diminuée d'une unité et que l'égalité n'est pas troublée.

On peut, par la même raison, augmenter ou diminuer chaque numérateur de deux ou plusieurs fois le dénominateur correspondant, à la condition que cela se fasse autant de fois de part et d'autre.

Nous dirons donc que $\frac{21}{7}=\frac{18}{6}$ donne $\frac{21\pm7}{7}=\frac{18\pm6}{6}$.

Et $$\frac{21\pm n\times6}{7}=\frac{18\pm n\times6}{6}.$$

n étant un nombre quelconque, le même de part et d'autre.

291. L'équiquotient $\frac{21}{7}=\frac{18}{6}$ donnant lieu à quatre équiquotients (**278**) qui sont

$$1^\circ\ \frac{21}{7}=\frac{18}{6},\quad 2^\circ\ \frac{7}{21}=\frac{6}{18},\quad 3^\circ\ \frac{21}{18}=\frac{7}{6},\quad 4^\circ\ \frac{18}{21}=\frac{6}{7}.$$

Les équiquotients 1° et 2° donneront, d'après le principe précédent :

$$\frac{21\pm7}{7}=\frac{18\pm6}{6},\ \text{et}\ \frac{7\pm21}{21}=\frac{6\pm18}{18}.$$

D'où, *la somme ou la différence des deux premiers termes, mise en fraction sur le premier ou le second terme, est égale à la somme ou à la différence des deux derniers termes, en fraction sur le troisième ou le quatrième terme.*

Les équiquotients 3e et 4e donneront :

$$\frac{21 \pm 18}{18} = \frac{7 \pm 6}{6} \text{ et } \frac{18 \pm 21}{21} = \frac{6 \pm 7}{7}.$$

D'où, *la somme ou la différence des deux antécédents, en fraction sur le premier ou le second antécédent, est égale à la somme ou à la différence des conséquents, en fraction sur le premier ou le deuxième conséquent.*

Les équiquotients $\frac{12 \pm 7}{7} = \frac{18 \pm 6}{6}$ et $\frac{7 \pm 21}{21} = \frac{6 \pm 18}{18}$ donneront $\frac{21 \pm 7}{18 \pm 6} = \frac{7}{6}$ et $\frac{7 \pm 21}{6 \pm 18} = \frac{21}{18}$.

D'où, *la somme ou la différence des deux premiers termes d'un équiquotient mise en fraction sur la somme ou la différence des deux derniers termes, est égale au 2e terme en fraction sur le 4e, ou au 1er terme en fraction sur le 3e.*

Les équiquotients $\frac{21 \pm 18}{18} = \frac{7 \pm 6}{6}$ et $\frac{18 \pm 21}{21} = \frac{6 \pm 7}{7}$ donneront : $\frac{21 \pm 18}{7 \pm 6} = \frac{18}{6}$ et $\frac{18 \pm 21}{6 \pm 7} = \frac{21}{7}$.

D'où *la somme et la différence des deux antécédents d'un équiquotient, en fraction sur la somme ou la différence des conséquents, est égale à un antécédent quelconque, en fraction sur son conséquent.*

On tire encore de ce qui précède $\left(\frac{21 \pm 18}{7 \pm 6} = \frac{18}{6}\right)$, $\frac{21+18}{7+6} = \frac{18}{6}$ et $\frac{21-18}{7-6} = \frac{18}{6}$; d'où $\frac{21+18}{7+6} = \frac{21-18}{7-6}$ et $\frac{21+18}{21-18} = \frac{7+6}{7-6}$.

D'où, *la somme des antécédents, en fraction sur leur différence, est égale à la somme des conséquents, en fraction sur leur différence.*

1° PROPORTIONS CONTINUES.

§ 1. *Équidifférences continues.*

292. Toute équisomme dans laquelle les deux parties d'une même somme sont égales forme une *équidifférence continue*, où l'on place les deux termes semblables au rang des moyens.

L'équisomme $7 + 7 = 8 + 6$ donne en effet l'équidifférence $8 - 7 = 7 - 6$.

Le terme qui figure deux fois dans une proportion s'appelle *moyen proportionnel.*

293. *Dans une équidifférence continue, la somme des extrêmes est égale au double du moyen.*

Il est évident que $7 = \frac{8+6}{2}$.

294. Entre deux nombres quelconques, on peut donc toujours insérer un moyen proportionnel, et, par conséquent, former avec ces deux nombres une équidifférence ou proportion continue.

Soient les nombres 14 et 39, le moyen, étant la moitié de la somme des extrêmes, sera $\frac{14+39}{2} = 26,5$, et l'on aura l'équidifférence $39 - 26,5 = 26,5 - 14$.

§ 2. *Équiquotients continus.*

295. Tout équiproduit dans lequel les deux facteurs d'un même produit sont égaux forme un *équiquotient continu* où l'on place les deux termes semblables au rang des moyens.

L'équiproduit $8 \times 8 = 4 \times 16$ donne en effet l'équidifférence $\frac{4}{8} = \frac{8}{16}$.

296. Dans un équiquotient continu, le produit des extrêmes est égal au carré du moyen : $4 \times 16 = 8^2$. Le moyen est, en conséquence, égal à la racine carrée du produit des extrêmes $8 = \sqrt{4 \times 16}$.

297. Entre deux nombres quelconques, on peut donc toujours insérer un moyen proportionnel, puisqu'il suffit de prendre la racine carrée de leur produit. Il en résulte qu'avec deux nombres quelconques on peut toujours former un équiquotient continu.

Soient les nombres 9 et 16, le moyen sera $\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$ et l'équiquotient continu sera $\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$, dont le rapport est $\frac{3}{4}$.

Quand le produit des nombres n'est pas un carré parfait, on n'obtient le moyen que par approximation.

---

298. Nous n'avons employé que des nombres entiers comme termes de nos proportions ; mais tout ce que nous en avons dit s'applique aux quotités en général, que leur valeur soit entière, fractionnaire, ou fraction.

Quoique l'usage semble avoir prévalu en France, et surtout dans l'Enseignement, de noter les proportions ainsi que nous l'avons fait, nous devons indiquer les anciennes notations.

L'équidifférence $a - b = c - d$ se notait $a.\ b : c.\ d$.

L'équiquotient $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se notait $a : b :: c : d$.

Et on énonçait indifféremment l'une et l'autre notation : *a* est à *b* comme *c* est à *d*.

III

PROGRESSIONS.

1° GÉNÉRALITÉS.

299. On peut établir des variétés infinie de relations quand on fait entrer, dans chacun des deux membres d'une égalité, un nombre quelconque de termes; mais les plus simples, et celles dont on a tiré le meilleur parti possible, sont des égalités où l'on admet que le premier membré est formé d'un même nombre répété à l'infini, et que le deuxième membre se compose des sommes, des différences, des produits et des quotients de deux, trois, quatre, etc., termes du premier membre.

La numération n'est pas autre chose qu'une égalité de ce genre, dans laquelle le premier membre se compose du terme 1 répété à l'infini, et dont les sommes sont successivement indiquées par le deuxième membre.

$$1,\quad 1+1,\quad 1+1+1, \text{ etc.}\ldots = 1, 2, 3, \text{ etc.}\ldots$$

300. Lorsque l'on prend un autre nombre que l'unité, 3 par exemple, on a.

$$3,\quad 3+3,\quad 3+3+3\ldots \text{ etc.}, = 3, 6, 9\ldots \text{ etc.}$$

Si nous supprimons le 1er membre, le second considéré isolément constitue une *progression par différence* parce que tous les termes y *progressent* régulièrement et que chacun d'eux *diffère* de celui qui le précède ou de celui qui le suit d'une quantité constante.

Cette quantité constante est appelée *raison arithmétique*; mais nous l'appellerons *codifférence*, parce que deux termes consécutifs quelconques forment avec deux autres termes consécutifs quelcouques une équidifférence.

301. Si dans l'égalité du § **300**, au lieu de prendre le même nombre comme partie indéfinie de sommes successives, nous le prenons comme facteur indéfini de produits successifs, il vient.

$$3,\quad 3\times 3,\quad 3\times 3\times 3\ldots \text{ etc.} = 3, 9, 27\ldots \text{ etc.}$$

Et le second membre de cette égalité, forme une *progression par quotient* parce que tous les termes y *progressent* régulièrement, et que le *quotient* de deux nombres consécutifs quelconques y est toujours le même. Ce quotient constant, nous l'appelerons *rapport* ou, d'après l'usage, *raison*, avec presque tous les mathématiciens.

Deux termes consécutifs d'une progression par quotient forment en effet, avec les deux autres termes consécutifs de la même progression, un équiquotient.

2° PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE.

302. La progression par différence est donc une suite de termes tels, que chacun diffère du précédent et du suivant d'une même quantité ou codifférence ÷ 1. 5. 9. 13. 17... est une progression par différence et s'énonce : 1 est à 5 comme 5 est à 9 comme 9 est à 13, etc., la codifférence de cette progression est 4.

303. Quand on connaît la codifférence et l'un des termes d'une progression on peut déterminer tous les autres ; il suffit, en effet, d'augmenter ou de diminuer ce terme de la codifférence pour obtenir le terme précédent ou le terme suivant, et on opère sur ce nouveau terme comme sur le premier.

304. Une progression par différence peut être *croissante* ou *décroissante*, c'est-à-dire que les termes deviennent de plus en plus grands ou de plus en plus petits ÷ 17. 13. 9. 5... est une progression décroissante ; ÷ 1. 5. 9. 13. 17... est une progression croissante.

305. Dans une progression croissante, un terme quelconque est égal au premier terme, plus autant de fois la codifférence qu'il y a de termes avant ce terme quelconque.
Le 6ᵉ terme de notre progression sera donc : $1+(5\times 4)=21$.
Le 20ᵉ terme sera $1+(19\times 4)=77$.

306. Dans une progression décroissante, un terme quelconque est égal au premier terme, moins autant de fois la codifférence qu'il y a de termes avant ce terme quelconque.
Le 15ᵉ terme de la progression décroissante ÷ 77. 73. 69... sera donc égal à $77-(14\times 4)=21$ qui correspond au 6ᵉ terme de la progression croissante.

307. Toute progression décroissante peut donc être représentée par une progression croissante composée des mêmes termes écrits dans un ordre inverse, et la somme des termes est évidemment la même dans les deux progressions.

308. Or, si l'on écrit les deux progressions, le premier terme de l'une étant sous le premier terme de l'autre :

÷ 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29.
÷ 29. 25. 21. 17. 13. 9. 5. 1.

La somme de deux termes correspondants quelconques est *constante ;* c'est-à-dire qu'elle est toujours la même, et toujours égale à la somme du premier et du dernier terme de chaque progression.

$$29+1=30,\quad 25+5=30,\quad 21+9=30\ldots,\ \text{etc.}$$

Car le deuxième terme 25 de la progression décroissante est égal au premier terme 29 moins la codifférence, et le deuxième terme de la progression croissante est égal au premier plus la codifférence ; or cette codifférence étant ajoutée et supprimée de part et d'autre, il reste la somme des deux premiers termes $1+29$.

309. Il résulte de ces considérations, que la somme totale des termes des deux progressions est égale à la somme de leurs premiers termes (ou du premier et du dernier terme d'une des deux progressions) répétée autant de

fois qu'il y a de termes dans une des deux progressions. Elle sera donc ici : $(29 + 1) \times 8 = 240$.

Cette somme sera double de la somme des termes d'une seule progression, d'où l'on conclut que :

310. *La somme des termes d'une progression par différence est égale à la moitié de la somme de son premier et de son dernier terme multipliée par le nombre des termes.*

La somme d'une des progressions ci-dessus qui comprend 8 termes, et dont les termes extrêmes sont 1 et 29, sera donc $\frac{(1 + 29) \times 8}{2} = \frac{240}{2} = 120$.

311. On appelle *moyens différentiels* tous les termes intermédiaires entre les termes extrêmes.

312. *Si l'on connaît deux termes quelconques d'une progression par différence et le nombre des moyens compris entre ces deux termes, on peut déterminer la codifférence.*

Quand le nombre des moyens est zéro, les deux termes sont consécutifs, la codifférence est simplement la différence des deux termes.

Si le nombre des moyens est 1, 2, 3..., etc., la codifférence sera égale à la différence des deux termes divisée par 2, 3, 4... etc., et en général par un nombre égal à celui des moyens plus un.

313. *Entre deux termes consécutifs quelconques d'une progression par différence, on peut insérer un nombre de moyens quelconque.*

Car ces deux termes seront les extrêmes d'une nouvelle progression dont on connaît le premier et le dernier terme, ainsi que le nombre des moyens différentiels. Il sera facile, conformément à ce qui précède, de déterminer la codifférence de la nouvelle progression, et, par suite, cette progression.

1° Soit à insérer 3 moyens entre 17 et 21.

La codifférence sera $\frac{21 - 17}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

La nouvelle progression est évidemment $\div$ 17. 18. 19. 20. 21.

2° Soit à insérer 2 moyens entre 9 et 13.

La codifférence est $\frac{13 - 9}{3} = \frac{4}{3}$.

La nouvelle progression sera $\div\ 9.\ 10 + \frac{1}{3}.\ 11 + \frac{2}{3}.\ 13.$

Soit $\div\ \frac{27}{3}.\ \frac{31}{3}.\ \frac{35}{3}.\ \frac{39}{3}.$

Nota. — Deux nombres quelconques pouvant être considérés comme termes consécutifs d'une progression dont la codifférence est égale à la différence de ces deux nombres; on pourra toujours avec deux nombres quelconques, pris pour extrêmes, former une progression par différence dans laquelle on fera entrer autant de moyens différentiels que l'on voudra.

2° PROGRESSIONS PAR QUOTIENT.

314. Une progression par quotient est une suite de termes croissants, ou décroissants, tels que le rapport par quotient de deux termes consécutifs quelconques est constant.

$\div\!\div$ 2 : 6 : 18 : 54 : 162... est une progression par quotient croissante.
$\div\!\div$ 162 : 54 : 18 : 6 : 2... est une progression par quotient décroissante.

On les énonce, comme la progression par différence, 2 est à 6, comme 6 est à 18... etc., 162 est à 54, comme 54 est à 18...., etc.

La 2e est la progression inverse de la 1re.

Les rapports constants : 3 de la 1re, $\frac{1}{3}$ de la 2e, s'appellent *raison* de la progression.

La raison de la progression décroissante, inverse d'une progression croissante, est égale à la raison de celle-ci en fraction sous l'unité.

315. Un terme quelconque d'une progression par quotient est égal au premier terme multiplié par la raison élevée à une puissance dont l'exposant est égal au nombre des termes précédents.

En effet : $162 = 2 \times 3^4 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ dans la progression croissante.

$6 = 162 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$ dans la progression décroissante, car multiplier 162 par $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ revient à diviser 162 par 3^3 : $162 \times \frac{1^3}{3^3} = \frac{162 \times 1}{3^3} = \frac{162}{27}$.

316. Quand on écrit une progression croissante sur la progression décroissante correspondante, terme sur terme.

$$\div\!\div\ 2 : \ 6 : \ 18 : 54 : 162.$$
$$\div\!\div\ 162 : 54 : 18 : 6 : \ 2.$$

on constate que les produits de chacun des termes d'en haut par le terme correspondant d'en bas est constant, et toujours égal au produit des extrêmes de chaque progression.

Car dans la progression croissante le deuxième terme est égal au premier multiplié par la raison.

Et, dans la progression décroissante, le deuxième terme est égal au premier divisé par la raison.

D'où le produit du deuxième terme multiplié par la raison par l'autre deuxième terme divisé par la raison est égal au produit du premier terme d'en haut par le premier terme d'en bas, ou, ce qui revient au même, au produit des extrêmes.

Quand la progression a un nombre impair de termes, le carré du terme du milieu (ici ce terme est 18) est egal au produit des extrêmes.

Ceci revient à dire que, dans une progression par quotient, le produit de deux termes également éloignés des extrêmes est égal au produit des extrêmes.

317. Il résulte de ces considérations que le produit total des termes des deux progressions est égal au produit des extrêmes de l'une d'elles, élevé à une puissance dont l'exposant est égal au nombre des termes de la progression.

Ce produit sera donc ici $(162 \times 2)^5$.

On conclut de là que :

318. *Le produit des termes d'une progression par quotient est égal à la racine carrée du produit des extrêmes élevé à une puissance qui a pour exposant le nombre des termes.*

Ce produit sera donc ici $\sqrt{(162 \times 2)^5}$, ou ce qui revient au même : $\sqrt{162^5 \times 2^5}$.

319. La somme des termes d'une progression par quotient est facile à déterminer quand on décompose chaque terme de manière à lui donner pour équivalent le terme précédent multiplié par la raison.

Ici la progression $\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162\ldots$ peut s'écrire : $\div 2 : 2 \times 3 : 6 \times 3 : 18 \times 3 : 54 \times 3$.

Et la somme de ces termes sera $2 + (2 + 6 + 18 + 54) \times 3$.

Or si l'on supprime le premier terme, on aura.

$$(2 + 6 + 18 + 54) \times 3 = (2 + 6 + 18 + 54 + 162) - 2.$$
$$= (2 + 6 + 18 + 54 + 162) \times 3 - 162 \times 3.$$

D'où, la somme, moins le premier terme, est égale à la somme de tous les termes multipliée par la raison, moins le dernier terme multiplié par la raison.

Appelant x la somme, on pourra écrire $x - 2 = 3x - 162 \times 3$.

Ajoutons à chaque membre de cette égalité 162×3, il vient l'égalité nouvelle $x - 2 + (162 \times 3) = 3x$.

Retranchons de part et d'autre x, il vient $(162 \times 3) - 2 = (3 - 1)x$.

D'où la somme $x = \dfrac{(162 \times 3) - 2}{3 - 1}$, soit 242.

On conclut de là que *la somme des termes d'une progression par quotient est égale au produit du dernier terme par la raison, le tout diminué du premier terme et divisé par la raison diminuée d'une unité.*

320. *Etant donnés deux termes quelconques d'une progression par quotient et le nombre des moyens compris entre ces deux termes, on peut déterminer la raison.*

Si le nombre des moyens est zéro, les deux termes sont consécutifs et la raison n'est pas autre chose que leur rapport.

Si le nombre des moyens est 1, 2, 3... la raison sera égale à la racine 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ... et en général à une racine dont l'indice est égal au nombre des moyens plus un.

321. *Entre deux termes consécutifs quelconques d'une progression par quotient, on peut insérer un nombre de moyens quelconque.*

Car les deux termes deviennent les extrêmes d'une progression nouvelle de laquelle on connait le premier et le dernier terme, ainsi que le nombre des moyens. Il sera possible de déterminer la raison, et par suite cette nouvelle progression.

(Ceci s'applique également à deux nombres quelconques.)

Soit à insérer 9 moyens entre 2 et 2048 : on divisera 2048 par 2 et on extraira la racine 10ᵉ du résultat, soit $\sqrt[10]{\dfrac{2048}{2}} = \sqrt[10]{1024} = 2$, qui est la raison.

La progression sera donc :

$$\div\ 2 : 2 \times 2 : 2 \times 2^2 : 2 \times 2^3 \ldots : 2 \times 2^8 : 2 \times 2^9 : 2048.$$

Soit : $\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.$

On voit que cette progression reproduit la série des puissances de 2 que nous avons exposée au § **60** et la pousse jusqu'à la 11ᵉ puissance.

IV

LOGARITHMES.

1° PRÉLIMINAIRES.

322. Les *logarithmes* sont les termes d'une progression par différence qui correspondent à des termes d'une progression par quotient.

Soit 0 le premier terme d'une progression par différence dont la codifférence est 1 ;

Soit 1 le premier terme d'une progression par quotient dont la raison est R ;

Les deux progressions s'écriront :

$$\div\ 0.\quad 1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6\ldots$$
$$\div\!\div\ R^0 : R^1 : R^2 : R^3 : R^4 : R^5 : R^6\ldots$$

Et les nombres formés par 0, 1, 2, 3., etc., seront les logarithmes des nombres formés par 1, R, R^2, R^3.

323. Dans des progressions ainsi composées, on remarque que chaque terme supérieur contient autant de fois la codifférence 1 qu'il y a d'unités dans l'exposant du terme inférieur correspondant, quand ce dernier terme est exprimé par la raison élevée à une puissance quelconque.

R, qui représente un nombre quelconque, s'appelle *base* du système de logarithmes.

On peut donc dire :

Le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base pour reproduire ce nombre.

324. Cela posé, ajoutons deux logarithmes quelconques 2 + 3, par exemple, leur somme 5 sera le logarithme du nombre exprimé par R^5.

Or R^5 est égal à $R^2 \times R^3$ soit R^{2+3} (**61**).

Donc : *la somme des logarithmes de deux nombres est le logarithme du produit de ces deux nombres.*

325. Retranchons 2 de 5, il vient 3 qui correspond au nombre représenté par R^3.

Or $R^3 = \frac{R^5}{R^2}$ soit R^{5-2} (**146**).

Donc *la différence des logarithmes de deux nombres est le logarithme du quotient de ces deux nombres.*

326. Multiplions 2 par 3, il vient 6, qui correspond à R^6

Or $R^6 = (R^2)^3$ soit $R^{2\times 3}$ (**148**).

Donc *le produit du logarithme d'un nombre par le logarithme d'un autre nombre est le logarithme de la puissance du premier nombre dont le second serait l'exposant.*

327. Divisons 6 par 2, il vient 3, qui correspond à R^3.

Or $R^3 = \sqrt[6]{R^2}$ soit $R^{\frac{6}{2}}$ (**149**).

Donc *le quotient du logarithme d'un nombre par un autre nombre est le logarithme de la racine du premier nombre qui aurait le second nombre pour indice.*

328. Il résulte de ces considérations, que si une progression par différence commençant par zéro et une progression par quotient commençant par 1, comprenaient dans leurs termes la série des nombres entiers depuis 1 jusqu'à l'infini :

1° L'addition des logarithmes de deux nombres donnerait le logarithme correspondant au produit de ces deux nombres;

2° La soustraction des logarithmes de deux nombres donnerait le logarithme correspondant au quotient de ces deux nombres;

3° La multiplication des logarithmes d'un nombre par un autre nombre n, donnerait le logarithme correspondant à la $n^{ème}$ puissance du 1er nombre;

4° La division du logarithme d'un nombre par un autre nombre n, donnerait le logarithme correspondant à la $n^{ème}$ racine du 1er nombre.

Ainsi les multiplications seraient réduites à des additions de logarithmes, les divisions à des soustractions, la puissance à des multiplications, les racines à des divisions de logarithmes; et les nombres de la progression par quotient, correspondant aux logaritbmes formés par les opérations, seraient les résultats cherchés.

C'est là le problème que les tables de logarithmes ont résolu.

329. Etant données les deux progressions, l'une par différence et l'autre par quotient :

$$\div\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7\ldots$$
$$\div\!\div\ 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 : 10^7\ldots$$

on peut admettre qu'il y a un nombre considérable de moyens inséré de part et d'autre entre deux termes consécutifs dés deux progressions, de telle sorte que les termes de la progression par différence croissent par l'addition constante d'une quantité infiniment petite, et que les termes de la progression par quotient croissent également par la reproduction constante d'une raison fractionnaire très-petite (l'unité augmentée d'une fraction encore plus petite que la codifférence).

Cela posé, on choisira d'une part dans la progression par quotient les termes qui approchent le plus des nombres entiers (à un millionième près, par exemple) et on écrira simplement les nombres entiers; on notera tels quels, en regard, les termes correspondants de la progression par différence qui sont respectivement les logarithmes des nombres entiers, enfin on négligera dans les deux progressions tous les autres termes.

On arrivera, de la sorte à dresser une table comprenant les nombres entiers de 1 à l'infini.

330. Comme, d'un côté, les termes de la progression par différence comprennent une quantité considérable de décimales, on n'en garde que 5, 6 ou 7.

Comme de l'autre, les nombres entiers n'ont pas de limites, on s'arrêtera nécessairement à l'un d'eux.

Les deux tables les plus usitées, en France, sont celle de Callet, qui comprend les logarithmes des 108,000 premiers nombres avec 7 décimales, et celle de Lalande qui comprend les logarithmes des 10,000 premiers nombres poussés jusqu'à 5 décimales seulement. Cette dernière approximation est suffisante dans la pratique.

On peut suppléer, mais péniblement, à ces tables par les *canons logarithmiques* inventés par Wronski, et à l'aide des quels on peut former tous les logarithmes des nombres avec 5 décimales.

Avant d'indiquer l'emploi de ces *canons*, il faut exposer quelques généralités relatives à l'usage des logarithmes.

2° GÉNÉRALITÉS RELATIVES A L'USAGE DES LOGARITHMES.

331. Tout logarithme se compose d'une partie entière et d'une partie décimale.

La partie entière s'appelle *caractéristique* ; elle est zéro pour tous les nombres compris entre 1 et 10; elle est 1 pour tous les nombres compris entre 10 et 10^2 ; elle est 2 pour tous les nombres compris entre 10^2 et 10^3... En général, elle est égale à l'exposant de la plus petite des deux puissances consécutives de 10 entre lesquelles le nombre est compris.

Il est donc toujours facile de déterminer la caractéristique du logarithme d'un nombre entier; aussi ne l'indique-t-on presque jamais dans les tables, où figure seulement, en regard de chaque nombre, la partie décimale du logarithme.

332. La progression par quotient choisie pour dresser les tables de logarithmes montre que chaque puissance de 10 a pour logarithme l'exposant de cette puissance.

Les nombres entiers intermédiaires entre deux puissances consécutives de 10 ont donc pour logarithme un nombre entier, égal à l'exposant de la plus faible des deux puissances, suivi d'une fraction décimale.

333. *Quand un nombre est multiplié ou divisé par l'unité, suivie de un ou plusieurs zéros, il suffit d'augmenter ou de diminuer la caractéristique de son logarithme d'autant d'unités qu'il y a de zéros pour obtenir le logarithme du nombre ainsi modifié.*

Si le logarithme de 21 est 1,32222 le logarithme de 1000 fois 21 ou de 21×10^3 est $1 \times 3 + 1,32222$, soit 4,32222.

Ce qui se note de la manière suivante :

$$\text{L. } 21 = 1,32222 \quad \text{L. } (21 \times 10^3) = 4,32222.$$

$$\text{De même L. } \left(\frac{21\,000}{10^3}\right) = 4,32222 - 3 = 1,32222 = \text{L. } 21.$$

Nota. — Si l'exposant de la puissance de 10 par laquelle on divise le nombre, est plus fort que la caractéristique des logarithmes de ce nombre, on obtient un logarithme à caractéristique négative :

$$\text{L. } \left(\frac{21}{10^3}\right) = 1,32222 - 3 = -2 + 0,32222.$$

Cela revient à dire que toutes les fractions ont un logarithme à caractéristique négative ; car, dès l'instant que l'on divise un nombre par un nombre plus fort, la caractéristique de la différence entre leurs logarithmes est nécessairement négative.

$$\text{L. } \left(\frac{5}{21}\right) = 0,69897 - 1,32222 = -1 + 37675$$

car $(-1 + 37675) + (1,32222) = 0,69897$.

$$\text{L. } \left(\frac{99}{100}\right) = 1,99564 - 2 = -1 + 0,99564.$$

$$\text{L. } \left(\frac{98}{99}\right) = 0,99123 - 0,99564 = -1 + 0,99559.$$

Il résulte de ceci que tout logarithme à caractéristique négative doit être considéré comme le logarithme d'une fraction.

3° EMPLOI DES TABLES DE LOGARITHMES.

334. Les tables de logarithmes ne donnent que les logarithmes des nombres entiers jusqu'à une certaine limite.

Il s'agit donc de savoir comment on peut déterminer le logarithme d'un nombre plus grand que ceux contenus dans les tables, le logarithme d'un nombre fractionnaire, et le logarithme d'une fraction.

Quant aux nombres négatifs, ils n'ont pas de logarithmes, ce qui importe peu; ces nombres ne figurent, en dernière analyse, dans la solution d'un problème que pour indiquer que ce problème est absurde, ce que nous verrons plus loin.

335. Supposons que nous ayons entre les mains une table de logarithmes, celle de Lalande, qui contient les logarithmes des 10,000 premiers nombres entiers, et posons ce double problème :

Etant donné un nombre qui ne se trouve pas dans la table, trouver son logarithme ;

Etant donné un logarithme qui ne se trouve pas dans la table, trouver le nombre auquel il correspond.

Il est bien entendu que nous n'indiquerons pas comment on trouve le logarithme d'un nombre entier contenu dans les tables puisqu'il y figure en regard du nombre.

§ 1. 1er *Problème.*

336. *Etant donné un nombre entier plus grand que* 10,000, *trouver son logarithme.*

Soit 356746, dont il faut déterminer le logarithme à l'aide de la table de Lalande:

La caractéristique du logarithme de 356746 est 5.

Cherchons maintenant la partie décimale du logarithme.

Cette partie sera la même pour 3567,46 que pour 356746, car les logarithmes des deux nombres ne diffèrent que par leur caractéristique (**333**).

Le logarithme 3567,46 est évidemment compris entre les logarithmes de 3567 et de 3568.

Admettons (ce qui n'est pas exact, mais donne des résultats satisfaisants) que *les différences des nombres sont proportionnelles aux différences de leurs logarithmes*, on aura : 1, différence entre 3567 et 3568, est à 0,00012, différence entre leurs logarithmes 1,55230 et 1,55242, comme 0,46, différence entre 3567,46 et 3567 est à x, différence cherchée entre les logarithmes correspondants, soit:

$$\frac{1}{0,00012} = \frac{0,46}{x}, \text{ d'où } x = 0,46 \times 0,00012 = 0,0000552.$$

Cette différence, réduite à un cent millième, sera 0,00005, et il faudra l'ajouter à la partie décimale du logarithme de 3567 qui est 3.55230 pour obtenir le logarithme cherché ; soit : $0,55230 + 0,00005 = 0,55235$ partie décimale du logarithme de 3567,46; ce logarithme entier serait 3,55235 Mais ce n'est pas de 3567,46 que nous cherchons le logarithme, c'est de 356746, nombre cent fois plus fort; la caractéristique est augmentée de 2 unités et le logarithme cherché est 5,55235.

337. *Etant donné un nombre fractionnaire, trouver son logarithme.*

Nous admettrons d'abord que tout nombre fractionnaire est représenté sous

forme de quotité, c'est-à-dire, est réduit à un numérateur et à un dénominateur (**229**).

La solution de ce problème est très-simple, car, d'après la constitution même des logarithmes, on obtient le logarithme cherché en retranchant le logarithme du dénominateur de celui du numérateur.

$$L.\ \frac{6}{5} = L.6 - L.5 = 0{,}77815 - 0{,}69807 = 0{,}07918.$$

338. *Etant donnée une fraction, trouver son logarithme.*

Le dénominateur étant plus fort ici que le numérateur, il en sera de même des logarithmes correspondants, et la soustraction indiquée dans le cas précédent conduit à un logarithme, le même que celui de la fraction renversée, mais *négatif.*

En effet, si l'on prend pour logarithme de $\frac{5}{6}$ le logarithme 0,07918, ce logarithme sera la *différence à retrancher* de L. 6 pour reproduire L. 5.

En effet $- 0{,}07918 + 0{,}77815 : \ -0{,}69897$.

339. *On peut remplacer les logarithmes négatifs par d'autres où la caractéristique est seule négative*, car si l'on multipliait le numérateur par la plus petite puissance de 10 qui le rend supérieur au numérateur, on ne ferait qu'augmenter sa caractéristique d'un nombre égal à l'exposant de cette puissance de 10. La soustraction deviendrait donc possible, mais il faudrait réduire le logarithme qui en résulterait, en ramenant la caractéristique à sa valeur réelle qui sera plus petite que zéro, c'est-à-dire négative.

Dans le cas précédent, il suffira de multiplier 5 par 10^1, et, au lieu de prendre L. $\frac{5}{6}$, on prendra L. $\frac{50}{6}$,

soit $L.\ 50 - L.\ 6 = 1{,}69897 - 0{,}77815 = 0{,}92082$.

Mais 0,92082 est le logarithme d'un nombre 10 fois trop fort. Le logarithme d'un nombre 10 fois plus faible aura sa caractéristique seule diminuée d'une unité et sera $-1 + 0{,}92082$. Dans ce cas on place le signe négatif $-$ sur la caractéristique pour indiquer qu'elle est seule affectée; on obtient ainsi $\overline{1},92082$ pour L. $\frac{5}{6}$.

§ 2. IIe *Problème.*

Pour trouver, dans la table, le logarithme qui correspond à un des nombres entiers inscrits, il faut, avant tout, examiner la caractéristique du logarithme et chercher la partie décimale dans la série des logarithmes qui correspondent aux nombres composés d'autant de chiffres qu'il y a d'unités plus une dans la caractéristique.

Ces logarithmes sont faciles à trouver, car les logarithmes des nombres compris entre deux puissances consécutives de 10 vont toujours en croissant parallèlement avec ces nombres.

Ce principe établi, examinons les cas particuliers du IIe problème :

340. *Etant donné un logarithme positif qui ne se trouve pas dans la table, trouver le nombre auquel il correspond.*

Ce logarithme est, ou celui d'un nombre plus grand que ceux contenus dans la table, ou celui d'un nombre fractionnaire compris entre deux nombres entiers consécutifs de la table.

Examinons d'abord le 2e cas; c'est le plus simple, car le logarithme se trouvera compris entre deux logarithmes consécutifs de la table.

Ainsi le logarithme 3,89447 est compris entre 3,89443 et 3,89448 correspondant aux deux nombres consécutifs 7842 et 7843 qui comprennent par conséquent le nombre cherché. D'après la méthode sus-indiquée (**336**), on peut donc écrire :

$$\frac{3,89448 - 3,89443}{7843 - 7842} = \frac{3,89447 - 3,89443}{x}$$

$$\text{Soit } \frac{0,00005}{1} = \frac{0,00004}{x} \text{ d'où } x = \frac{0,00004}{0,00005} = 0,8.$$

0,8 étant la différence entre 7842 et le nombre cherché, ce nombre cherché sera donc 7842,8.

Signalons ici que la proportion ne donne des résultats satisfaisants que quand on opère sur les plus grands logarithmes de la table; or, les plus grands dans les tables de Lalande sont ceux dont la caractéristique est 3, parce que les nombres qui leur correspondent sont compris entre 1000 et 10000.

Il faut donc, lorsqu'on recherche un logarithme qui n'est pas contenu dans la table, lui donner pour caractéristique 3, quitte à multiplier ou à diviser le nombre que l'on trouve de la sorte par une puissance de 10 dont l'exposant est égal au nombre dont on a augmenté ou diminué la caractéristique.

Si le logarithme avait été 0,89447 (1er cas) il aurait fallu prendre 3,89447 qui correspond à 7842,8, mais comme on a augmenté la caractéristique de 3, il faut diviser le nombre par 10^3 ou 1000 ce qui donne pour nombre réel correspondant au logarithme 0,89447 le nombre 7,8428.

Cela posé, il est facile de déterminer le nombre correspondant à un logarithme plus grand que ceux de la table, car on réduira la caractéristique à 3 et on effectuera le déplacement de la virgule, dans le nombre trouvé, conformément à la méthode ci-dessus indiquée.

On verra, de la sorte, que L. 6,89447 correspond au nombre 7842800.

341. *Etant donné un logarithme entièrement négatif, trouver le nombre correspondant.*

Retranchons de 1 la partie décimale du logarithme, et considérons le reste comme la partie décimale d'un logarithme qui a 3 pour caractéristique, prenons le nombre correspondant, et divisons-le par une puissance de 10 dont l'exposant est égal au nombre d'unités dont on a augmenté la caractéristique.

(Ce procédé est évidemment l'inverse de celui que nous avons employé au § **338**).

Soient les logarithmes — 0,07395, — 1,07395, — 2,07395; la partie décimale commune à ces 3 logarithmes retranchée de 1 ou 1,00000 donne 0,92605 qui, augmenté de la caractéristique 3, donne pour nombre correspondant 8434,3. Réduisons ce nombre à sa valeur, on obtiendra pour les 3 logarithmes sus-indiqués les nombres correspondants 0,84343, 0,08434, 0,00843.

342. *Etant donné un nombre à caractéristique seule négative, trouver le nombre correspondant.*

Remplaçons la caractéristique par 3, cherchons le nombre correspondant au nouveau logarithme, et divisons-le par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a d'unités ajoutées à la caractéristique primitive.

Ainsi pour trouver à quels nombres appartiennent les logarithmes $\bar{1},91616$, $\bar{2},91616$, $\bar{3},91616$, on prend le nombre 8244,4 qui correspond au logarithme 3,91616. Par conséquent, les nombres correspondant aux logarithmes donnés sont 0,82444, 0,082444, 0,0082444.

Les logarithmes des tables citées n'ayant que 5 décimales dont la 5e a été

augmentée d'une unité quand la 6e qu'on a supprimée était plus grande que 5, ne sont par conséquent exacts qu'à moins d'un demi cent-millième. Or dans les tables, la plus petite différence entre deux logarithmes consécutifs dont la caractéristique est 3 étant 0,00004, une erreur de 0,00004 dans un logarithme peut en produire une égale à 1 sur le nombre correspondant, et une erreur de 0,00001 peut en produire une de $\frac{1}{4}$ ou de 0,25 sur ce nombre ; par conséquent une erreur d'un demi cent-millième dans le logarithme peut affecter le nombre correspondant d'une erreur égale à 0,125 et par suite rendre quelquefois inexact même le chiffre des dixièmes d'unité du nombre cherché. On ne peut donc compter que sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à gauche du nombre obtenu.

Quand la caractéristique n'est pas 3, il est facile de conclure, du mode d'opérer dans ce cas, qu'on ne doit compter que sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à partir du premier chiffre significatif à gauche du nombre obtenu.

343. Voici plusieurs applications des logarithmes (*).

1° Soit 147,6329 à multiplier par 58,45037. On trouve pour produit approché 8629,2.

$$\begin{aligned} L\ 147{,}6329 &= 2{,}16918 \\ L\ \ 58{,}4507 &= 1{,}76679 \\ \hline \text{somme}\quad 3{,}93597 &= L\ 8629{,}2 \end{aligned}$$

2° Soit 17954 à diviser par 12834. On trouve 1,3987 pour quotient approché jusqu'à moins d'un millième.

$$\begin{aligned} L\ 17954 &= 4{,}25416 \\ L\ 12836 &= 4{,}10843 \\ \hline \text{différence}\quad 0{,}14753 &= L\ 1{,}3987. \end{aligned}$$

3° Soit 11 à diviser par $\frac{5}{6}$. On trouve pour quotient exact 13,2. On peut remarquer que diviser 11 par $\frac{5}{6}$ revient à multiplier 11 par $\frac{6}{5}$, et qu'ainsi c'est la même chose de retrancher du logarithme de 11 celui de $\frac{5}{6}$ ou d'ajouter au logarithme de 11 celui de $\frac{6}{5}$.

$$\begin{aligned} L\ 6 &= \ \ 0{,}77815 \\ L\ 5 &= \ \ 0{,}69879 \\ \hline L\ \tfrac{5}{6} &= -0{,}07918 \\ L\ 11 &= \ \ 1{,}04139 \\ \hline \text{résultat}\ \ 1{,}12057 &= L\ 13{,}2 \end{aligned}$$

4° Soit $\frac{13}{27}$ à élever à la cinquième puissance. On trouve $L\left(\frac{13}{27}\right)^5 = -1{,}58710$.

$$\begin{aligned} L\ 27 &= \ \ 0{,}43136 \\ L\ 13 &= \ \ 0{,}11394 \\ \hline L\ \tfrac{13}{27} &= -0{,}31742 \\ 5\,L\ \tfrac{13}{27} &= -1{,}58710. \end{aligned}$$

Ajoutant 5 unités à la caractéristique, on a $5 - 1{,}58710 = 3{,}41290$ qui est le logarithme de 2587,625 ; donc, en reculant la virgule de 5 rangs vers la gauche, on aura

$$\left(\frac{13}{27}\right)^5 = 0{,}02587625.$$

(*) Ces exemples, ceux qui précèdent, et plusieurs paragraphes relatifs à l'emploi des tables de logarithmes ont été tirés du *Cours d'Arithmétique* de Mutel.

5° Soit 2,1467 à élever à la treizième puissance. On trouve $L\ (2,1467)^{13} = 4,31301$; donc $(2,1467)^{13} = 20559,5$.

$L\ 2,1467 = 0,33177$

$13\ L\ 2,1467 = 4,31301.$

6° Soit proposé d'extraire la racine cubique de $\frac{3}{5}$. On trouve

$L\ 5 = 0,69897$

$L\ 3 = 0,47712$

$L\ \frac{3}{5} = -0,22185$

$\frac{1}{3} L\ \frac{3}{5} = -0,07395.$

$L \sqrt[3]{\frac{3}{5}} = -0,07395$. Donc

$\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = 0,84343.$

On peut calculer la même expression au moyen des logarithmes à caractéristique seule négative. Car on a

$$L3 - L5 = 1 + 0,47712 - 0,69897 - 1 = 0,77815 - 1 = \bar{1},77815.$$

Pour diviser ce logarithme par 3, on le met sous la forme $-3 + 2,77815$, dont le tiers est $-1 + 0,92605 = \bar{1},92605$. Le nombre correspondant à 0,92605 est 8,4343 ; le divisant par 10, il vient 0,84343, comme ci-dessus.

7° Soit proposé de diviser par 3,6 la racine carrée de 0,29, c'est-à-dire, de calculer l'expression $x = \sqrt{\frac{0.29}{3,6}}$. On trouve

$L\ 100 = 2,00000$

$L\ 29 = 1,46240$

$L\ 0,29 = -0,53760$

$\frac{1}{2}\ L\ 0,29 = -0,26880$

$L\ 3,6 = 0,55630$

$L\ x = -0,82510.$

$L\ x = -0,82510 = 1 - 0,82510 - 1 = 0,17490 - 1$. Or 1,49589 correspond au logarithme 0,17490 ; donc $x = 0,14589$.

Si l'on veut calculer cette expression au moyen des logarithmes à caractéristique seule négative, on aura $L\ 0,29 = \bar{1},46240 = -2 + 1,46240$, dont la moitié est $-1 + 0,73120 = \bar{1},73120$; retranchant de ce logarithme celui de 3,6 qui est 0,55630, on trouve pour différence 1,17490. La partie décimale est le logarithme du nombre 1,49589, le divisant par 10 on a $x = 0,149589$, comme ci-dessus.

8° Insérer 11 moyens proportionnels entre 1 et 2 ?

D'après la règle donnée à l'article des progressions par quotient, on a $x = \sqrt[12]{2}$, d'où $L\ x = \frac{L2}{12} = 0,0250858$; donc $x = 1,059463$; ainsi la progression cherchée est

$$\div\!\div : 1,059463 : 1,122461 : 1,189207 : \ldots : 1,887740 : 2 ;$$

c'est la *génération harmonique* de Rameau, calculée avec de grandes tables. On trouve 2 chiffres de moins pour la valeur de x avec celles que nous avons citées.

344. On applique avec avantage les *compléments arithmétiques* au calcul des logarithmes.

On nomme *complément arithmétique* d'un logarithme la différence qu'on

obtient en retranchant la partie décimale de ce logarithme de 10(*); ce qui se réduit à ôter de 10 le premier chiffre significatif à droite du logarithme donné et tous les autres de 9.

Le complément arithmétique d'un logarithme s'indique en faisant précéder ce logarithme du signe C^t; ainsi C^t L 5 indique le complément arithmétique de L 5. On a L 5 = 0,69897 ; donc C^t L 5 = 10 — 0,69897 = 9,30103.

Il suit de la définition, qu'on obtient *la différence entre un nombre donné et un logarithme en faisant la somme du nombre donné et du complément arithmétique du logarithme, et en diminuant cette somme de* 10 *unités.*

Ainsi, pour retrancher le logarithme 0,67891 de 4,57231, au lieu d'opérer la soustraction, on ajoute à 4,57231 le complément de 0,67891 qui est 9,32109, la somme 13,89340 est trop grande de 10 unités ; donc 3,89340 est la différence demandée.

De même *dans le cas de plusieurs additions et soustractions successives de logarithmes, on ajoute aux logarithmes qui doivent être additionnés les compléments arithmétiques des logarithmes à soustraire, et on diminue la somme d'autant de fois* 10 *qu'on a pris de compléments.*

345. Voici plusieurs exemples de l'emploi des compléments arithmétiques.

1° Soit 0,578 à élever au cube. On a

$$L\,0{,}578 = L\left(\frac{578}{1000}\right) = \dot{2}{,}76193 - 3 = \dot{2}{,}76193 + 10 - 3 - 10 = 9{,}76193 - 10.$$

Donc $L\,(0{,}578)^3 = 3 \times (9{,}76193 - 10) = 29{,}28579 - 30$. Diminuant la caractéristique 29 de 26 unités pour la réduire à 3, il vient $L\,(0{,}578)^3 = 3{,}28579 - 4$. Donc $(0{,}578)^3 = 0{,}19310$.

La valeur exacte est 0,193100552.

2° Soit à extraire la racine cubique de $\left(\frac{3}{16}\right)^4$. On a

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{16}\right)^4}, \text{ et } Lx = \frac{1}{3}\,L\left(\frac{3}{16}\right)^4 = \frac{4}{3}\,L\left(\frac{3}{16}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Or } L\,3 &= 0{,}47712 \\ C^t L\,16 - 10 &= 8{,}79588 - 10 \\ \hline L\,\frac{3}{16} &= 9{,}27300 - 10 \\ 4\,L\,\frac{3}{16} &= 37{,}09200 - 40 \end{aligned}$$

Avant de diviser (37,09200 — 40) par l'indice 3 de la racine, on augmente ou on diminue la caractéristique de manière que celle qui en résultera soit trop forte d'un multiple de l'indice. Cette précaution est indispensable pour que la division du nouveau logarithme par l'indice donne un logarithme dont la caractéristique soit trop forte d'un nombre exact d'unités. On retranchera donc 37 de la caractérisque et on aura $L\,x = 4\,L\,\frac{3}{16} = 0{,}09200 - 3$; d'où

$$\frac{4}{3}\,L\,\frac{3}{16} = 0{,}03066 - 1. \text{ Donc } x = 0{,}107315.$$

(*) En général, on nomme *complément arithmétique* d'un nombre, la différence qu'on obtient en le retranchant de l'unité suivie d'autant de zéros qu'il a de chiffres. Ainsi, celui de 2747 = 10000 — 2747 = 7253. On voit qu'on obtient le complément arithmétique d'un nombre en retranchant de 10 le premier chiffre significatif à droite du nombre donné, et tous les autres de 9. Cette soustraction étant trop simple pour être comptée pour une opération, il en résulte qu'on peut réduire les soustractions à des additions. Soit par exemple 2747 à soustraire de 8423 ; on a 8423 — 2747 = 8423 + 10000 — 2747 — 10000 = 5676. On a donc la différence cherchée en ajoutant à 8423 le complément du nombre à soustraire, et retranchant l'unité suivie d'autant de zéros que ce nombre a de chiffres. On indique à la fois les deux opérations, comme on le voit dans l'exemple ci-contre, en écrivant à la gauche du complément l'unité surmontée du signe —.

$$\begin{array}{r} 8423 \\ \bar{1}7252 \\ \hline 5676 \end{array}$$

Il est bon d'employer ce procédé surtout dans le cas de plusieurs additions et soustractions successives, comme 347 + 551 — 312 — 124. Il est clair que $-312 = 1000 - 312 - 1000 = \bar{1}688$; de même $-124 = \bar{1}876$, donc $347 + 551 - 312 - 124 = 347 + 551 + \bar{1}688 + \bar{1}876 = 462$.

Au lieu de réserver pour la fin de l'opération la soustraction des 10 unités excédantes qu'introduit chaque complément, il vaut mieux effectuer à mesure cette réduction sur chacun d'eux, en les rendant analogues aux logarithmes à caractéristique seule négative.

En voici quelques exemples dont plusieurs ont été déjà traités.

1° Soit $x = \dfrac{\frac{31}{44} \times 0,578}{0,791}$;

$$\begin{array}{r} \text{on a } L\,31 = 1,49136 \\ C^t\,L\,44 - 10 = \bar{2},35655 \\ L\,0,578 = \bar{1},76193 \\ C^t\,L\,0.791 - 10 = 0,10182 \\ \hline L x = \bar{1},71166 \end{array}$$

Donc $x = 0,51505$.

2° Soit $x = 0,578^3$.

On a $Lx = 3L\left(\dfrac{578}{1000}\right)$. Or $L\left(\dfrac{578}{1000}\right) = 2,76193 - 3$ $= \bar{1},76193$. Donc $Lx = 3\,(1,76193) = 3\,(-1 + 0,76193) = -3 + 2,28579$ $= \bar{1},28579$. D'où $x = 0,19310$, comme ci-dessus.

3° Soit $x = \dfrac{\sqrt{0,29}}{3,6}$.

$$\begin{array}{r} \text{On a } L\,0,29 = \bar{1},46240 \\ \frac{1}{2}\,L\,0.29 = \bar{1},73120 \\ C^t\,L\,3,6 - 10 = \bar{1},44370 \\ \hline L x = \bar{1},17490 \end{array}$$

Donc $x = 0,51505$, comme ci-dessus.

4° Soit $x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$;

$$\begin{array}{r} \text{On a } L\,3 = 0,47712 \\ C^t\,L\,5 - 10 = \bar{1},30103 \\ \hline L\,\frac{3}{5} = \bar{1},77815. \end{array}$$

Donc $Lx = \dfrac{1}{3} \times L\,\dfrac{3}{5} = \dfrac{\bar{1},77815}{3}$
$= \dfrac{-3 + 2,77815}{3} = -1 + 0,92605$
$= \bar{1},92605$. Donc $x = 0,84343$, comme ci-dessus.

5° Soit $x = \sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{16}\right)^4}$;

$$\begin{array}{r} \text{On a } L\,3 = 0,47712 \\ C^t\,L\,16 - 10 = \bar{2},79588 \\ \hline L\,\frac{3}{16} = \bar{1},27300 \end{array}$$

Donc $Lx = \dfrac{1}{3} \times 4\,(\bar{1},27300)$
$= \dfrac{1}{3} \times 4\,(-1 + 0,27300)$
$= \dfrac{1}{3} \times (-4 + 1,09200)$
$= \dfrac{1}{3} \times (-3 + 0,09200)$

$= -1 + 0,03066 = -4 + 3,03066$. Donc $x = 0,107315$, comme ci-dessus.

CANONS LOGARITHMIQUES DE WRONSKI.

347. Un mathématicien contemporain, Wronski, a imaginé des canons logarithmiques dans lesquels il prétend résumer en une page, un volume de tables. Ces canons sont très-ingénieux, mais conduisent à des calculs assez compliqués. Nous en reproduisons un (*Pl.* II). En voici l'explication aussi détaillée que possible pour ceux de nos lecteurs qui se plaisent aux études mathématiques; les autres pourront sans inconvénient en supprimer la lecture.

La colonne horizontale B forme avec la première colonne verticale qui porte en tête les chiffres romains I, II, III, IV, une équerre dans laquelle se trouvent compris par portions tous les nombres de 1 à 10000. Le reste du canon comprend les logarithmes de ces nombres également par portions. Il y a donc un triple problème à résoudre.

1° Former à l'aide du canon le nombre dont on veut trouver le logarithme;

2° Trouver le logarithme correspondant;

3° Trouver le nombre correspondant à un logarithme donné.

1° *Former le nombre.*

348. On peut former tous les nombres entiers de 1 à 10000 en choisissant trois parties différentes dans l'équerre. Ces trois parties sont dites *initiale*, *moyenne*, et *finale*, ce qui indique suffisamment dans quel ordre il les faut prendre.

La portion initiale du nombre se trouve dans la colonne horizontale B de l'équerre;

La portion moyenne dans la partie de la colonne verticale surmontée de chiffres romains dont les cadres s'ajoutent aux colonnes horizontales C1 et C2.

La portion finale dans la partie de la colonne verticale qui correspond aux colonnes horizontales D1, D2 et D3.

Soit à composer le nombre 2372.

Prenons les deux premiers chiffres, 23; le nombre qu'ils forment est compris entre les nombres 20 et 40 dans la tranche II correspondant à la colonne B. C'est dans la 2ᵉ ligne horizontale de la colonne B qu'il faudra chercher le nombre qui approche le plus de 23, ce sera 22, dont la tranche est numérotée (1) au bas du canon (nous négligerons l'appoint 3).

La portion moyenne doit être cherchée également dans la deuxième colonne verticale correspondant à C1 et C2. Elle comprend deux chiffres : 1° celui qu'il faut ajouter à la portion initiale pour la compléter, 2° celui qui approche le plus du troisième chiffre du nombre. Ici c'est 1,6 qui ajouté à 22 donne 23.6 (1.6 se trouve dans la troisième ligne de la tranche C2 et dans la colonne II).

La portion finale devra compléter le nombre 236 de manière à former 2372; il est évident qu'elle doit se composer de $2372 - 2360 = 12$. Nous avons dit qu'il faut la chercher dans les colonnes verticales correspondant à D1, D2 et D3. Ajoutons qu'elle doit se chercher dans la 2ᵉ colonne, comme la précédente. Nous l'y trouvons en effet à la troisième ligne de la colonne D2 dans la tranche verticale II. On a donc ainsi formé le nombre 2372.

On aurait pu former ce nombre en prenant ses portions dans d'autres co-

lonnes; mais ces portions ne correspondraient pas aux portions du logarithme, comme on le verra tout à l'heure.

Il importe en outre de ne prendre les portions que par défaut et jamais par excès.

Voici deux autres exemples qui, comme le précédent, sont cités par M. Léon Lalanne dans *Un million de faits*.

Former le nombre 753.

349. Portion initiale	75	(exactement contenue col. (5) à la quatrième ligne de la branche B.
Portion moyenne	0.0	(elle est inutile car les deux portions extrêmes suffisent à former le nombre).
Portion finale	.30	(tranche IV, colonne D2).
Total..	753	

Former le nombre 4975.

Portion initiale	48	(3ᵉ ligne de B. col. (2).
Portion moyenne	1.6	(tranche III, 4ᵉ ligne de C1).
Portions finales	1.2	(tranche III, colonne D1, 3ᵉ ligne.)
	.28	(tranche III, colonne D3, 1ʳᵉ ligne).
	.20	(tranche III, colonne D2, 2ᵉ ligne).
Total....	4975	

Nous avons ici plusieurs portions finales. Cela tient à ce que la portion 15 ne se trouve pas dans la tranche III où il faut la chercher, et comme on ne prend les portions complémentaires que par défaut, il faut choisir 12 qui laisse... 3 ou ... 3,00 qu'on devra obtenir en choisissant successivement d'abord... 2,8 qui approche de 3,0 et enfin... 0,20 qui ajouté à 28 complète la somme... 3,00.

Ces exemples ont été choisis à dessein pour les formations les plus difficiles. Il suffit, dans plusieurs cas, de la portion initiale. L'examen de la colonne B nous montre qu'elle donne exactement les trente premiers nombres : 11 consécutifs de 10 à 20 inclusivement; 10 de 2 en 2 de 22 à 40 inclusivement; 9 de 4 en 4 de 44 à 76; enfin 10 de 5 en 5 de 50 à 95. Toutes les dixaines se trouvent comprises dans les séries, elles fournissent, en supprimant les zéros, les nombres de 1 à 9 inclusivement. Il y a donc, quand le nombre se compose de 1 ou 2 chiffres, 40 cas sur 100 où la portion initiale le fournit exactement.

On remarquera de même qu'une portion initiale et une portion moyenne suffisent quelquefois à former le nombre quand il ne comprend pas plus de trois chiffres. 768, par exemple, a pour portion initiale 76, et pour portion moyenne 0,8 dont la somme donne 768.

Disons enfin qu'il est indifférent, quand une portion initiale est comprise entre 50 et 100, de choisir dans la 3ᵉ ou la 1ʳᵉ ligne de la colonne B. On prend alors, dans l'une de ces deux lignes, la portion qui conduit le plus rapidement au résultat cherché.

Jusqu'ici nous n'avons fait usage que de la bande verticale numérotée en chiffres romains et des tranches de deux chiffres de la colonne B correspondant aux nos 0 à 9 placés sous le canon.

Nota. — Si le nombre était décimal, on le traiterait comme un nombre entier en supprimant la virgule, et en donnant seulement au résultat la caractéristique convenable.

2° TROUVER LE LOGARITHME D'UN NOMBRE DONNÉ.

350. Un nombre étant décomposé en ses portions, choisies chacune dans un rang déterminé, les portions du logarithme correspondront aux portions du nombre. Il est bien entendu qu'il ne s'agit ici que de la partie décimale du logarithme.

D'abord, les chiffres isolés placés à la droite des tranches de deux chiffres de la colonne B renferment respectivement le premier chiffre du logarithme des nombres contenus dans ces tranches.

22, portion initiale de 2372, a pour premier chiffre de son logarithme 3.

75, portion initiale de 753, a pour premier chiffre de son logarithme 8.

Il en est de même de 6 qui est en regard de 48, portion initiale de 4975.

On écrit à la suite de ce premier chiffre les quatre chiffres qui, dans la bande supérieure A, sont dans la même tranche et occupent la même ligne que cette portion initiale dans la bande B; ainsi, dans le cas où la portion initiale suffirait à constituer le nombre, les logarithmes de 22, 75 et 48 seraient 34242, 87506, 68124.

Les logarithmes des portions moyennes se trouvent à la rencontre de la colonne verticale où est placée la portion initiale, avec la colonne horizontale où est placée la portion moyenne. La portion moyenne du logarithme de 2372 est à l'angle des lignes menées de 22 et de 1.6 (col. C2) soit 3049, cette portion moyenne ne comprend que les quatre dernières décimales partielles du logarithme.

Si la portion moyenne du nombre est nulle; celle de son logarithme l'est également.

La portion finale du logarithme est placée dans l'une des tranches D1, D2, D3, immédiatement à droite du nombre placé à l'angle de la colonne verticale où est la portion initiale du nombre donné, et de la colonne horizontale où figure la portion finale du même nombre. Ces portions, pour 2372 étant 22 et 0,12, la portion finale sera 216 placée immédiatement à côté et à la suite de 236.

Quand la portion moyenne du nombre est nulle, la portion finale du logarithme est le nombre même placé à l'intersection des deux colonnes. Pour le nombre 753, où la portion moyenne est nulle, la portion finale du logarithme sera 173.

La portion finale nécessite en outre un calcul particulier que Wronski appelle *interpolation*. Voici comment on l'obtient :

La colonne horizontale E contient des séries de quatre chiffres divisés deux à deux par une virgule, il faut les lire comme si elles étaient séparées par des colonnes. Chaque nombre de deux chiffres est la différence de deux portions finales correspondantes dans les colonnes D1, D2, D3. Ainsi, dans la tranche (3) E; 02, 05, 07, 09, 12, 14, 17... sont les différences entre chacun des nombres de la même tranche dans les colonnes D1, D2, D3 et celui qui lui correspond dans la tranche suivante, soit entre 033 et 031; 0,67 et 0,62; 100 et 0,93; 133 et 124; 166 et 155; 200 et 185 (Ces différences ne sont pas toujours exactes, il eût été inutile de les préciser, mais les nombres dont elles proviennent ne sont qu'approchés, et leurs différences, pour être justes, sont tantôt augmentées, tantôt diminuées d'une unité comme on le voit pour les deux dernières).

Reportons-nous maintenant à la colonne verticale (10) dont la partie comprise dans les divisions C1 et C2 est restée sans destination (car toutes les autres parties se rattachent aux divisions dont nous avons parlé). Les nombres 09, 08, 07, 06, etc., sont dits *compléments des indices des moyennes* parce qu'elles sont les compléments des nombres 01, 02, 03, 04, ... indiqués à l'autre extrémité de la ligne horizontale de la tranche I, qui sont les indices des moyennes. Les mêmes nombres de la tranche I, dans les colonnes D, sont les indices des finales.

Multiplions l'indice de la portion finale par le complément de l'indice de la portion moyenne. Considérons chaque chiffre du produit comme le numéro d'ordre de la différence dans celle des tranches E qui, prolongée, comprend la portion finale; additionnons enfin ces différences en les reculant successivement d'un rang et prenons le premier chiffre de la somme qui doit figurer à la dernière colonne dans l'addition de toutes les portions logarithmiques.

« Ainsi, dit M. Léon Lalanne, le nombre 2372 ayant 22, 1.6 et .12 pour portions initiale, moyenne et finale, l'indice de la finale est 6; le complément de l'indice de la moyenne est 2; le produit de 6 par 2 est 12. Le premier chiffre 1 du produit indique qu'il faut prendre la *première* différence 03, placée à la fois dans la colonne de la finale et dans la tranche E; et le chiffre 2, qui vient ensuite dans le produit, indique qu'il faut à 03 ajouter la *seconde* différence 07, placée au dessous de 03, en la considérant comme dix fois plus petite. Le résultat de l'interpolation est donc 03 7, ou, en s'en tenant aux chiffres du cinquième ordre décimal, 4.

« Le tableau détaillé des opérations relatives à deux nombres éclaircira tout ce qui précède.

1ᵉʳ Exemple. — *Former le logarithme du nombre 2372.*

	Nombre.	Logarithme.	Interpolation.	
Portions initiales...	22	35642	Indice des finales....	6
Portions moyennes. ..	1.6	3049	Compl. ind. des moy..	2
Portions finales.... ..	.12	216		
Interpolation		4	Produit.....	12
			Différence :	
Sommes...	2372	37511	Pour 1.....	93.
			Pour 0.2...	0.7
				3.7

2ᵉ Exemple. — *Former le logarithme du nombre 4975.*

	Nombre.	Logarithme.	Interpolation.		
Port. initiales. .	48.	68124	Compl. ind. des moy.	6.	
..... moyennes.	1.6	1424	Ind. des fin.	3×6 18	Produits partiels.
..... finales....	.12	100		7×6 42	
	.28	23.3		5×6 30	
	.20	1.6			
Interpolation		6.7	Produit total...	2.250	
			Différence :		
Sommes...	497500	69679	Pour 2....	06.	
			Pour 0.2..	0.6	
			Pour 0.05.	0.14	
			Somme...	6.74	

3° Étant donné un logarithme, trouver le nombre correspondant.

351. Ce dernier problème est à peu près insoluble avec le canon que nous avons sous les yeux, car il est impossible de savoir de quelles portions et encore moins de quels chiffres d'interpolation le logarithme a pu être formé, quand on ignore quel nombre lui a donné naissance. Il faut donc recourir à un autre canon dans lequel on puisse composer facilement les logarithmes des nombres de 1 à 10000, comme on le fait dans celui-ci pour les nombres eux-mêmes. Encore le problème se complique-t-il lorsque le logarithme donné n'est pas le logarithme d'un nombre entier, c'est à dire un de ceux qui figurent dans les tables. On sait en effet qu'il faut déterminer non-seulement un logarithme, mais les deux logarithmes consécutifs qui comprennent ce logarithme donné.

La pratique des canons de Wronski est trop compliquée et donne des résultats trop incertains pour que nous exposions ici les autres canons proposés par ce géomètre. Ce que nous venons de dire suffit au but que nous nous étions proposé : faire comprendre comment avec un petit nombre de chiffres, il a été possible de constituer de tableaux d'une page qui donnent les résultats consignés dans les grandes tables.

V

DES SÉRIES.

352. Quand les relations des nombres dépendent de quelques opérations seulement, il est possible de les déterminer, mais quand les calculs deviennent trop nombreux, comme lorsqu'il s'agit, par exemple, d'extraire d'un nombre quelconque, des racines à exposants de plusieurs chiffres, le calculateur le plus patient doit renoncer à obtenir un résultat satisfaisant.

Ce cas est celui de la constitution d'une table de logarithmes d'après les données que nous avons exposées.

Il est évident que, pour insérer plus de cent mille moyens entre deux termes de la progression géométrique ∺ 1 : 10 : 100 : 10000 : 100000, etc., il aurait fallu obtenir une racine dont les calculs épouvantent l'imagination. On n'est parvenu à constituer cette table qu'au moyen des séries.

La théorie des séries ne peut être étudiée sérieusement que par les procédés de l'algèbre. Cependant il est possible de donner ici une idée des résultats surprenants auxquels elle conduit.

353. On appelle *série* une suite de nombres déduits les uns des autres en vertu d'un calcul constant que l'on nomme *loi de la série*.

Les lois des séries peuvent varier à l'infini, les séries sont donc en nombre infini.

La série la plus simple est celle qui consiste à former tous les nombres entiers ou fractionnaires par voie de numération.

Une suite de nombres consécutifs obtenus par l'addition constante d'une même quantité est donc une série.

La suite des termes que donne une progression par différence ou par quotient est également une série.

Quand le nombre des termes d'une série n'a pas de limite, on dit que la série est *infinie*.

354. La forme d'une série est ordinairement une suite de termes positifs ou négatifs. Quand on additionne successivement les termes qui la composent (le 1er et le 2e, le 1er, le 2e et le 3e, la somme des trois premiers avec le 4e, etc.,), on trouve deux sortes de séries :

1° Les séries *convergentes* où les sommes successives se rapprochent de plus en plus d'une certaine quantité finale que l'on appelle *limite* et qui est la somme de toute la série.

0,99999... est une série convergente infinie dont la limite est 1;

2° Les séries *divergentes* où les sommes successives s'écartent de plus en plus les unes des autres, et par suite de toute quantité imaginable.

$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 \ldots$ est une série divergente infinie.

En général, dans une série convergente, chaque terme est plus petit que celui qui le précède ; le coutraire se produit généralement dans une série divergente, c'est à dire que chaque terme y est plus petit qui celui qui le suit.

355. Les séries les plus simples sont celles qui servent à former les nombres figurés.

On appelle *nombres figurés* des nombres indiquant la quantité de points qui,

placés à une même distance les uns des autres, donnent des figures géométriques semblables.

Ces nombres sont déduits d'une progression par différence dont le 1er terme est 1, et dont la codifférence est un nombre entier.

356. Si l'on ajoute les termes de la progression ÷ 1.2.3.4.5.6.7...
On obtient les sommes successives : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28...

qui expriment les nombres figurés *triangulaires*, car si l'on prend 3 points quelconques A B K formant les angles d'un premier triangle pour former des triangles semblables dont les côtés soient doubles, triples, quadruples de ceux du premier, il faudra 6, 10, 15 points. C'est ce que l'on voit dans la figure ci-contre, si on relie les points A, D, M, puis C et L, B et K par des lignes droites. On détermine ainsi le nombre des points qui serviront à former sur le modèle du triangle ABK, les triangles ACL, ADM.

```
A B C D
. . . .
K . . .
L . .
M .
```

357. Si l'on ajoute les termes de la progression ÷ 1.3.5.7.9... des nombres impairs consécutifs, on obtient les sommes successives : 1.4.9.16. 25... qui sont respectivement les carrés exacts des nombres consécutifs : 1,2,3,4,5...

En sorte que si l'on voulait dresser une table de tous les carrés des nombres depuis 1 jusqu'à l'infini, on obtiendrait ces carrés à l'aide d'additions successives, ce qui abrégerait singulièrement les opérations à effectuer.

C'est par un procédé analogue, c'est à dire à l'aide de séries, qu'on a dressé les tables de logarithmes.

Les sommes successives de la progression des nombres impairs donnent par conséquent les nombres *figurés carrés*, car si l'on joint tous les points de la figure ci-contre, on verra que pour former les carrés AGFE, AHKL semblables au carré ABCD avec des points placés à égale distance les uns des autres, il faudra respectivement 9, et 16 de ces points.

```
A . B . G . H .
D . C .   .   .
E .   . F .   .
L .   .   . K .
```

358. On peut déterminer, à l'aide des séries, plusieurs autres sortes de nombres figurés. Mais ce que nous venons d'exposer suffit au but que nous nous étions proposé : donner une idée générale de l'usage et de l'utilité des séries, et faire entrevoir comment il a été possible de dresser avec précision les immenses tables de logarithmes qui, comme celle de Callet, entraînent la formation de 108,000 logarithmes à 7 décimales, et nécessitent par conséquent, avec les appendices, au moins la détermination de plus d'un million de chiffres.

359. Faisons remarquer enfin que si la détermination des lois générales des séries exige la connaissance de l'algèbre, leur formation peut s'opérer avec les calculs les plus simples. Elle initie l'esprit aux relations des nombres et lui permet d'en déduire des solutions pour une infinité de problèmes. On la retrouve en effet au fond de tous les faits numériques des sciences positives qui n'ont pas été signalés toujours par des mathématiciens.

VI

DES GROUPEMENTS.

360. Pour compléter l'indication générale des procédés du calcul, il nous reste à dire quelques mots des groupements.

On entend par groupement les agrégations diverses de nombres quelconques, quand elles ont pour objet de déterminer les groupes différents que l'on peut former avec une certaine quantité de nombres constants.

Si l'on ne fait entrer un même objet, qu'une fois, dans chaque groupement, le groupement peut s'effectuer de trois manières différentes, que l'on désigne sous les noms *d'arrangement*, de *permutation* et de *combinaison*.

1° ARRANGEMENTS.

361. Les *arrangements* désignent les différents groupes que l'on peut former avec plusieurs nombres donnés, en les disposant dans tous les ordres possibles; deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., *de telle sorte qu'un même nombre n'entre qu'une fois dans chaque groupe*.

Soient quatre objets numérotés 1, 2, 3, 4. Pris un à un, ils donneront 4 arrangements correspondant chacun à l'un des 4 nombres 1, 2, 3, 4.

Pris deux à deux, ils formeront autant de groupes différents que l'on peut placer de fois, à la suite de chacun des nombres précédents, un des trois autres nombres, les quatre nombres pris deux à deux donnent 12 arrangements, 1.2, 1.3, 1.4, 2.1, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3, parce que l'on peut placer séparément à la suite de chacun des 4 premiers nombres, 3 nombres différents.

De même, on obtiendra les arrangements 3 à 3 en plaçant, à la suite de chaque arrangement 2 à 2, un des deux nombres qui n'y figurent pas; on obtiendra ainsi 2 fois 12 arrangements nouveaux : 1.2.3, 1.2.4, 1.3.2, 1.3.4, 1.4.2, 1.4.3, etc.

On n'obtiendra pas plus d'arrangements 4 à 4 que 3 à 3, car on ne pourra ajouter à la suite des arrangements 3 à 3 qu'un des nombres qui n'y figurent pas; on n'obtiendra ainsi que 1 fois les 24 arrangements précédents.

362. Si, au lieu de 4 nombres, nous en avions eu 5, nous aurions trouvé, par les mêmes raisons :

1° 5 arrangements 1 à 1 ;

2° 5×4 arrangements 2 à 2, soit 20 arrangements ;

3° $5 \times 4 \times 3$ arrangements 3 à 3, soit 60 arrangements.

4° $5 \times 4 \times 3 \times 2$ arrangements 4 à 4, soit 120 arrangements;

Enfin le même nombre d'arrangements 5 à 5 que celui de 4 à 4 ; soit encore 120 arrangements.

Il est facile de déduire la quantité d'arrangements que l'on peut former avec m nombres, m représentant un nombre entier quelconque; ces arrangements seront :

m 1 à 1 ;

$m \times (m - 1)$ pris 2 à 2;

$m \times (m-1) \times (m-2)$ pris 3 à 3;
$m \times (m-1) \times (m-2) \times (m-3)$ pris 4 à 4, etc.,
Et, en général :

363. *Le nombre d'arrangements que l'on peut former avec un nombre déterminé d'objets s'obtient en retranchant successivement 1, 2, 3... du nombre total des objets jusqu'à celui qui marque le nombre des objets moins un qui doit entrer dans chaque arrangement, puis en multipliant tous ces restes successifs entre eux*, et le tout par le nombre total des objets.

Veut-on savoir par exemple le nombre de mots de 5 lettres que l'on peut former avec les 25 lettres de l'alphabet en faisant entrer chaque lettre une fois seulement dans chaque mot? on trouve :

$$25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6\,375\,600$$

Les nombres de 5 chiffres que l'on peut former avec les dix chiffres, sans que l'un d'eux soit contenu plus d'une fois dans chacun, seront

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240.$$

2° PERMUTATIONS.

364. Les *permutations* désignent les différents groupes que l'on peut former en plaçant la même quantité donnée de nombres dans tous les ordres possibles, de manière que chaque nombre entre une fois dans chaque groupe, mais une fois seulement.

Ainsi les deux chiffres 1 et 2 donnent deux permutations 1.2, 2.1.

Les 3 chiffres 1, 2 et 3 donnent six permutations 1.2.3, 1.3.2, 2.1.3, 2.3.1, 3.1.2, 3.2.1.

Les 4 chiffres donneront 24 permutations, car à la suite du 4ᵉ chiffre on pourra écrire une des 6 permutations précédentes, et l'on pourra de même écrire 6 permutations à la suite de chacun des trois autres chiffres.

365. Il suit de là que *le nombre des permutations* est égal à celui des arrangements que l'on peut former avec plusieurs nombres quand tous entrent une fois dans les arrangements. Ce nombre est facile à trouver, car il *est égal au produit de tous les nombres consécutifs entre eux, depuis l'unité jusqu'au nombre qui indique la quantité d'objets figurant dans la permutation.*

Le nombre des permutations que l'on peut former avec les cinq voyelles de l'alphabet sera donc.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Celui que l'on peut effectuer avec les 10 chiffres sera.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3622800.$$

La théorie des permutations n'est donc qu'un cas particulier de la théorie des arrangements.

3° COMBINAISONS.

366. Les *combinaisons* sont des groupements dans lesquels il n'entre qu'un même nombre à la fois, et où deux groupes quelconques ont au moins un terme différent.

Si donc, on détermine tous les arrangements qu'on peut faire avec des nombres pris 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, il faudra en supprimer toutes les permu-

tations auxquelles chacun d'eux pourra donner lieu; on obtiendra ainsi les combinaisons.

4 nombres 1 à 1 donnent 4 arrangements et autant de combinaisons, car il n'y a pas de permutations dans les nombres pris un à un.

4 nombres 2 à 2 donnent 4×3 arrangements et chacun d'eux 1×2 permutations. Le nombre des combinaisons 2 à 2 de 4 nombres sera donc.

$$\frac{4\times 3}{1\times 2}=\frac{12}{2}=6$$

4 nombres 3 à 3 donnent $4\times 3\times 2$ arrangements, et chacun d'eux donne lieu à $1\times 2\times 3$ permutations, soit $\frac{4\times 3\times 2}{1\times 2\times 3}=\frac{24}{6}=4$ combinaisons.

4 nombres 4 à 4 donnent lieu à $4\times 3\times 2\times 1$ arrangements, et chacun d'eux à $1\times 2\times 3\times 4$ permutations, soit $\frac{4\times 3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3\times 4}=1$

367. Appelant m la quantité de nombres à combiner et n la quantité de ces nombres qui entrent dans chaque terme des combinaisons, on pourra dire en général que m nombres combinés n à n donnent le nombre de combinaisons.

$$\frac{m\times(m-1)\times(m-2)\times(m-3\ldots\times(m-n+1)}{1\times 2\times 3\times 4\ldots\ldots\ldots\times n}$$

En sorte que si l'on a 7 nombres à combiner 5 à 5, le nombre de leurs combinaisons sera :

$$\frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}=\frac{2520}{120}=21.$$

4° DES GROUPEMENTS PROPREMENT DITS.

368. Les groupements que nous avons examinés jusqu'ici n'admettent pas qu'un même terme figure deux fois dans chaque groupe. Il résulte de là, par exemple, que le nombre des mots que l'on peut former avec les lettres de l'alphabet est considérablement multiplié quand on peut répéter deux ou plusieurs fois la même lettre ; or on sait que les mots admettent plusieurs fois une même lettre.

Nous remarquerons d'abord que, quand on peut répéter les termes, deux nombres pris 2 à 2 peuvent former 4 groupements 1.1, 1.2, 2.1, 2.2. Trois nombres 2 à 2 formeront 9 groupements : 3 dans lesquels chacun d'eux sera répété 3 fois, et 6 arrangements. On verrait de même que 4 nombres 2 à 2 formeront $4^2=16$ groupements, et que m nombres 2 à 2 formeront m^2 groupements.

On verrait encore que 3 nombres 3 à 3 formeraient 3^3 groupements, 4 nombres 4 à 4, 4^4 groupements et que m nombres n à n ou m à m, m^n ou m^m groupements.

369. De là, cette loi générale et simple que : quand on veut former les groupements d'une certaine quantité de choses n à n, le nombre des groupements proprement dits est égal au nombre des termes élevé à la puissance dont l'exposant renferme autant d'unités qu'il y a de termes dans chaque groupement.

Les groupements de m nombres n à n seront donc au nombre de m^n.

370. Enfin, si l'on veut connaître le nombre total des groupements que forment m nombres pris 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3... n à n, et enfin m à m, ce nombre sera déterminé par la progression :

$m + m^2 + m^3 + \dots m^n \dots + m^m = \frac{(m^m \times m) - m}{m - 1} = \frac{m^{m+1} - m}{m - 1}$, car cette seconde valeur est la somme des termes de la première, qui se compose de la somme des termes d'une progression géométrique dont m est à la fois le premier terme et la raison, et dont le dernier terme est m^m.

Le nombre des groupements que l'on peut former avec les 25 lettres de l'alphabet serait donc $\frac{25^{26} - 25}{24}$ qui dépasse tous les nombres connus.

VII

FAITS CURIEUX DES RELATIONS NUMÉRIQUES.

Il nous reste à compléter cette exposition des procédés généraux du calcul par quelques indications qui auraient pu tenir place dans l'analyse des nombres, mais qui se rattachent si étroitement à certains faits curieux des relations des nombres, que nous avons préféré les mentionner ici.

1° PARTIES ALIQUOTES ET NOMBRES QUI EN DÉRIVENT.

371. On appelle *parties aliquotes* d'un nombre, d'autres nombres qui sont à la fois parties du nombre considéré comme somme, et qui le divisent exactement. Ainsi, quand on peut grouper certains facteurs d'un produit de manière à ce que leur addition donne ce produit, on dit que ces facteurs sont les parties aliquotes de leur produit.

2, 4 et 6 sont des parties aliquotes de 12, car chacun d'eux divise 12, et leur somme $2+4+6$ donne également 12.

372. Il est certains nombres que leurs facteurs, réunis par voie d'addition, ne peuvent reproduire. Le nombre 21 par exemple n'a pas d'autres facteurs que 3 et 7 dont la somme ne peut reproduire 21. On les appelle *nombres imparfaits*.

Il y a d'autres nombres, au contraire, dont la somme est égale à celle de tous leurs diviseurs (le nombre seul excepté). On les appelle *nombres parfaits*: tel est 6, qui est égal à $1+2+3$; tel est 28, dont tous les diviseurs sont 1, 2, 2^2, 7, et 7×2, qui donnent pour somme $1+2+4+7+14=28$.

373. La progression par quotient $\div\!\div$ 2 : 4 : 8 : 16 : 32... donne pour nombres parfaits tous ceux de ses termes qui, diminués d'une unité, sont des nombres premiers lorsque l'on a multiplié le terme ainsi modifié par le terme précédent resté intact.

4, 8, 32, diminués de 1, donnent les nombres premiers 3, 7, 31; par conséquent, 3×2, 7×4, 31×16, soit 6, 28, 496, seront des nombres parfaits.

Ce procédé ne donne pas tous les nombres parfaits, mais il en donne une grande quantité, surtout dans les nombres formés avec peu de chiffres.

374. On appelle nombres *défectifs* des nombres imparfaits supérieurs à la somme de tous leurs diviseurs ou de toutes leurs parties aliquotes. Tel est $21 > 1+3+7$; tel est $16 > 1+2+4+8$.

On appelle au contraire nombres *abondants* ceux qui sont inférieurs à la somme de leurs parties aliquotes. Tel est $12 < 1+2+3+4+6$; tel est $18 < 1+2+3+6+9$.

375. Quand la somme des parties aliquotes d'un nombre est égale à un autre nombre, et réciproquement, quand la somme des parties aliquotes du second nombre est égale au premier, on dit que les deux nombres sont ***amiables***.

220 et 284 sont des nombres amiables, car la somme des parties aliquotes de $220 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$; et d'autre part, la somme des parties aliquotes de $284 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

2° CARRÉS MAGIQUES.

376. On appelle *carrés magiques* des carrés divisés en cases égales dans lesquelles figurent des nombres dont l'addition par colonnes verticales ou par colonnes horizontales, ou même par colonnes diagonales, donne toujours la même somme.

Voici un carré magique dans lequel sont disposés les 16 premiers nombres. On remarque que, quelle que soit la colonne que l'on additionne, que cette colonne soit une des quatre horizontales ou une des quatre verticales, ou une des deux diagonales $6 + 7 + 9 + 12$ et $1 + 4 + 14 + 15$, on trouvera toujours 34 pour somme.

1	16	11	6
13	4	7	10
8	9	14	3
12	5	2	15

Les nombres qui figurent dans ce carré sont susceptibles de 878 arrangements différents.

La règle de la disposition des nombres inscrits dans les carrés varie suivant les cas, mais elle a toujours pour principe que ces nombres sont les termes d'une progression arithmétique.

377. Les carrés les plus faciles à former sont ceux qui ont pour côtés un nombre de cases égal à un nombre impair. Voici comment on procède. Soit donné un carré de 5 cases de côté, dans l'une des colonnes duquel (l'horizontale supérieure, par exemple) on a disposé les nombres consécutifs de 1 à 5 dans un ordre quelconque :

Soit 1, 3, 5, 2, 4.........................

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

Supposons d'abord, dans cette suite, un nombre premier avec 5 et tel que diminué de 1, il soit encore premier avec 5. Tel sera 3.

Imaginons maintenant que la suite des nombres de la première colonne soit répétée plusieurs fois 1352413524..................

et prenons, à partir du 3e chiffre, les 5 chiffres soulignés qui fourniront les chiffres de la deuxième colonne horizontale.

La troisième colonne s'obtiendra par le même procédé, en opérant sur les nombres de la deuxième colonne comme sur ceux de la première ; le 3e nombre de la deuxième colonne étant 4, les chiffres consécutifs de la troisième colonne seront 4, 1, 3, 5, 2.

Opérant de même pour les colonnes suivantes, nous obtiendrons successivement 3, 5, 2, 4, 1 et 2, 4, 1, 3, 5.

Ce premier carré est déjà un carré magique, comme il est facile de s'en assurer, mais il contient le même nombre répété cinq fois. Pour obtenir un carré magique où tous les nombres soient différents les uns des autres, il faut combiner celui-ci avec un autre carré que nous allons construire.

Etant donné un autre carré de 25 cases vides et les 5 premiers multiples de

5 en commençant par 5×0, soit 0, 5, 10, 15, 20, nous disposerons ces multiples dans la première ligne horizontale suivant un ordre quelconque, soit 5, 0, 10, 20, 15.

Et nous obtiendrons les chiffres des autres colonnes comme ci-dessus, en ayant soin seulement de ne pas commencer cette fois par le 3e ni par le 1er. Soit en commençant par le 2e :

Pour la seconde colonne, 0, 10, 20, 15, 5;
Pour la troisième, 10, 20, 15, 5, 0;
Pour la quatrième, 20, 15, 5, 0, 10.
Et pour la cinquième, 15, 5, 0, 10, 20.

Nous obtenons ainsi un nouveau carré magique où un même nombre se trouve répété 5 fois.

5	0	10	20	15
0	10	20	15	5
10	20	15	5	0
20	15	5	0	10
15	5	0	10	20

Pour obtenir un carré définitif qui se compose de nombres différents, on le formera par l'addition des nombres correspondants dans chacun des carrés que nous venons de former, ce qui nous donne pour carré magique le carré ci-contre où figure, dans chaque case, le nombre composé de la somme des nombres figurant, à la même case, dans les deux autres carrés correspondants.

6	3	15	22	19
5	12	24	16	8
14	21	18	10	2
23	20	7	4	11
17	9	1	13	25

Il suit de là que si l'on veut modifier ce dernier carré, de telle sorte que l'un quelconque des nombres qui le composent occupe une case déterminée, il faut composer le 1er et le 2e carré de façon que la somme des nombres de la même case, dans les deux carrés, donne le nombre proposé.

3° TRIANGLE ARITHMÉTIQUE.

378. Le triangle arithmétique, imaginé par Pascal, est une suite de termes obtenus par l'addition, deux à deux, de termes voisins, et qui a la propriété de donner le nombre de combinaisons que l'on peut former avec un nombre quelconque d'objets pris *n* à *n*.

Voici ce triangle :

```
1
1 1
1 2  1
1 3  3  1
1 4  6  4   1
1 5  10 10  5   1
1 6  15 20  15  6   1
1 7  21 35  35  21  7   1
1 8  28 56  70  56  28  8   1
1 9  36 84  126 126 84  36  9  1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
. .. .. ... ... ... ... ... .. .. .
```

Chaque nombre s'obtient en additionnant le nombre placé immédiatement au dessus avec le nombre précédent de la même ligne horizontale.

La 1re ligne verticale comme la 1re ligne diagonale supérieure ne renferme que des unités ;

La 2e ligne verticale et la 2e ligne diagonale renferment la suite des nombres entiers consécutifs ;

Les 3e lignes, verticale et diagonale, renferment les nombres triangulaires;

Le tableau peut être prolongé à l'infini.

Veut-on savoir quel est le nombre de combinaisons de 8 lettres prises 3 à 3? On descendra dans la 2e colonne verticale des nombres consécutifs, de 8, jusqu'à la rencontre du 3e nombre qui vient à la suite dans la colonne horizontale; ce 3e nombre est 56, car, d'après le procédé indiqué au § **367**, ce nombre est $\frac{8\times7\times6}{1\times2\times3}=56$

Mais une autre particularité plus curieuse et qui se déduit, comme on le verra, de la précédente, c'est que, lorsque l'on forme les puissances successives d'une somme composée de deux parties $a+b$, ou $d+u$, ainsi que nous l'avons indiqué au § (**63**), les chiffres qui accompagnent les lettres, et que l'on appelle *coefficients* des puissances, sont indiqués dans les lignes horizontales du triangle.

Les coefficients de la 1re puissance de $d+u$ sont $1d+1u$

Ceux de la 2e sont $1d^2+2du+1u^2$.

Ceux de la 3e sont $1d^3+3d^2u+3du^2+1u^3$.

Ceux de la 4e sont $1d^4+4d^3u+6d^2u^2+4du^3+1u^4$.

Ceux de la 5e sont $1d^5+5d^4u+10d^3u^2+10d^2u^3+5du^4+1u^5$.

En sorte qu'à l'aide du tableau de Pascal et de cette observation que les exposants de d vont en décroissant de l'indice de la puissance jusqu'à l'unité et que les exposants de u vont en croissant jusqu'au dernier terme qui est u avec l'indice de la puissance, on obtiendra mécaniquement les résultats des multiplications successives qui donnent une puissance quelconque d'un nombre divisé en deux parties.

CHAPITRE II

THÉORIE DES QUANTITÉS FIXES. — 1re PARTIE

PROCÉDÉS GÉNÉRAUX DU CALCUL ALGÉBRIQUE.

I

1° PRÉLIMINAIRES.

Lorsque nous multiplions $(6+4)$ par $(6-4)$ nous trouvons que ce produit $10\times 2=20$ est égal à la différence des carrés de 6 et de 4, soit $36-16=20$.

Nous sommes tentés de voir dans ce résultat un cas particulier aux nombres 6 et 4, et la loi générale : *Quand on multiplie la somme de deux nombres par leur différence, le produit est égal à la différence des carrés de ces deux nombres* nous échappe.

Si, au contraire, nous remplaçons les nombres par des lettres, avec cette convention qu'une lettre représentera un nombre quelconque, cette loi deviendra évidente pour tous les nombres.

En effet, multiplions $(a+b)$ par $(a-b)$, en supposant que a et b soient deux nombres quelconques, différents l'un de l'autre :

La multiplication, opérée d'après les règles établies aux §§ **62** et **141**, nous donnera le produit ci-contre :

Et comme, à la place de a et de b, on peut faire figurer deux nombres quelconques, on en conclut que les expressions $(a+b)\times(a-b)$ et a^2-b^2 sont les mêmes, quels que soient les nombres sur lesquels on opère.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

Ce procédé est celui de l'algèbre que nous avons nommé science des *quantités*, parce que l'idée de *quantité* est plus générale que celle attachée à l'idée de *nombre*.

379. Si donc nous remplaçons par des lettres les nombres sur lesquels nous avons déjà opéré, nous verrons se dégager d'une manière nette, et en

quelque sorte absolue, les principes que nous avons établis dans la *Théorie des nombres*.

Les notations particulières aux quantités écrites sous forme littérale sont les mêmes que pour les nombres entiers, la multiplication exceptée, où l'on snpprime le signe $\times$, ainsi ab, ca, de signifient a fois b, c fois a, d fois e. Quand l'un des facteurs est exprimé en chiffres, on l'écrit devant les lettres qu'il multiplie en supprimant toujours le signe de la multiplication, et on l'appelle *coefficient*. $2a$, $3ab$ signifient 2 fois a, 3 fois ab, et 2, 3 sont les coefficients on facteurs numériques des produits $2a$, $3ab$. Il faut bien se garder de les confondre avec les exposants; les coefficients indiquent la somme de plusieurs quantités égales, les exposants en indiquent le produit.

380. On nomme *terme* toute quantité séparée d'une autre par le signe + ou le signe — quelque nombreuses d'ailleurs que soient les lettres qui y entrent et quels que soient les autres signes dont elles peuvent être accompagnées.

Une expression algébrique qui ue comprend qu'un seul terme s'appelle *monome*, celle qui en comprend deux *binome*, celle qui en comprend trois *trinome*, enfin celle qui en comprend plus de trois *polynome* :

$a, \quad ab\sqrt{d}, \quad \frac{2ac^2}{46}.$ sont trois monomes;

$a + 2a^3b, \quad 7 - \sqrt{3}\,ab^2$ sont deux binomes;

$a + 26 - c, \quad 3a^2 + \frac{4a}{5} + \sqrt{\frac{5a^3}{b}}$ sont deux trinomes.

On obtiendrait un polynome en écrivant deux binomes, ou un monome et un trinome. ou un binome et trinome, à la suite l'un de l'autre.

Un terme d'un polynome est dit *positif* ou *négatif* suivant qu'il est précédé du signe + ou du signe —.

Les termes qui ne sont affectés d'aucun signe sont positifs.

Pour indiquer une opération à effectuer sur deux ou plusieurs polynomes, on enferme chacun d'eux dans une parenthèse et on sépare chaque parenthèse par le signe de l'opération.

$(a+b) - (c+d)$ signifie qu'il faut retrancher $c+d$ de $a+b$.

$(a+b) \times (c+d)$ signifie qu'il faut multiplier $a+b$ par $c+d$. On écrit aussi $(a+b)\ (c+d)$.

381. On dit qu'un polynome est du 2e, 3e, etc., *degré* quand il renferme des termes où il y a une lettre affectée de l'exposant ^{2}, ^{3}, etc., soit comme indice de puissance, soit comme indice de racine.

On ne tient pas compte des coefficients pour déterminer le degré d'un polynome.

$3ab + c^2 - a$ est un trinome du 2e degré.

$5a^4 + 6abc$ est un binome du 4e degré.

382. Quand on a plusieurs termes où figure la même lettre affectée d'exposants différents, on peut les écrire les uns à la suite des autres dans un ordre quelconque, car le total des quantités positives et le total des quantités négatives seront toujours les mêmes.

Mais il est préférable de les disposer suivant l'ordre de grandeur de leurs exposants. On dit alors que le polynome est ordonné suivant la grandeur croissante ou décroissante de ses exposants.

Ainsi $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, cube de $a+b$, est ordonné suivant la grandeur décroissante des exposants de a et la grandeur croissante des exposants de b.

383. On dit que des termes sont semblables quand ils ne diffèrent que par leurs signes + ou — et par leurs coefficients :

$+4a^3b$ et $-2a^3b$ sont des termes semblables dont l'ensemble équivaut à $2a^3b$.

2° RÉDUCTION.

384. *On peut toujours réduire plusieurs termes semblables en un seul :*

$$a+9b-4b+8b=a+13b.$$

Le coefficient 13 des termes semblables s'obtient en faisant la somme des coefficients positifs et en retranchant la somme des coefficients négatifs. Le résultat de la réduction peut être négatif comme dans $a+9b-4b-8b=a-3b$.

Voici trois exemples de réduction donnés par Francœur dans son *Cours de Mathématiques pures ;*

$$3abc^2-abc^2-bc^2+2bc^2+a^2d^2=2abc^2+bc^2+a^2d^2,$$

$$2a-3b+a-c+3b=3a-c,$$

$$3b+2ac-5b-3ac+ac+d=d-2b.$$

II

OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES.

1° ADDITION.

385. *Pour additionner plusieurs quantités, il faut les écrire les unes à la suite des autres avec leurs signes, et les réduire s'il y a lieu.*

Pour ajouter $b+c$ à a, il faut écrire $a+b+c$; pour ajouter $b-c$ à a, il faut également écrire $a+b-c$; pour ajouter $a+5b+ac-b+ad-f$ à $7a-8b$, il faut écrire $7a-8b+a+5b+ac-b+ad-f$;

Ou encore $7a+a+5b-8b-b+ac+ad-f$;

Soit $8a-4b+ac+ad-f$.

En effet, si l'on réunit toutes les quantités positives et toutes les quantités négatives, il faudra évidemment retrancher la somme des dernières de celle des premières pour obtenir le résultat.

En réalité, il n'y a pas d'addition dans l'algèbre; il n'y a qu'une réduction, et toute l'opération consiste à réunir les termes semblables de manière à faciliter le calcul.

2° SOUSTRACTION.

386. *Pour soustraire un polynome d'un autre, il faut en changer tous les signes, l'écrire, ainsi modifié, à la suite de l'autre, puis réduire s'il y a lieu.*

Car retrancher $c-d$ de $a-b$ revient à retrancher la quantité qui, ajoutée à $c-d$, reproduira $a-b$; or cette quantité ne pourra être que celle qui fera disparaître de la donnée $(a-b)-(c-d)$ la partie $c-d$, c'est-à-dire $-c+d$, car $(a-b)-(c-d)+(-c+d)=a-b$.

Rappelons que toute quantité négative est supposée moindre que zéro.

3° MULTIPLICATION.

387. *Pour multiplier deux quantités* A *et* B, *il faut multiplier successivement tous les termes de* A *par chaque terme de* B, en observant les règles suivantes particulières à la multiplication d'un terme par un autre terme.

1° Faire le produit des coefficients;

2° Réunir toutes les lettres des deux facteurs;

3° Représenter les lettres semblables par une seule, en affectant celle-ci de l'exposant qui lui convient, § **61**;

4° Donner au produit le signe +, quand les termes sont tous deux positifs ou tous deux négatifs, et le signe — quand un des termes étant positif, l'autre est négatif § **141**.

On trouve ainsi que le produit des deux monomes $6a^3b \times 5ab^2c = 30a^3bab^2c = 30a^4b^3c$.

CANON DE LOGARITHMES DE WRONSKI.

				0000 0103 0206 9897	4139 4242 4345 4036	7918 8021 8124 7815	1394 1497 1600 1291	4613 4716 4819 4510	7609 7712 7815 7506	0412 0[illegible]15 0618 0309	3045 3148 3251 2942	5527 5630 5733 5424	7875 7978 8081 7772		A
10 20	20 40	40 80	50 100	10. 0 20. 3 40. 6 50. 6	11. 0 22. 3 44. 6 55. 7	12. 0 24. 3 48. 6 60. 7	13. 1 26. 4 52. 7 65. 8	14. 1 28. 4 56. 7 70. 8	15. 1 30. 4 60. 7 75. 8	16. 2 32. 5 64. 8 80. 9	17. 2 34. 5 68. 8 85. 9	18. 2 36. 5 72. 8 90. 9	19. 2 38. 5 76. 8 95. 9	1 0.5 2 1 4 2 5 2.5	B
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5	0.2 0.4 0.6 0.8 1.0	0.4 0.8 1.2 1.6 2.0	0.5 1.0 1.5 2.0 2.5	0432 0860 1284 1703 2119	0393 0783 1169 1551 1931	0361 0718 1073 1424 1773	0333 0663 0991 1316 1639	0309 0616 0921 1223 1524	0289 0575 0866 1143 1424	0271 0540 0807 1072 1336	0255 0508 0760 1010 1259	0241 0480 0718 0955 1190	0228 0455 0681 0905 1128	0.9 0.8 0.7 0.6 0.5	C 1
0.6 0.7 0.8 0.9 1.0	1.2 1.4 1.6 1.8 2.0	2.4 2.8 3.2 3.6 4.0	3.0 3.5 4.0 4.5 5.0	2531 2938 3342 3743 4139	2307 2680 3049 3416 3779	2119 2462 2803 3141 3476	1960 2278 2594 2907 3219	1822 2119 2413 2706 2996	1703 1981 2257 2531 2803	1599 1860 2119 2377 2633	1506 1752 1997 2240 2482	1424 1657 1889 2119 2348	1351 1572 1792 2010 2228	0.4 0.3 0.2 0.1 0.0	C 2
.01 .02 .03	.02 .04 .06	.04 .08 .12	.05 .10 .15	043 086 130	039 079 118	036 072 108	033 067 100	031 062 093	029 058 087	027 054 081	025 051 076	024 048 072	023 046 068	022 043 065	D 1
.04 .05 .06	.08 .10 .12	.16 .20 .24	.20 .25 .30	173 216 259	157 197 236	144 180 216	133 166 200	124 155 185	115 144 173	108 135 162	102 127 153	096 120 144	091 114 137	087 108 130	D 2
.07 .08 .09	.14 .16 .18	.28 .32 .36	.35 .40 .45	302 346 389	275 214 354	252 288 324	233 266 300	216 247 278	202 231 260	180 216 244	178 204 229	168 192 217	160 182 205	152 173 195	D 3
				04, 23 08, 27 12, 31 16, 35 20, 39	03, 20 07, 23 10, 26 13, 29 16, 33	03, 17 06, 19 08, 22 11, 25 14, 28	02, 14 05, 17 07, 19 09, 21 12, 24	02, 12 04, 14 06, 16 08, 18 10, 21	02, 11 04, 13 05, 14 07, 16 09, 18	02, 10 03, 11 05, 13 06, 14 08, 16	01, 08 03, 10 04, 11 06, 13 07, 14	01, 08 03, 09 04, 10 05, 11 06, 13	01, 07 02, 08 03, 09 04, 10 06, 11	1,6 2,7 3,8 4,9 5,10	E
I,	II,	III,	IV,	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	

De même $-5a^2b \times -7a^4c = +35a^6bc$,

De même $-5a^2b \times 7a^4c = -35a^6bc$,

$(+5a^2b) \times (-7a^4c) = -35a^6bc$.

La dernière règle (celle des signes) s'écrit ainsi :

$$+\times+=+, \quad +\times-=-, \quad -\times+=-, \quad -\times-=+.$$

388. Si, au lieu d'avoir un monome à multiplier par un monome, on a un polynome à multiplier par un monome, on multiplie isolément chaque terme du multiplicande par le multiplicateur, et on écrit à la suite les uns des autres les produits qui résultent de ces multiplications partielles; puis on réduit s'il y a lieu.

$$\begin{array}{r} 3a + 6a^2c + 4ac^3 - 8d - 12abcd \\ ab^2 \\ \hline 3a^2b^2 + 6a^3b^2c + 4a^2b^2c^3 - 8ab^2d - 12a^2b^3cd \end{array}$$

389. Si l'on a un polynome à multiplier par un polynome, on fera successivement le produit de tous les termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, et on réduira s'il y a lieu.

L'exemple suivant, emprunté à Reynaud, indique suffisamment la manière de procéder :

$$\begin{array}{lll} \text{Multiplicande...} & a^3 - ba^2 + b^2a - b^3 & \\ \text{Multiplicateur...} & 3a^2 - 3ba - 4b^2 & \\ \hline \text{Produits partiels.} & 3a^5 - 3ba^4 + 3b^2a^3 - 3b^3a^2 \ldots\ldots & 1^{er}\text{ produit.} \\ & \quad - 3ba^4 + 3b^2a^3 - 3b^3a^2 + 3b^4a \ldots\ldots & 2^e\text{ produit.} \\ & \quad\quad - 4b^2a^3 + 4b^3a^2 - 4b^4a + 4b^5. & 3^e\text{ produit.} \\ \hline \text{Produit total....} & 3a^5 - 6ba^4 + 2b^2a^3 - 2b^3a^2 - b^4a + 4b^5. & \end{array}$$

La multiplication du multiplicande par le 1er terme $3a^2$ du multiplicateur a donné le 1er produit partiel; on a obtenu le 2e produit partiel en multipliant le multiplicande par le 2e terme $-3ba$ du multiplicateur; et on a formé le 3e produit partiel en multipliant le multiplicande par le 3e terme $-4b^2$ du multiplicateur. On a placé les termes semblables les uns sous les autres; la somme des produits partiels, réduite à sa plus simple expression, a donné le produit total.

390. Pour *former le produit de plusieurs polynomes*, on les ordonne par rapport à une même lettre; on multiplie ensuite le premier polynome par le second, et on effectue toutes les réductions possibles; le produit des deux premiers polynomes, multiplié par le troisième, donne le produit des trois premiers polynomes; et ainsi de suite.

Remarque. — *Le produit de plusieurs facteurs reste le même dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications*, § **151**.

4° DIVISION.

391. La division sera déduite de la multiplication, puisque le dividende peut toujours être considéré comme un produit dont on connaît l'un des facteurs, le *diviseur*, et dont il s'agit de retrouver l'autre facteur, le *quotient*.

Nous établirons, plus distinctement que nous l'avons fait pour la multiplication, trois cas dans la division :

1° La division d'un monome par un monome;
2° La division d'un polynome par un monome;
3° La division d'un polynome par un polynome.

§ 1. *Division des monomes.*

392. La division des monomes comprend quatre règles :

La règle des lettres. Elle consiste à supprimer dans le dividende les lettres du diviseur.

$$\frac{abcde}{a} = bcde, \text{ car } bcde \times a = abcde.$$

$$\frac{abcde}{ae} = bcd, \text{ car } bcd \times ae = abcde.$$

$$\frac{abcde}{abcde} = 1, \text{ car } abcde \times 1 = abcde.$$

Quand il y a, dans le diviseur, des lettres qui ne se trouvent pas dans le dividende, on obtient un quotient qui s'écrit sous forme fractionnaire :

$\frac{abc}{abn} = \frac{c}{n}$, car, d'après la règle de la multiplication des fractions, $abn \times \frac{c}{n}$ $= \frac{abnc}{n} = abc$; $\frac{abcde}{abnp} = \frac{cde}{np}$, car $abnp \times \frac{cde}{np} = \frac{abcdenp}{np} = abcde$.

La règle des exposants. Elle consiste, quand on a de part et d'autre une même lettre affectée d'exposants différents, à retrancher l'exposant du dividende de celui du diviseur.

1° Si les exposants sont des chiffres, cette règle est évidente, car d'après ce que nous avons vu (**146**) $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$.

Il en est de même quand les exposants sont des lettres, m et n, par exemple, à la condition $m > n$: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

La condition $m > n$ permet de décomposer m en deux parties, l'une égale à n, l'autre égale à $m - n$, soit p; le cas a^{m-n} peut donc s'écrire :

$$\frac{a^{n+p}}{a^n} = a^{(n+p)-n} = a^p.$$

Quand l'exposant du dividende est plus faible que celui du diviseur $m < n$, on peut décomposer n en deux parties : $m + p$; la division $\frac{a^m}{a^n}$ revient à $\frac{a^m}{a^{m+p}}$ et le quotient est évidemment $a^{m-(m+p)} = a^{-p}$.

Nous ne savons ce que peut signifier cette expression a^{-p}; mais nous pouvons trouver une autre expression du quotient, car $\frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{1 \times a^m}{a^m \times a^p} = \frac{1}{a^p}$.

On conclut de là que l'exposant négatif d'une quantité quelconque est égal à une fraction qui a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur cette quantité affectée du même exposant devenu positif.

Quand l'exposant du dividende est égal à l'exposant du diviseur, le quotient est 1. Il est évident que $\frac{a^m}{a^m} = 1$.

On peut dire aussi, d'après la règle que nous venons d'établir : $a^{m-m} = a^0$, d'où il faut conclure, comme nous l'avons déjà vu (**39** et **146**), que l'expression a^0 est égale à l'unité.

La règle des coefficients. Elle consiste à diviser le coefficient du dividende par le coefficient du diviseur, et à donner au quotient le coefficient qui résulte de la division :

$$\frac{12abc}{3a} = 4bc, \text{ car } 3a \times 4bc = 12abc,$$

$$\frac{7abc}{5a} = \frac{7}{5}bc, \text{ car } 5a \times \frac{7}{5}bc = \frac{5 \times 7abc}{5} = 7abc.$$

Si le coefficient du diviseur est plus grand que celui du dividende, la règle ne change pas :

$$\frac{5abc}{7a} = \frac{5bc}{7}, \text{ car } 7a \times \frac{5bc}{7} = \frac{7 \times 5abc}{7} = 5abc.$$

La règle des signes. Elle est la même que dans la multiplication, car :

$$\frac{+ab}{+a} = +b, \quad \frac{+ab}{-a} = -b, \quad \frac{-ab}{+a} = -b, \quad \frac{-ab}{-a} = +b \text{ (§ 143)}.$$

Il résulte de ces règles que :

$$\frac{+40a^4b^3c}{+8a^3b} = +5ab^2c, \quad \frac{+35a^6bc}{-5a^2b} = -7a^4c, \quad \frac{-35a^6bc}{+7a^4c} = -5a^2b$$

$$\frac{-35a^6bc}{-7a^4c} = +5a^2b$$

§ 2. *Division d'un polynome par un monome.*

393. La division d'un polynome par un monome consiste à diviser chaque terme du dividende par le monome diviseur, et à écrire les résultats les uns à la suite des autres, ce qui réduit l'opération à des divisions successives de monome par monome.

Prenant l'exemple du § **388**, dont le produit nous servira de dividende et le multiplicateur de diviseur, on n'éprouvera aucune difficulté à pénétrer dans le mécanisme de l'opération, et la division s'établira d'elle-même comme il suit :

$$3a^2b^2 + 6a^3b^2c + 4a^2b^2c^3 - 8ab^2d - 12a^2b^3cd \left| \frac{ab^2}{3a + 6a^2c + 4ac^3 - 8d - 12abcd} \right.$$

Car divisant le premier terme du dividende $3a^2b^2$ par ab^2, il vient d'abord $3a$, le second terme du dividende b^2a^3c divisé par ab^2 donne $6a^2c$, etc.

Nous allons passer à la division des polynomes qui résume tous les cas précédents.

§ 3. *Division d'un polynome par un polynome.*

394. *Pour diviser deux polynomes, on les ordonne par rapport à une même lettre ; on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, ce qui donne le premier terme du quotient ; on multiplie ensuite ce terme du quotient par le diviseur et on retranche le produit du dividende, puis on recom-*

mence l'opération à nouveau sur le reste; et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne un quotient exact ou un reste qui ne puisse être divisé par le diviseur; dans ce dernier cas, on écrit ce reste en fraction sur le diviseur et l'on place le tout à la suite du quotient.

Supposons que le dividende soit un produit exact du diviseur par le quotient, et prenons pour exemple la multiplication du § **389**, où le produit figurera le dividende et où le multiplicande figurera le diviseur.

	$3a^5 - 6ba^4 + 2b^2a^3 - 2b^3a^2 - b^4a + 4b^5$	$a^3 - ba^2 + b^2a - b^3$
	$-3a^5 + 3ba^4 - 3b^2a^3 + 3b^3a^2$	$3a^2 - 3ba - 4b^2$
1er reste...	$-3ba^4 - b^2a^3 + b^3a^2 - b^4a + 4b^5$	
	$+3ba^4 - 3b^2a^3 + 3b^3a^2 - 3b^4a$	
2e reste...	$-4b^2a^3 + 4b^3a^2 - 4b^4a + 4b^5$	
	$+4b^2a^3 - 4b^3a^2 + 4b^4a - 4b^5$	
3e reste...	0	

La division du 1er terme $3a^5$ du dividende, par le 1er terme a^3 du diviseur, fournit le 1er terme $3a^2$ du quotient.

Pour soustraire du dividende, le produit du diviseur par le 1er terme du quotient, on écrit les termes de ces produits en changeant les signes + en — et les signes — en +. On effectue les réductions des termes semblables, ce qui fournit le 1er reste.

La division du 1er terme $-3ba^4$ de ce reste, par le 1er terme a^3 du diviseur, donne le 2e terme $-3ba$ du quotient.

On retranche du 1er reste le produit du diviseur par $-3ba$, ce qui conduit au 2e reste.

La division du 1er terme $-4b^2a^3$ de ce reste, par le 1er terme a^3 du diviseur, détermine le 3e terme $-4b^2$ du quotient.

On retranche du 2e reste le produit du diviseur par $-4b^2$, le reste zéro fait voir que le quotient obtenu $3a^2 - 3ba - 4b^2$ est exact.

Nous ne nous étendrons pas sur les différents cas de la division algébrique, celui que nous venons de donner suffira à en indiquer le mécanisme. On n'a que fort rarement, dans la pratique du calcul, à exécuter des divisions de polynomes par des polynomes.

4° QUOTITÉS ALGÉBRIQUES.

395. Le reste de la division nous conduit à traiter ici des fractions et des nombres fractionnaires dont les lois sont les mêmes en algèbre qu'en arithmétique.

Nous allons nous reporter aux paragraphes où nous avons parlé des quotités numériques, et en énoncer les lois sous forme algébrique.

1° Toute division d'une quantité quelconque A par une autre quantité quelconque B a pour quotient la quotité $\frac{A}{B}$ (**193**).

2° Quand $A = B$ le quotient est égal à 1 (**194**).

3° Une quotité quelconque est égale à son carré divisé par la quantité elle-même : $a = \frac{a^2}{a}$ (**196**).

4° Quand la quantité a est négative, son expression sous forme de quotité est négative : $-a = -\frac{a^2}{a}$ (**197**).

5° Une quotité quelconque $\frac{a}{b}$, dont on multiplie les deux termes par une même quantité quelconque m, donne $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b} \times 1$; et, comme à la place de m on peut mettre tous les nombres possibles, il en résulte que la quotité $\frac{a}{b}$ a un nombre infini d'expressions équivalentes § **198**.

6° Pour additionner ou soustraire des quotités algébriques, il faut multiplier chaque numérateur par le produit des dénominateurs de toutes les autres quotités, et mettre le résultat en fraction sur le produit de tous les dénominateurs.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+cbf+edb}{bdf}$$ (**218** *et suivants*).

7° Quand les deux facteurs d'un produit sont une quotité $\frac{a}{b}$ et un nombre quelconque m, le produit est $\frac{am}{b}$.

On remarquera que $\frac{a}{mb} \times b = \frac{ab}{mb} = \frac{a}{m}$ (**221** *et suivants*).

396. Quand les différents facteurs d'un produit sont des quotités, le produit se compose du produit de tous les numérateurs en fraction sur le produit de tous les dénominateurs.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$$ (**224** *et suivants*).

On remarquera que l'on peut supprimer une quantité qui figure comme facteur dans les deux termes.

$$\frac{a^2b^3cd}{abe} = \frac{aabb^2cd}{abe} = \frac{ab^2cd \times ab}{e \times ab} = \frac{ab^2cd}{e} \times 1 = \frac{ab^2cd}{e}.$$

397. Si les facteurs sont quelconques, soit $\left(a+\frac{b}{c}\right) \times \left(m+\frac{p}{q}\right)$ il vient $\frac{(ac+b) \times (mq+p)}{cq}$.

398. Il est facile de déduire les lois de la division de celles de la multiplication :

$\frac{a}{b}$ divisé par $c = \frac{a}{bc}$, $\frac{am}{b}$ divisé par $m = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}$ divisé par $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$,

$\left(a+\frac{b}{c}\right)$ divisé par $\left(m+\frac{p}{q}\right) = \frac{q \times (ac+b)}{c \times (mq+p)}$ (§ **227** *et suivants*).

399. Pour élever une quotité $\frac{a}{b}$ à une puissance quelconque m, il faut élever chacun de ses deux termes à la puissance m : $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (§ **233**).

La racine $m^{ième}$ d'une quotité $\frac{a}{b}$, $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ § **234.**

Examinons maintenant, sous un point de vue plus général, la théorie des puissances et des racines algébriques.

5. PUISSANCES ET RACINES.

400. Pour élever un monome à une puissance, il faut multiplier l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la puissance, et élever les coefficients à la puissance indiquée.

$$(5ab^2)^3 = 125a^3b^6, \quad \left(\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^5 = \frac{3^5a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$$

Si l'exposant m d'une puissance peut se décomposer en facteurs: $m = np$, on a $a^m = (a^n)^p$

Soit $m = 18 = 2 \times 3^2 = 2 \times 3 \times 3$ on aura, si l'on veut trouver la puissance 18ème de a : $a^{18} = [(a^2)^3]^3$.

De même, si l'on veut obtenir la racine 18ème de a, on trouvera :

$\sqrt[18]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$, ce qui veut dire qu'il faut extraire $\sqrt[3]{a}$ puis $\sqrt[3]{}$ du résultat, puis enfin $\sqrt[2]{}$ de la dernière racine.

On verrait que $\sqrt[12]{531441} = 3$ par les opérations successives $\sqrt{531441} = 729$, $\sqrt{729} = 27$, $\sqrt[3]{27} = 3$.

401. Pour extraire la racine d'un monome, il faut diviser les exposants de chaque terme par l'exposant de la racine, et extraire la racine des coefficients :

$$\sqrt{4a^2b^4} = 2ab^2 \quad \sqrt[5]{\frac{243a^{10}b^5}{c^5d^{10}}} = \frac{3a^2b}{cd^2}$$

402. Quand le degré de la racine est pair, la racine doit être précédée du signe $\pm$: $\sqrt[12]{531441} = \pm 3$ car $+3^{12}$ et -3^{12} donnent également $+531441$.

403. Si le degré de la racine est impair, on donne à la racine le signe de la puissance, $\sqrt[3]{729} = +27$; $\sqrt[3]{-729} = -27$.

404. Une racine paire d'une quantité négative n'a pas d'expression; on dit qu'elle est *imaginaire*.

405. Pour élever à une puissance un monome déjà affecté d'un radical, il faut élever à cette puissance chaque facteur sous le radical.

Ainsi $(\sqrt{3a^2b})^3 = \sqrt{27a^6b^3}$, $(\sqrt{9})^3 = \sqrt{729}$.

406. Pour extraire une racine d'un monome déjà affecté d'un radical, il faut, s'il est possible, extraire la racine de la quantité radicale, sinon, multiplier l'indice du radical par le degré de la racine à extraire :

$$\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^5})} = \sqrt[9]{a^5}, \quad \sqrt{\sqrt[5]{(a^2b^4)}} = \sqrt[5]{ab^2}.$$

407. On ne change pas la valeur d'une quantité affectée d'un radical quand on multiplie ou divise à la fois l'exposant de la quantité et l'indice de sa racine par un même nombre :

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}, \qquad \sqrt{3\,a^2b^3} = \sqrt[4]{9\,a^4b^6}.$$

Il résulte de là que $\sqrt{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[10]{a^5b^2}$.

408. Nous avons déjà vu (**391**) que le quotient $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ quand $m > n$, soit $m - n = p$, on a $a^{m-n} = a^p$; mais quand $m < n$, soit $m - n = -p$, on a $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$; et quand $m = n$, on a $a^{m-n} = a^0 = 1$.

Il résulte de là que l'on peut, dans une quotité, faire passer un facteur du dénominateur au numérateur en donnant à son exposant un signe négatif.

$$\frac{a^3 + b^4}{c^8} = (a^3 + b^4)\,c^{-8}.$$

409. Si l'on veut diviser $\sqrt[5]{a^3b^4}$ par $\sqrt[7]{a^2b^3}$ il vient, d'après ce que nous venons de dire $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{4}{5}}$ divisé par $a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$.

Et réduisant les exposants au même dénominateur :

$$a^{\frac{21}{35}}\,b^{\frac{28}{35}} \text{ divisé par } a^{\frac{10}{35}}\,b^{\frac{15}{35}} = a^{\frac{21-10}{35}}\,b^{\frac{28-15}{35}} = a^{\frac{11}{35}}\,b^{\frac{13}{35}} = \sqrt[35]{a^{11}b^{13}}.$$

Ces considérations sommaires suffiront pour donner une idée de la manière dont il faut traiter les quantités exprimées sous forme algébrique.

III

RAPPORTS.

1° PROPORTIONS.

410. L'équidifférence $a-b=c-d$ donnera donc $a+d=c+b$ (§ **276**). Si elle est continue, on a $a-b=b-d$, soit $2b=a+d$ (§ **297**).

411. L'équiquotient $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ donnera $ad=bc$, d'où $d=\frac{bc}{a}$ (§ **277**).

S'il est continu $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$, on a $b=\sqrt{ad}$ (§ **296**).

412. Si l'on ajoute ou retranche une quantité quelconque ($\pm m$) aux deux membres de l'équiquotient $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ on a $\frac{a\pm mb}{b}=\frac{c\pm md}{d}$ d'où $\frac{a\pm mb}{c\pm md}=\frac{b}{d}$.

Si $m=1$ $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}$ (§ **290** *et suivants*).

413. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ donne $\frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}$ et $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$ (§ **286**).

2° PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE.

414. La progression $\div\ a.b.c.d\ldots k.l$ dont d est la codifférence et n le nombre des termes, donne, $n-1$ équations successives :

$$b=a+d,\ c=b+d\ldots l=k+d.$$

Et si on ajoute ces équations, on trouve $l=a+d\,(n-1)$ (A).

Cette équation d'ensemble est la formule qui donne la valeur du $n^{ième}$ terme de la progression. n étant un terme quelconque de la progression, la formule (A) exprime la valeur d'un terme quelconque d'une progression par différence quand on remplace $n^{ième}$ par un des nombres quelconques 2°, 3°, 4°, 5°...

415. Appelons s la somme de la progression, ou seulement la somme des n premiers termes, on a

$$s=a+b+c+d\ldots+k+l.$$
$$=a+(a+d)+(a+2d)\ldots+a+(n-1)\,d,\ \text{progression directe.}$$
$$=l+(l-d)+(l-2d)\ldots+l-(n-1)\,d,\ \text{progression inverse.}$$

Si nous ajoutons ces deux dernières équations, leur somme sera la double somme des termes ; soit $2s=(a+l)\,n$, car la somme de deux termes correspondants, en haut et en bas, est toujours la même, et il y aura autant de ces sommes qu'il y a de termes n dans la progression.

La somme simple s des termes de la progression sera donc $s=\frac{(a+l)n}{2}$ (B).

416. Les deux équations (A) et (B) nous permettront de tirer une quelconque des cinq quantités a, l, d, n et s, connaissant trois des autres.

Voici les différeutes valeurs de ces quantités, telles que les présente Reynaud dans ses éléments d'algèbre.

DONNÉES.	INCONNUES.	VALEUR DES INCONNUES.
a, d, n	l, s	$l=a+(n-1)d,\ s=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}.$
s, d, n	a, l	$a=\frac{2s-n(n-1)d}{2n},\ l=\frac{2s+n(n-1)d}{2n}.$
l, d, n	a, s	$a=l-(n-1)d,\ s=\frac{1}{2}n\{2l-(n-1)d\}.$
a, l, n	s, d	$s=\frac{1}{2}n(a+l),\ d=\frac{l-a}{n-1}.$
a, s, n	l, d	$l=\frac{2s}{n}-a,\ d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}.$
l, s, n	a, d	$a=\frac{2s}{n}-l,\ d=\frac{2(nl-s)}{n(n-1)}.$
a, l, d	n, s	$n=\frac{l-a}{d}+1,\ s=\frac{(l+a)(l-a+d)}{2d}.$
a, s, d	n, l	$n=\frac{(d-2a)\pm\sqrt{(d-2a)^2+8ds}}{2d},\ l=a+(n-1)d.$
l, d, s	n, a	$n=\frac{(d+2l)\pm\sqrt{(d-2l)^2-8ds}}{2d},\ a=l-(n-1)d.$
a, l, s	n, d	$n=\frac{2s}{a+l},\ d=\frac{(l+a)(l-a)}{2s-(l+a)}.$

§ 3. PROGRESSIONS PAR QUOTIENT.

417. La progression $\div\!\div a:b:c:d\ldots k:\ l$, dont la raison est q, donne les $n-1$ équations :

$$b=aq,\ c=bq\ldots\ l=kq.$$

Si on multiplie toutes les équations terme à terme, et si l'on supprime les facteurs communs, il vient :

$$l=aq^{n-1}\ \text{(C)}.$$

l est le terme général d'une progression par quotient. On pourra indistinctement remplacer $l^{ième}$ par 2e, 3e, 4e... qui indique le rang du terme.

418. On peut toujours représenter une progression par quotient sous la forme :

$$\div\!\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots\ aq^{n-1}.$$

Et si $a=q$ on verra que les puissances entières et consécutives d'une même quantité q sont en progression par quotient.

Il en est de même de toute série de termes dont les exposants sont en progression par différence, telle que bx^m, bx^{m-n}, qui se ramène à la précédente quand on fait $a=bx^m, q=x^n$.

419. Si nous ajoutons les $(n-1)$ équations du § **417**, on trouve

$$(b+c+d\ldots+l)=(a+b+c\ldots k)q.$$

s étant la somme, on a

$$b+c+d\ldots+l=s-a.$$
$$a+b+c\ldots+k=s-l.$$

Donc $s-a=(s-l)q$ et $s=\dfrac{lq-a}{q-1}$ (D).

Tout ceci est vrai quand la progression est décroissante seulement q est une fraction.

420. Les deux équations (C) et (D) nous permettent de tirer une valeur quelconque des cinq quantités a, l, q, n, s, en fraction de trois des autres, comme on le voit dans le tableau ci-contre dressé par Reynaud.

DONNÉES.	INCONNUES.	VALEUR DES INCONNUES.
a, q, n	l, s	$l=aq^{n-1}, \quad s=\frac{a(q^n-1)}{(q-1)}.$
s, q, n	a, l	$a=\frac{s(q-1)}{q^n-1}, \quad l=\frac{s(q-1)q^{n-1}}{q^n-1}.$
l, q, n	a, s	$a=\frac{l}{q^{n-1}}, \quad s=\frac{(q^n-1)p}{(q-1)q^{n-1}}.$
a, l, n	q, s	$q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}, \quad s=\frac{l\sqrt[n-1]{l}-a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}.$
a, s, n	q, l	$q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2+q+1=\frac{s}{a}, \quad l=aq^{n-1}.$
l, s, n	q, a	$(s-l)q^{n-1}-l(q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots+q^2+q+1)=0, a=\frac{l}{q^{n-1}}.$
a, l, q	s, n	$s=\frac{lq-a}{q-1}, \quad n=1+\frac{\log. l-la}{\log. q}$ (*).
a, s, q	l, n	$l=\frac{a+s(q-1)}{q}, \quad n=\frac{\log.(sq-s+a)-\log. a}{\log. q}.$
l, q, s	a, n	$a=lq-s(q-1), \quad n=1+\frac{\log. l-\log.(lq+s-sq)}{\log. q}.$
a, l, s	l, n	$q=\frac{s-a}{s-l}, \quad n=1+\frac{\log. l-\log. a}{\log.(s-a)-\log.(s-l)}.$

(*) Cette formule indique qu'il faut prendre les logarithmes de l et de q.

CHAPITRE II

THÉORIE DES QUANTITÉS FIXES. — IIe PARTIE

DES ÉQUATIONS.

I

GÉNÉRALITÉS.

421. Nous avons déjà vu (**253**) qu'une équation est une égalité entre des quantités dont quelques-unes sont connues et dont d'autres sont inconnues.
On distingue en algèbre autant de degrés dans les équations qu'il peut y avoir de degrés, § **381**, quand on ne considère que les inconnues.
Le degré d'une équation est donc marqué par la plus haute puissance de l'inconnue qu'elle contient.

Les inconnues étant toujours désignées par x, y, z, et les connues par les autres lettres de l'alphabet, $3ax+b=5x$ est une équation du 1er degré.

$ax^2+da=c$ est une équation du 2e degré.

$ax^6+5bdx^3+cx=K$ est une équation du 6e degré.

Examinons d'abord comment on doit traiter les équations pour les ramener à leur forme la plus simple.
Ce traitement consiste à faire disparaître tous les diviseurs, à réunir dans un membre de l'équation toutes les quantités connues et dans l'autre membre les quantités inconnues.

Nous en avons donné une première idée dans la IIIe Partie du chapitre Ier, *Relations des nombres*, §§ **252** à **266**.

II

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

1° ÉQUATIONS A UNE SEULE INCONNUE.

422. Toute équation du premier degré peut être ramenée à la forme $Ax = B$. A représente tous les termes connus qui multiplient x, et B, tous les termes connus indépendants de x, en sorte que la dernière expression de l'équation sera $x = \frac{B}{A}$.

Ramener une équation à sa dernière expression s'appelle *résoudre l'équation.*

423. 1° *Quand on ajoute ou retranche une même quantité à deux quantités égales, les nouvelles quantités sont encore égales.*

2° *Quand on multiplie ou divise, par une même quantité, deux quantités égales, les nouvelles quantités sont encore égales.*

Il résulte (de 1°), que pour faire passer un terme d'un membre dans l'autre membre de l'équation, il suffit de changer le signe de ce terme;

Si $x + a = b$, $x - a + a = b - a$, et $x = b - a$.

Si $x - a = b$, $x + a - a = b + a$, et $x = b + a$.

On conclut (de 2°), que pour faire disparaître un dénominateur d'une équation, il faut en multiplier les deux membres par ce dénominateur.

Si $\frac{x}{a} = b$, $\frac{xa}{a} = ba$ et $x = ba$.

424. Prenons des équations plus compliquées.

Soit $\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}a - 24 = \frac{1}{4}a - bx$.

Il faut d'abord faire disparaître les dénominateurs. On y parvient en multipliant tous les termes par chaque dénominateur.

On obtiendra donc successivement les équations:

$$\frac{4}{2}x + \frac{4}{5}a - 24 \times 4 = a - 4bx.$$

$$\frac{20}{2}x + 4a - 24 \times 4 \times 5 = 5a - 20bx.$$

$$20x + 2 \times 4a - 24 \times 4 \times 5 \times 2 = 2 \times 5a - 2 \times 20bx.$$

$$20x + 8a - 960 = 10a - 40bx.$$

On fera ensuite passer dans un des membres tous les termes qui renferment des inconnues, et on réunira dans l'autre membre les termes connus:

On aura donc successivement :

$$40bx+20x + 8a-960=10a.$$
$$40bx+20x = 10a-8a+960$$
$$(40b+20)x = 2a+960$$
$$\text{d'où} \quad x = \frac{2a+960}{40b+20}$$

Quand il y a un dénominateur commun, l'opération est plus rapide.

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x-20-\frac{1}{6}x=\frac{3}{4}x-\frac{1}{12}x-8$$

Multipliant tout par 12, dénominateur commun, il vient :

$$8x+6x-240-2x=9x-x-96.$$
$$12x-240=8x-96$$
$$(12-8)x=240-96$$
$$x = \frac{144}{4}=36.$$

Voici deux autres exemples tirés du cours de mathématiques de Francœur,

1°. $\frac{ax}{b}+\frac{cx}{f}+m=px+\frac{cx}{f}+n$; supprimant la fraction $\frac{cx}{f}$ commune aux deux membres, on a $\frac{ax}{b}+m=px+n$; multipliant tout par b, il vient $ax+bm=bpx+bn$; transposant bm et bpx, on a $ax-bpx=bn-bm$, ou $x(a-bp)=b(n-m)$; en divisant par $a-bp$, il vient enfin

$$x=\frac{b(n-m)}{a-bp}.$$

2° $\frac{6}{5}x-90+\frac{2}{3}x=\frac{4}{3}x-82$; transposant, on trouve :

$\frac{6}{5}x+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}x=90-82$, qui se réduit à $\frac{6}{5}x-\frac{2}{3}x=8$,

multipliant tout par 15 ou 3×5, on a

$$18x-10x=8\times15 \text{ ou } 8x=120 \text{ et enfin } x=15.$$

425. Remarquons avec Reynaud que *toute équation algébrique peut être considérée comme l'énoncé d'un problème.*

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=63$ est la traduction algébrique du problème :

Quel est le nombre x dont le tiers augmenté du quart donne 63 ? On trouvera : $7x=12\times63$ d'où $x=\frac{12\times63}{7}=108$

Si l'on veut savoir quel est le nombre x dont le cinquième augmenté du

sixième donne 22, on trouvera $\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}=22$ d'où $11\,x=30\times 22$ et x $=\frac{30\times 21}{11}=60$.

Remplaçons les chiffres par des lettres, les deux équations numériques que nous venons de traiter auront une expression commune.

$$\frac{1}{m}x+\frac{1}{n}x=a \text{ d'où l'on tire } x=\frac{amn}{m+n}.$$

Ce qui veut dire que la $m^{ième}$ partie d'un nombre ajoutée à la $n^{ième}$ partie d'un nombre étant égale à a, le nombre sera égal à a multiplié par le produit $m\times n$ et divisé par la somme $m+n$.

L'expression $x=\frac{amn}{m+n}$ est la *formule* qui indique le calcul à opérer sur les problèmes du même genre.

2° ÉQUATIONS A PLUSIEURS INCONNUES.

426. Dans tout ce qui précède nous n'avons eu qu'une inconnue à déterminer pour chaque équation. Examinons les cas où nous aurons plusieurs inconnues à déterminer, et admettons que nous ayons autant d'équations différentes qu'il y a d'inconnues.

Si nous n'avions qu'une équation pour deux inconnues, il serait impossible de déterminer la valeur de chaque inconnue.

Soit $a+b=x+y$; si nous supposons que a et b soient deux nombres connus tels que 17 et 8, l'équation deviendra $17+8=x+y$, soit $25=x+y$.

Alors $x=25-y$ et $y=25-x$; ces équations traitées de toutes les manières possibles ne nous conduiront à aucune solution.

On pourrait dire également que ces équations nous conduiront à une infinité de solutions; car, pour chaque valeur donnée à une des inconnues, on trouvera une valeur différente pour l'autre inconnue.

En effet, l'équation $25=x+y$ ou $x=25-y$ donnera pour x : 3, 2, 3, 4, 5... suivant que l'on fera $y=24$, 23, 22, 21, 20...

Si l'on faisait $y=-1, -2, -3...$, x serait égal à 26, 27, 28... à l'infini.

La valeur de x dépendant ici de celle de y, on dit que x est en *fonction* de y. C'est le point de départ de la théorie des quantités variables dont nous n'avons pas à nous occuper ici.

427. Si nous avons au contraire deux équations différentes dans lesquelles les inconnues x et y se trouvent comprises, on fera disparaître, ou plutôt on éliminera l'une des inconnues en la traduisant par une certaine valeur de l'autre inconnue, et on réduira le problème à une seule équation à une seule inconnue.

Soit (1°) $5\,x-3\,y=1$. (2°) $7\,y-4x=13$.

On tirera de (1°) $x=\frac{3y+1}{5}$ et le second membre qui est l'expression de x sera *substitué* à la valeur de x dans (2°) qui devient $7\,y-4\times\frac{3y+1}{5}=13$.

Cette équation donne une valeur déterminée pour y, car multipliant tous les termes par 5, il vient :

$$35y-12y-4=13\times 5.$$

Réunissant les valeurs de l'inconnue dans un membre, et les valeurs connues dans l'autre, il vient :

$$35y - 12y = (13 \times 5) + 4, \text{ soit } 23y = 69, \text{ d'où } y = \frac{69}{23} = 3.$$

La valeur de y étant connue, on la substitue dans l'équation (1°), qui devient $5x - 3 \times 3 = 1$, d'où $5x = 10$, et $x = 2$. Cette méthode est dite de *substitution.*

428. On aurait pu chercher la valeur des inconnues par voie de *comparaison*, c'est à dire en déterminant la valeur d'une même inconnue dans les deux équations, et en égalant ces valeurs entre elles; on aurait trouvé par là dans l'équation (1°) $x = \frac{3y+1}{5}$ et dans (2°) $x = \frac{7y-13}{4}$.

On obtient alors l'équation à une seule inconnue $\frac{3y+1}{5} = \frac{7y-13}{4}$ dans laquelle, supprimant les dénominateurs, on trouve en multipliant tout par 4 : $4 \times \frac{3y+1}{5} = 7y - 13$, puis en multipliant par 5 : $4 \times (3y+1) = 5 \times (7y-13)$, d'où l'on tire comme ci dessus $y = 3$.

429. La méthode la plus généralement employée est celle dite par *sommation* (*); elle consiste à ajouter ou à soustraire les deux équations terme à terme, de manière à supprimer l'un des membres de chacune d'elles quand l'une des inconnues a le même coefficient de part et d'autre.

Si l'on a $x + y = 12$, $x - y = 6$, on fait $x + y - x + y = 12 - 6$ d'où $2y = 6$, et $y = 3$; ici le coefficient commun aux inconnues est 1.

Quand l'une des inconnues n'a pas le même coefficient dans les deux équations, ainsi qu'il arrive dans l'exemple $5x - 3y = 1$ et $7y - 4x = 13$, on obtient un nouveau système d'équations en multipliant tous les termes de chacune des équations proposées par le coefficient que l'inconnue à supprimer présente dans l'autre équation.

Si donc nous voulons supprimer x dans (1°) et (2°) nous multiplierons tous les termes de (1°) par 4, coefficient de x dans (2°), et tous les termes de (2°) par 5, coefficient de x dans (1°); on obtient ainsi les nouvelles équations: $20x - 12y = 4$ et $35y - 20x = 65$.

Si l'on ajoute ces deux équations membre à membre, il vient :

$$20x - 12y + 35y - 20x = 65 + 4\,; \text{d'où } 23y = 69, \text{ soit } y = 3.$$

Ce dernier procédé est le plus usité.

430. Nous n'avons parlé que de deux équations à deux inconnues; les procédés sont les mêmes pour trois équations à 3 inconnues, 4 équations à 4 inconnues, n équations à *n inconnues*, car on élimine d'abord une inconnue en fonction des autres, ce qui laisse $n - 1$ équations à $n - 1$ inconnues; on en fait autant sur les nouvelles équations, ce qui laisse $n - 2$ équations à $n - 2$ inconnues; on continue ainsi jusqu'à ce que l'on n'ait plus qu'une équation à une inconnue. On détermine alors la valeur de cette inconnue, on substitue cette valeur dans le système de deux équations à deux inconnues, ce qui donne la valeur d'une nouvelle inconnue, etc.

Soit les trois équations $3x + 2y + z = 16$ (A).

$2x + 2y + 2z = 18$ (B).

$2x + 2y + z = 14$ (C).

(*) On applique le terme général de *sommation* à toutes les opérations qui se bornent à des additions et à des soustractions.

Par voie de substitution, on tire de (A) $z = 16 - 3x - 2y$; et cette valeur de z, substituée dans (B) et (C), donne pour (B) $2x + 2y + 2(16 - 3x - 2y) = 18$, et pour (C) $2x + 2y + (16 - 3x - 2y) = 14$, qui ramènent à deux équations à 2 inconnues.

Tirons dans (B) modifié la valeur de y en fonction de x, il vient :

$$2x + 2 \times 16 - 2 \times 3x = 18 - 2y.$$

Soit $2y = 4x - 14$, et $y = 2x - 7$ (D).

Substituant enfin cette valeur de y dans (C) modifié, il vient :

$$2x + 2(2x - 7) + 16 - 3x - 2(2x - 7) = 14.$$

Soit $2x + 16 - 3x = 14$ d'où $16 - 14 = x = 2$.

Comme une quantité négative, dans un membre, devient positive dans l'autre, on dispose les opérations de manière à ce que l'équation finale donne un résultat positif.

La valeur de x étant connue, (D) donne $y = 2 \times 2 - 7 = -3$;

Ce qui dans l'équation primitive (A) aboutit à :

$$3 \times 2 + 2 \times 3 - 16 = -z, \text{ soit } z = 4.$$

431. On peut également employer les méthodes d'élimination par voie de *comparaison* et de *sommation*; elles conduiront au même résultat. Ce que nous venons de dire suffit pour initier le lecteur à la méthode générale de résolution des équations du premier degré.

2° FORMULES GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

432. Quand on a fait disparaître tous les diviseurs, quand on a réuni tous les termes semblables, enfin quand on a placé dans un des membres toutes les quantités inconnues; une équation du premier degré peut toujours se ramener à la formule générale :

$$ax + by + cz + \ldots = k.$$

Dans laquelle $a, b, c\ldots$ représentent les coefficients des inconnues et k l'ensemble de tous les termes connus.

Pour exprimer une équation différente de celle-ci, nous nous contenterons d'accentuer les lettres.

$a'x + b'y + c'z \ldots + k'$ sera donc une équation du premier degré dans laquelle a', b', c' représenteront des coefficients différents de a, b, c, et k' une somme différente de k, les inconnues restant les mêmes.

L'équation se lira : *a prime x*, plus *b prime y*, plus *c prime z*... égale *k prime*.

Une équation différente des deux précédentes s'écrira $a''x + b''y + c''z \ldots = k''$ et se lira :

a seconde x, plus *b seconde y*, plus *c seconde z*... égale *k seconde*.

Une quatrième équation $a'''x + b'''y + c'''z = k'''$ se lira *a tierce* plus, etc.

433. Une équation du premier degré à une inconnue pourra donc toujours s'écrire :

$$ax = k, \text{ d'où } x = \frac{k}{a}.$$

434. Deux équations du premier degré à deux inconnues pourront s'écrire :

$$(1°)\ ax + by = k \quad (2°)\ a'x + b'y = k'.$$

Si a et a' sont égaux, il suffira de soustraire l'une de ces équations de l'autre, et x disparaîtra. Dans le cas contraire, on multipliera les termes de la première par a', ceux de la seconde par a, et la soustraction donnera le même résultat, soit :

$$aa'x + ba'y = a'k \text{ et } aa'x + ab'y = ak'.$$

d'où $\quad a'by - ab'y = a'k - ak'$, soit $y\,(a'b - ab') = a'k - ak'$

et $\quad y = \dfrac{a'k - ak'}{a'b - ab'}$ (A).

On trouverait de même $x = \dfrac{b'k - bk'}{a'b - ab'}$ (B).

435. Trois équations à trois inconnues pourront s'écrire :

(1°) $ax + by + cz = k$, (2°) $a'x + b'y + c'z = k'$ (3°) $a''x + b''y + c''z = k''$.

Multiplions tous les termes de la première par n et tous les termes de la seconde par n', (n et n' étant deux nombres que nous déterminerons plus loin), faisons la somme de ces produits, et de cette somme retranchons la troisième équation, nous avons :

$$nax + nby + ncz + n'a'x + n'b'y + n'c'z - a''x - b''y - c''z = nk + n'k' - k''.$$

Soit $(na + n'a')x + (nb + n'b')y + (nc + n'c')z = a''x + b''y + c''z + nk + n'k' - k''$.

Soit encore $(na + n'a' - a'')\,x + (nb + n'b' - b'')\,y + (nc + n'c' - c'')z = nk + n'k' - k''$.

Supposons que $nb + n'b' = b''$ et $nc + n'c' = c''$, il vient :
$(na + n'a' - a'')x = nk + n'k' - k'$, car les deux termes du premier membre se détruisent en se réduisant à zéro;

Alors $x = \dfrac{nk + nk' - k''}{na + n'a' - a''}$ (D).

436. Il faut déterminer les nombres n et n'; faisons-le pour le cas $nb + n'b' = b''$ et $nc + n'c' = c''$, n et n' étant deux inconnues, les deux équations donneront, d'après les formules (A) et (B), § ( ).

$$n = \frac{b'c'' - b''c'}{cb' - c'b} \text{ et } n' = \frac{b''c - bc''}{b'c - bc'}.$$

437. Le dénominateur de (D) $na + n'a' + a'$ deviendra, en remplaçant n' et n' par leurs valeurs :

$$na + n'a' - a'' = \frac{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c''}{cb' - bc'} - a''.$$

Mettant $-a''$ sous forme fractionnaire $\dfrac{-cb'a'' + bc'a''}{cb' - bc'}$, il vient pour expression du dénominateur de la fraction (D) où les termes seront différemment disposés sans être modifiés :

$$\frac{ab'c'' - ba'c'' + bc'a'' - ac'b'' + ca'b'' - cb'a''}{cb' - bc'}.$$

On trouverait de même pour le numérateur de (D), où il suffit de changer les a en k :

$$\frac{kb'c'' - bk'c'' + bc'k'' - kc'b'' + ck'b'' - cb'k''}{cb' - bc'}.$$

Et comme le numérateur et le dénominateur de (D) sont également divisés par $cb' - bc'$ on supprimera en haut et en bas ce binome diviseur et l'on aura pour valeur définitive de x.

$$x = \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'k'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

on trouvera de même : $$y = \frac{ak'c'' - ac'k'' + ca'k'' - ka'c'' + kc'a'' - ck'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

Et enfin : $$z = \frac{ab'k'' - ak'b'' + ka'b'' - ba'k'' + bd'k'' - kb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Ces formules définitives sont très-simples et faciles à reproduire mécaniquement. Elles ont toutes le même dénominateur, et si le numérateur diffère, il consiste, pour la valeur de x, à remplacer a par k, pour celle de y, b par k, pour celle de z, c par k.

Le dénominateur lui-même est facile à former ; puisqu'il résulte des arrangements des trois lettres a, b, c ; a étant placé d'abord en avant, au milieu et à la fin d'abord de bc : abc, bac, bca, puis de cb : acb, cab, cba ; on sépare ces arrangements en leur donnant alternativement les signes + et — (le signe + étant le 1er) puis en mettant l'accentuation ′ sur toutes les secondes lettres, et l'accentuation ″ sur toutes les troisièmes.

438. Quatre équations à quatre inconnues auront des formules déduites de la même loi. Ainsi dans les quatre équations de la forme $ax + by + cz + dt = e$, le dénominateur commun des valeurs de x, y, z, t, est la somme des 24 termes.

$$+ab'c''d''',\ -ab'd''c''',\ +ad'b''c''',\ -da'b''c''',\ -ac'b''d''',\ +ac'b''d''',$$
$$-ad'c''b''',\ +da'c''b''',\ +ca'b''d''',\ -ca'd''b''',\ +cd'a''b''',\ -dc'a''b''',$$
$$-ba'c''d''',\ +ba'd''c''',\ -bd'a''c''',\ +db'a''c''',\ +bc'a''d''',\ -bc'd''a''',$$
$$+bd'c''a''',\ -db'c''a''',\ -cb'a''d''',\ +cb'd''a''',\ -cd'b''a''',\ +dc'b''a'''.$$

Pour en déduire le numérateur de x, il suffit de changer les a en e, et de conserver les accents. On obtiendra le numérateur de y, en changeant les b en e ; et ainsi de suite.

439. Nous avons examiné le cas le plus complet, celui où il y a autant d'inconnues que d'équations, et où toutes les inconnues entrent dans chaque équation.

S'il y avait plus d'équations différentes que d'inconnues, on ne garderait qu'un nombre d'équations égal à celui des inconnues, en choisissant les équations qui renferment toutes les inconnues.

440. Dans le cas où, ayant autant d'équations que d'inconnues, une équation ne renferme pas toutes les inconnues, on commence par en tirer la valeur d'une des inconnues et à la substituer dans les autres équations, ce qui ramène le système à une équation et à une inconnue de moins. Si alors il y a encore une équation qui ne renferme pas toutes les inconnues, on opère de même, et on a deux équations et deux inconnues de moins. On continue de la sorte jusqu'à ce que l'on retombe soit dans le cas général qui précède, soit dans le cas de deux équations à deux inconnues, dont on trouve la formule au § (**434**) soit enfin à une équation à une inconnue dont on trouve la formule plus simple encore au § (**433**).

441. Les quantités connues peuvent être des puissances ou des racines sans que rien soit changé aux principes que nous venons de poser pour les équations

du premier degré. Le degré des équations n'étant déterminé que par les puissances ou les racines des inconnues.

442. Il importe enfin de signaler qu'en établissant les équations sous la forme $ax + by = k$, $ax + by + cz = k$, etc., nous n'avons employé que des signes positifs; il eût été plus rigoureux, mais trop compliqué, de les établir sous la forme $\pm ax \pm by = k$, $\pm ax \pm by \pm cz = \pm k'$, mais il sera facile de se tirer de la difficulté, quand un ou plusieurs termes auront un signe négatif, en observant dans le cours du calcul la règle des signes ≹ (**141**). Les termes resteront composés des mêmes lettres.

II

ÉQUATIONS DU 2e DEGRÉ.

443. Quand, dans une équation du deuxième degré à une seule inconnue, on a fait disparaître tous les dénominateurs, fait passer dans un membre toutes les quantités connues et dans l'autre toutes les quantités inconnues, réduit à un seul tous les termes qui contiennent la deuxième puissance de l'inconnue, réduit également à un seul tous les termes qui contiennent la première puissance de l'inconnue, on obtient une équation définitive qui peut toujours se représenter sous la forme :

$$Ax^2 + Bx = C.$$

dans laquelle A, B et C peuvent être positifs ou négatifs.

444. Examinons d'abord le cas le plus simple, celui où les équations du deuxième degré à une seule inconnue ne renferment que le carré de l'inconnue.

$$x^2 = A.$$

Il est clair que $x = \pm \sqrt{A}$, soit $\sqrt{A} = a = x$, on voit en effet que $(+a)^2$ et $(-a)^2$ doivent donner A ou x^2 (**144**).

On voit que $x^2 = a^2$ revient à $x^2 - a^2 = a^2 - a^2 = o$ ou à $x^2 - a^2 = o$.

Or, $x^2 - a^2 = (x + a) \times (x - a)$ d'où l'équation $x^2 = a^2$ est égale à $(x + a) \times (x - a) = o$.

Dans cette dernière équation, il suffit que $x + a$ ou $x - a$ soit égal à zéro pour que l'opération soit exacte, car dans l'un et l'autre cas, le produit de $x + a$ par $x - a$ sera zéro.

Donc si l'on a $x^2 = 9$, il vient $x = \pm 3$.

$$x^2 = 9ab^3 \text{ donne } x = \pm \sqrt{9ab^3} = \pm 3b\sqrt{ab}.$$

Les valeurs de x qui satisfont à l'équation s'appellent racines de l'équation parce qu'elles sont fournies par l'extraction de racine du membre connu.

445. Prenons maintenant l'équation générale $Ax^2 + Bx = C$.

Soit $Ax^2 + Bx + C = o$ (1°) (il faut que A, B, C soient l'une ou l'autre des quantités négatives pour que l'équation ait un sens) et divisons tout par A ; il vient :

$$x + \frac{B}{A} x + \frac{C}{A} = o.$$

Ce qui, en faisant $\frac{B}{A} = p$ et $\frac{C}{A} = q$ donne $x^2 + px + q = o$ (2°).

L'expression (2°) est plus simple que (1°), puisque le coefficient de x^2 a disparu.

Cherchons à ramener cette équation à une équation du premier degré :

L'équation (2°) donne $x^2 + px = -q$; si nous ajoutons de part et d'autre $\frac{1}{4} p^2$, il vient :

$$x^2 + px + \frac{1}{4} p^2 = -q + \frac{1}{4} p^2.$$

Or la racine exacte de $x^2+px+\frac{1}{4}p^2$ est $x+\frac{1}{2}p$; et l'on a

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{-q+\frac{1}{4}p^2},\ \text{soit}\ x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-q+\frac{1}{4}p^2}\ (3).$$

Dans laquelle il n'y a à extraire que la racine de quantités connues $-q+\frac{1}{4}p^2$.

Si l'on a, par exemple, $p=-8$, $q=15$, l'équation $x^2-8x+15=o$. donne $x=4\pm\sqrt{-15+16}=4\pm\sqrt{1}$.

Or, comme $\sqrt{1}$ est 1, $x=5$ ou $x=3$.

La valeur $x=5$ donne en effet $5^2-40=-15$, soit $15=40-5^2$.

et $x=3$ $3^2-24=-15$, soit $15=24-3^2$.

$$\text{Si l'on a } p=-5,\ q=6,\ \text{on a } x=+\frac{5}{2}\pm\sqrt{-6+\frac{25}{4}}=+\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$=+\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2},=3,=2.$$

On ne trouve pas toujours des valeurs positives pour x; tantôt ces valeurs sont négatives ou nulles, tantôt elles sont imaginaires. C'est ce que nous verrons plus loin en examinant les nombres que l'on peut substituer aux quantités connues p et q dans l'équation $x^2+px+q=o$.

446. Reprenons l'équation originelle $Ax^2+Bx+C=o$; si l'on multiplie tout par $4A$, il vient pour le 1[er] membre: $4A^2x^2+4ABx+4AC$ qui est égal au carré de $2Ax+B$, si $B^2=4AC$,

Car l'équation originelle devient $(2Ax+B)^2=B^2-4AC$.

$$\text{d'où}\qquad x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

formule de laquelle on tirera la valeur de x sans transformer l'équation originelle en $x^2+px+q=o$, quand $B^2=4AC$.

447. Puisque nous possédons le moyen de ramener une équation du deuxième degré à une équation du premier degré, il sera possible de traiter deux, trois, ... m, équations du deuxième degré à deux, trois, ... n, inconnues, car on les réduira à $m-1$ équations à $n-1$ inconnues, en ramenant une inconnue au premier degré et en tirant la valeur de cette inconnue en fonction des autres, puis à $m-2$ équations à $n-2$ inconnues que l'on traitera de la même façon, etc.

ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE A UNE OU PLUSIEURS INCONNUES.

448. Il est impossible d'indiquer la solution générale de ces équations dans la théorie des quantités fixes. On pourrait à la rigueur en examiner quelques cas particuliers, mais cette étude n'est pas du ressort de notre exposition générale.



CHAPITRE II

THÉORIE DES QUANTITÉS FIXES. — IIIe PARTIE.

DES PROBLÈMES.

I

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

449. L'arithmologie n'a d'autre but que celui de nous mettre à même de résoudre les problèmes relatifs aux quantités de toute espèce.

La solution des problèmes sur les quantités ou *problèmes mathématiques* dépend beaucoup moins d'une connaissance approfondie du calcul que d'une grande rectitude d'esprit. Il y a en effet plusieurs opérations dans un problème.

Un exemple fera comprendre les difficultés que l'on rencontre dans la solution des problèmes.

Un père et son fils meurent le même jour, le premier à l'âge de 60 ans, le second à l'âge de 15 ans.

1° Combien d'années ont-ils vécu en tout? $60 + 15 = 75$ ans.

2° Quel âge avait le père quand le fils est né? $60 - 15 = 45$ ans.

3° Combien de mois ont-ils vécu en tout? 75 ans $\times 12 = 900$ mois.

4° Dans quel rapport la vie du père est-elle à celle du fils? $\frac{60}{15} = 4$; c'est à dire que le père a vécu 4 fois plus de temps que le fils, et par conséquent le fils 4 fois moins que le père. La vie du père, par rapport à celle du fils, est $\frac{4}{1}$; la vie du fils par rapport à la vie du père $\frac{1}{4}$.

Si le père était mort 4 ans avant son fils les nombres restant d'ailleurs les mêmes, le 2e problème seul aurait changé et on aurait eu $60 - 15 + 4 = 49$ ans, s'il était mort 4 ans après, le 2e problème aurait été $60 - 15 = 4 = 41$ ans.

Ces problèmes élémentaires, puisqu'ils n'entraînent que des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions peu compliquées, néces-

sitent néanmoins, quand il s'agit d'établir les calculs, un certain effort d'esprit.

Qu'est-ce donc lorsque les données du problème varient et qu'au lieu d'avoir affaire à des nombres abstraits, déjà si difficiles à manier, on a affaire à des nombres concrets où les idées d'âge, de volume, de force, de vitesse, de corps, de valeurs, etc., viennent se mêler ?

Il faut pourtant se familiariser avec ces derniers et s'habituer à résoudre les problèmes par le raisonnement le plus rigoureux, chercher ensuite les méthodes les plus expéditives du calcul, enfin, ramener toutes les solutions du même genre à une formule générale et simple dont l'algèbre nous apprendra à examiner les différents cas.

Commençons par résoudre divers problèmes à l'aide du seul raisonnement, et en dehors de tout procédé spécial de calcul. Dans un remarquable travail publié en 1800, sous le titre d'*Introduction à l'algèbre*, le baron Reynaud a réuni une certaine quantité de problèmes de tout genre et en a donné la solution à l'aide seulement des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique ; empruntons-lui ces problèmes dont les traités de mathématiques font varier les chiffres et les énoncés sans faire varier les relations ; ils nous serviront de point de départ pour constituer une méthode générale.

II

PREMIÈRE SECTION.

PROBLÈMES DE REYNAUD RÉSOLUS A L'AIDE DES QUATRE OPÉRATIONS FONDAMENTALES.

RÈGLES DE TROIS SIMPLES ET COMPOSÉES.

450. *Quatre ouvriers ont fait* 20 *mètres d'ouvrage; combien* 9 *ouvriers en feront-ils?* L'ouvrage fait est d'autant plus grand qu'il y a plus d'ouvriers; or,

4 ouvriers ont fait 20^m,
1 ouvrier ferait le quart de 20^m, ou 5^m,
les 9 ouvriers feront donc 9 fois 5^m, ou 45^m.

451. *Il a fallu* 4 *journées de travail pour faire* 20 *mètres d'ouvrage; combien faudra-t-il de journées pour faire* 45 *mètres du même ouvrage?*

Puisque 20^m d'ouvrage sont faits en 4 journées,

1^m serait fait dans le 20e de 4 jours ou en $\frac{4}{20}$, ou en $\frac{1}{5}$,

les 45^m seront donc faits en 45 fois $\frac{1}{5}$, ou en 9 journées.

452. *Trois ouvriers ont fait un ouvrage en* 15 *heures; combien* 5 *ouvriers mettraient-ils d'heures à faire le même ouvrage?*

Le temps employé à faire l'ouvrage doit être d'autant plus grand que le nombre des ouvriers est plus petit; mais,

3 ouvriers ont fait l'ouvrage en 15 heures,
1 ouvrier ferait cet ouvrage en 3 fois 15^h, ou en 45^h,
les 5 ouvriers feront donc l'ouvrage en $\frac{45}{5}$, ou en 9 heures.

453. *Il a fallu trois journées à* 15 *heures de travail par jour pour exécuter un ouvrage; combien faudrait-il de journées pour faire le même ouvrage, si l'on ne travaillait que* 9 *heures par jour?*

Puisqu'en travaillant 15^h par jour, il faut 3 journées,
si l'on ne travaillait que 1^h par jour, il faudrait 15 fois $3j$, ou 45 journées;
donc, lorsqu'on travaille 9^h par jour, il faut le 9e de $45j$, ou 5 journées.

REMARQUE. La règle qui servait à résoudre les quatre problèmes précédents était connue sous le nom de *règles de trois*, parce que l'inconnue dépend de *trois* quantités données; nous allons traiter quelques problèmes dont la réso-

lution dépend de celle des précédents; la méthode qu'on employait pour les résoudre se nommait *règle de trois composée.*

454. *Deux ouvriers qui travaillent 3 heures par jour ont fait en 5 jours 90 mètres d'ouvrage; combien 3 ouvriers qui travailleraient 7 heures par jour, feraient-ils du même ouvrage en 2 jours?*

2 ouvriers travaillant 3 heures par jour, font en 5 jours...	90 mètres	
1 ouvrier travaillant 3 h. par jour, fait en 5 j., la moitié de	90^m, ou	45^m.
1 ouvrier travaillant 1 h. par jour, fait en 5 j., le tiers de	45^m, ou	15^m.
1 ouvrier travaillant 1 heure par jour, fait en 1 j., le 5e de	15^m, ou	3^m.
3 ouvriers travaillant 1 h. par jour, feront en 1 j., 3 fois	3^m, ou	9^m.
3 ouvriers travaillaut 7 h. par jour, feront en 1 jour, 7 fois	9^m, ou	63^m.
Les 3 ouvriers travaillant 7 h. par jour, feront en 2 jours, 2 fois	63^m, ou	126^m.

455. *Deux ouvriers qui travaillent 3 heures par jour ont fait en 5 jours 90 mètres d'ouvrage; combien faudra-t-il de jours à 3 ouvriers qui travaillent 7 heures par jour, pour faire 126 mètres du même ouvrage?*

90^m sont faits par 2 ouvriers, travaillant 3 h. par j., pendant	5 jours.
1^m sera fait par 2 ouvriers, travaillant 3 h. par j., pendant	$\frac{5}{90}$ j. ou $\frac{1}{18}$ j.
1^m sera fait par 1 ouvrier, travaillant 3 h. par jour, pendant	$\frac{2}{18}$ j. ou $\frac{1}{9}$ j.
1^m sera fait par 1 ouvrier, travaillant 1 h. par jour, pendant	$\frac{3}{9}$ j. ou $\frac{1}{3}$ j.
126^m seront faits par 1 ouvr., travaillant 1 h. par j., pendant	$\frac{126}{3}$ j. ou 42 j.
126^m seront faits par 3 ouvr., travaillant 1 h. par j., pendant	$\frac{42}{3}$ j. ou 14 j.
Les 126^m seront faits par 3 ouv. travaill. 7 h. par j., pendant	$\frac{14}{7}$ j. ou 2 j.

RÈGLES D'INTÉRET.

456. L'argent rapportant un certain bénéfice à celui qui le fait valoir, l'homme qui emprunte une somme d'argent doit en la rendant, y joindre une rétribution qui dédommage le prêteur des avantages que cette somme lui eût procurés, si elle avait été employée par lui-même; cette rétribution se nomme *intérêt*; pour la déterminer, on convient de ce qu'une somme rapporte pendant un certain temps, l'intérêt d'une somme quelconque s'en déduit avec facilité.

On distingue deux sortes d'*intérêts*, l'intérêt *simple* et l'intérêt *composé*. *L'intérêt simple est celui qui ne porte plus intérêt;* de sorte que l'intérêt d'un capital pendant plusieurs années, s'obtient en multipliant l'intérêt d'une année par le nombre des années. *Lorsque l'intérêt de chaque année se joint au capital pour porter lui-même intérêt pendant l'année suivante,* on dit que l'intérêt est *composé*.

Quand le *taux* de l'argent est connu, les questions relatives à l'intérêt de l'argent se réduisent à quatre essentiellement différentes, car il s'agit de trouver, ou ce que de l'*argent comptant* vaudra après un certain temps, ou ce qu'une somme payable après un certain temps vaut en *argent comptant*; et

comme dans ces deux questions, l'intérêt peut être *simple* ou *composé*, il en résulte quatre problèmes. Si l'on observe que *la valeur d'une somme composée de francs peut s'obtenir en répétant la valeur d'un franc autant de fois qu'il y a de francs dans cette somme*, on sera conduit à résoudre les quatre problèmes suivants :

457. *On demande combien 1 fr. vaudra après plusieurs années; le taux de l'argent est connu et l'on n'a égard qu'aux intérêts simples.*

Pour fixer les idées, proposons-nous de trouver la valeur de 1 fr. après 3 ans, l'intérêt étant à 20 p. 100 par an (*).

L'intérêt de 100 fr. en un an étant........................ 20 fr.,

l'intérêt de 1 fr. en un an est $\frac{20}{100}$, ou.................... $\frac{1}{5}$,

l'intérêt de 1 fr. en trois ans est 3 fois $\frac{1}{5}$, ou................ $\frac{3}{5}$.

458. 1 fr. vaudra donc dans 3 ans, 1 fr. plus son intérêt $\frac{3}{5}$, ou $\frac{8}{5}$.

En général : *l'intérêt annuel de* 100 *fr. divisé par* 100, *donne pour quotient l'intérêt annuel de* 1 *fr.; ce dernier intérêt multiplié par le nombre des années, détermine l'intérêt de* 1 *fr. pendant ce nombre d'années ; ajoutant l'intérêt au capital* 1 *fr. la somme exprime la valeur de* 1 *fr. après le temps donné.*

1er Exemple. *Combien* 1500 fr. *argent comptant, vaudront-ils dans trois ans?* Le capital 1 fr. vaudra $\frac{8}{5}$ dans 3 ans; les 1500 fr. comptant vaudront donc après trois ans 1500 fois $\frac{8}{5}$, ou 2400 fr.; l'intérêt de 1500 fr. pendant 3 ans est donc 2400 fr. moins 1500 fr., ou 900 fr.; et en effet, comme pour trois ans, l'intérêt de 1 fr. est $\frac{3}{5}$, l'intérêt des 1500 fr. doit être 1500 fois $\frac{3}{5}$ ou 900 fr.

2e Exemple. *Combien* 1500 *fr. vaudront-ils après* 41 *mois?*

L'intérêt de 1 fr. est $\frac{1}{5}$ pour 12 mois, $\frac{1}{60}$ par mois, et $\frac{41}{60}$ pour 41 mois ; le capital 1 fr. vaut donc après 41 mois, 1 fr. plus $\frac{41}{60}$, soit $\frac{101}{60}$; le capital 1500 fr. vaut donc après 41 mois, 1500 fois $\frac{101}{60}$, ou 2525 fr.

459. *On demande combien une somme payable dans plusieurs années vaut en argent comptant ; on n'a égard qu'aux intérêts simples.*

Une somme payable dans plusieurs années étant le produit de la valeur de 1 fr. après ce temps, par le nombre des francs du capital, si l'on divise une somme payable au bout d'un certain temps, par la valeur de 1 fr. après ce temps, le quotient exprimera le nombre des francs du capital cherché.

1er Exemple. *Combien* 2400 fr. *payables dans trois ans valent-ils en argent*

(*) Nous supposerons dans tous les exemples que l'argent est à 20 pour 100 par an.

comptant? Si l'on divise les 2400 fr. payables dans trois ans, par la valeur de 1 fr. après trois ans qui est $\frac{8}{5}$, le quotient 2400 fr. $\times \frac{5}{8}$ ou 1500 fr, exprimera le capital cherché.

2ᵉ Exemple. *Combien 2525 fr. payables dans 41 mois valent-ils en argent comptant?* Si l'on divise les 2525 fr. payables dans 41 mois, par la valeur $\frac{101}{60}$ de 1 fr. après ce temps, le quotient 1500 sera le nombre des francs du capital demandé.

460. *On demande combien le capital 1 fr. vaudra après plusieurs années, en ayant égard aux intérêts des intérêts.*

L'argent étant à 20 pour 100 par an, l'intérêt annuel de 1 fr. est $\frac{1}{5}$; desorte que 1 fr. vaut après un an 1 fr. plus $\frac{1}{5}$ ou les $\frac{6}{5}$ du capital 1 fr.

Par conséquent: *Pour trouver ce qu'une somme placée au commencement d'une année, vaut à la fin de cette année, il suffit de multiplier cette somme par* $\frac{6}{5}$.

Les $\frac{6}{5}$ placés au commencement de la 2ᵉ année, valent donc à la fin de cette année $\frac{6}{5}\times\frac{6}{5}$; ces $\frac{6}{5}\times\frac{6}{5}$ placés au commencement de la 3ᵉ année, valent à la fin de cette année $\frac{6}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{5}$, ou 1 fr. $\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{5}$, ou $\frac{216}{125}$; et ainsi de suite.

La loi des accroissements du capital 1 fr. est évidente. On en déduit cette règle générale: Pour obtenir la valeur de 1 fr. après plusieurs années, calculez la fraction qui exprime combien 1 fr. vaut à la fin de l'année, et multipliez 1 fr. par cette fraction *abstraite* prise autant de fois comme facteur qu'il y a d'unités dans le nombre des années; le produit sera la valeur de 1 fr. après le temps donné.

1ᵉʳ Exemple. *Combien 1500 fr. vaudront-ils après trois ans?* Comme 1 fr. vaut après trois ans $\frac{216}{125}$, le capital 1500 fr. vaudra dans trois ans, 1500 fois $\frac{216}{125}$ ou 2592 fr. Et en effet, l'argent étant à 20 pour 100 par an, l'intérêt annuel est le cinquième du capital; les 1500 fr. placés au commencement de la première année valent donc à la fin de cette année, 1500 fr. plus leur intérêt 300 fr. ou 1800 fr. placés au commencement de la 2ᵉ année valent à la fin de cette année, 1800 fr. plus leur intérêt 360 fr., ou 2160 fr.; enfin, les 2160 fr. placés au commencement de la 3ᵉ année valent à la fin de cette année, 2160 fr. plus leur intérêt 432 fr., ou 2592 fr.

Remarque. Lorsqu'on a égard aux intérêts des intérêts, le capital 1500 fr. augmente de 1092 fr. en 3 ans, tandis que l'augmentation due aux intérêts simples ne serait que de 900 fr.

La règle précédente s'applique également à des années, à des mois, à des jours, etc. Par exemple, pour *trouver combien 1500 fr. vaudront après 3 ans 5 mois*, on dira: l'intérêt de 1 fr. est de $\frac{1}{5}$ pour 12 mois, de $\frac{1}{60}$ par mois, de $\frac{5}{60}$ ou $\frac{1}{12}$

pour 5 mois. Par conséquent, 1 fr. payable à une époque quelconque vaut, 5 mois plus tard, 1 fr. plus $\frac{1}{12}$ ou $\frac{13}{12}$; donc 1 fr. payable dans 3 ans, vaudra, dans 3 ans 5 mois, $\frac{13}{12}$; mais on a vu que 1 fr. vaut $\frac{216}{125}$ après 3 ans; ces $\frac{216}{125}$ payables dans 3 ans vaudront donc dans 3 ans 5 mois, les $\frac{216}{125}$ de $\frac{13}{12}$ ou $\frac{234}{125}$. Puisque 1 fr. vaut $\frac{234}{125}$ après 3 ans 5 mois, les 1500 fr. vaudront dans 3 ans 5 mois, 1500 fois $\frac{234}{125}$ ou 2808 fr.

461. *On demande combien une somme payable dans plusieurs années vaut en argent comptant, en ayant égard aux intérêts des intérêts.*

D'après ce qu'on a vu, il suffit de diviser la somme donnée par la valeur de 1 fr. après le temps indiqué, le quotient exprime le nombre des francs du capital primitif,

1er Exemple. *Combien* 2592 fr. *payables dans* 3 *ans valent-ils en argent comptant?* Si l'on divise les 2592 fr. payables dans 3 ans, par la valeur de 1 fr. après trois ans, qui est $\frac{216}{125}$, le quotient, $2592 \times \frac{125}{216}$ ou 1500, sera le nombre des francs du capital primitif.

2e Exemple. *Calculer combien* 2808 *fr. payables dans* 3 *ans* 5 *mois valent en argent comptant.* On divisera les 2808 fr. payables dans 3 ans 5 mois, par la valeur de 1 fr. après ce temps, qui est $\frac{234}{125}$; le quotient, $2808 \times \frac{125}{234}$ ou 1500, exprimera le nombre des francs du capital demandé.

Les quatre problèmes précédents donnent le moyen de résoudre les diverses questions relatives aux intérêts simples et composés. En voici des exemples :

Un capital augmenté des intérêts simples, vaut 1235 *fr., après* 5 *mois, et* 1312 *fr. après* 16 *mois; il faut trouver le capital et le taux de l'argent.* Comme le capital primitif vaut 1235 fr. après 5 mois, et 1312 fr. après 16 mois, il s'est accru de 77 fr. en 11 mois, de 7 fr. en un mois, et de 35 fr. en 5 mois; mais après cet accroissement il vaut 1235 fr.; le capital primitif était donc 1200 fr. On en déduit le *taux* de l'argent, car l'intérêt de 1200 fr. étant de 35 fr. pour 5 mois, ou de 7 fr. pour un mois, 1200 rapportent 84 fr. par an; l'intérêt de 100 fr. par an est donc 7 fr.; c'est-à-dire que l'*argent est à* 7 *pour* 100 *par an*; et en effet, lorsque l'argent est à ce *taux*, on trouve que 1200 fr. valent 1235 fr. après 5 mois, et 1312 fr. après 16 mois, comme l'exige la question.

462. *Un courtier vend des marchandises pour* 753 *francs de plus qu'il ne les avait achetées; à ce marché, il gagne* 15 *pour* 100 *sur le prix de vente. Quel est le prix d'achat des marchandises?*

Le gain 15 fr. correspondant au prix de vente 100 fr., le gain 1 fr. correspond au prix de vente $\frac{100}{15}$ ou $\frac{20}{3}$; le gain 753 fr. correspond donc au prix de vente 753 fois $\frac{20}{3}$, ou 5020 fr.

Le courtier a donc vendu ses marchandises pour 5020 fr.; le prix d'achat est donc 5020 fr. moins 753 fr., ou 4267 fr.

RÈGLES D'ESCOMPTE.

463. *On propose d'évaluer en argent comptant deux sommes, l'une de* 6000 *fr.*

payable dans 25 mois, l'autre de 27000 fr. payable dans 4 mois; l'intérêt simple de l'argent est à 2 pour 100 par mois.

L'intérêt de 100 fr. est de 2 fr. pour un mois, de 50 fr. pour 25 mois et de 8 fr. pour 4 mois; par conséquent, 100 fr. valent 150 fr. après 25 mois, et 108 fr. après 4 mois. Cela posé :

Puisque 150 fr. payables dans 25 mois, valent 100 fr. en argent comptant, 1 fr. payable dans 25 mois vaut en argent comptant $\frac{100}{150}$, ou $\frac{2}{3}$.

Les 6000 fr. payables dans 25 mois valent donc en argent comptant, 6000 fois $\frac{2}{3}$, ou 4000 fr.

On trouverait de même que les 27000 fr. payables dans 4 mois valent 25000 en argent comptant.

On voit que chaque somme éprouve une diminution de 2000 fr.; cette diminution prend quelquefois le nom d'*escompte*.

464. *Un militaire qui a besoin d'argent comptant, se présente chez un banquier avec deux lettres de change, l'une de 6000 fr. payable dans 25 mois, l'autre de 27000 fr. payable dans 4 mois. Le banquier prend un intérêt ou* ESCOMPTE *de 2 pour 100 par mois. Combien le banquier doit-il donner au militaire? On n'a égard qu'aux intérêts simples.* Ce problème ne différant du précédent que par la forme de l'énoncé, chaque lettre de change éprouvera une perte ou *escompte* de 2000 fr.; de sorte que le militaire recevra 4000 fr. plus 25000 fr., ou 29000 fr.

Voici une *solution plus directe*. L'*escompte* de 100 fr. est de 2 fr. pour un mois, de 50 fr. pour 25 mois, et de 8 fr. pour 4 mois; par conséquent : 100 fr. valent 150 fr. après 25 mois, et 108 fr. après 4 mois; deux lettres de change, l'une de 150 fr. payable dans 25 mois, l'autre de 108 fr. payable dans 4 mois, ne vaudraient donc chacune que 100 fr. argent comptant; les *escomptes* relatifs à ces lettres de change seraient donc 50 fr. et 8 fr. La solution du problème se déduit de cette remarque; en effet, puisque pour 25 mois,

L'escompte de 150 fr. est.................................. 50 fr.

L'escompte de 1 fr. sera $\frac{50}{150}$, ou.......................... $\frac{1}{3}$

L'escompte des 6000 fr. sera $\frac{6000}{3}$, ou...................... 2000 fr.

On verrait de même que l'escompte de 27000 fr. est 2000 fr.

PROBLÈMES SUR LES ANNUITÉS.

465. *Un particulier qui doit une rente perpétuelle de 2200 fr., au capital de 11000 fr., voudrait acquitter en 2 ans la rente et le capital, au moyen de deux paiements égaux effectués à la fin de chaque année. Quelle doit être la valeur de chaque paiement? On a égard aux intérêts des intérêts.* La rente de 2200 fr. étant le cinquième du capital, 1 fr. placé au commencement d'une année vaut à la fin de cette année 1 fr. plus $\frac{1}{5}$ ou $\frac{6}{5}$ ou 1 fr. $\times \frac{6}{5}$; les 11000 fr. argent comptant vaudront donc 11000 fr. $\times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$ ou 15840 fr. à la fin de la 2e année; les deux paiements réunis, évalués à cette dernière époque, doivent donc valoir 15840 fr. Mais le premier paiement effectué à la fin de la 1re année vaut à la

fin de la 2ᵉ, les $\frac{6}{5}$ de sa valeur ; le deuxième paiement effectué à la fin de la 2ᵉ année, vaut à cette époque les $\frac{5}{5}$ de sa valeur ; les deux paiements réunis, évalués à la fin de la 2ᵉ année, valent donc les $\frac{6}{5}$ plus les $\frac{5}{5}$ ou les $\frac{11}{5}$ du premier paiement. Puisque les $\frac{11}{5}$ du premier paiement valent 15840 fr., le cinquième du premier paiement est $\frac{15840}{11}$ ou 1440 fr. et le premier paiement est égal à 5 fois 1440 fr. ou à 7200 fr. On acquittera donc la rente et le capital, au moyen de deux paiements, chacun de 7200 fr., effectués l'un à la fin de la première année, l'autre à la fin de la seconde. En effet : le premier paiement effectué à la fin de la 1ʳᵉ année est 7200 fr. ; on doit 2200 fr. pour la rente des 11000 fr. ; on n'acquitte donc réellement que 5000 fr. sur le capital 11000 fr. qui par là se trouve réduit à 6000 fr. ; ainsi, on ne doit tenir compte pendant la 2ᵉ année que de l'intérêt 1200 fr. des 6000 qui restent dus ; cet intérêt joint aux 6000 fr., donne 7200 fr. pour ce qui reste dû à la fin de la 2ᵉ année ; le second paiement de 7200 fr., effectué à cette époque, acquitte donc le reste de la dette.

466. *On propose d'acquitter* 3310 fr. *en trois paiements égaux effectués à la fin de chaque année ; l'argent est à* 10 *pour* 100 *par an, et l'on a égard aux intérêts des intérêts.* Si l'on raisonne comme dans l'exemple précédent, on trouvera que *chaque paiement doit être de* 1331 *fr.*

PROBLÈME SUR LES SPÉCULATIONS.

467. *On offre à un marchand :* 30 *mètres d'un drap de première qualité à* $\frac{9}{12}$ *pour* 720 *fr. argent comptant, ou* 50 *mètres d'un drap de deuxième qualité à* $\frac{8}{12}$ *pour* 1200 fr. *payables dans deux ans ; à dimensions égales, le prix d'une mesure de drap de deuxième qualité est les* $\frac{15}{16}$ *du prix de la mesure de première qualité ; l'argent est à* 10 *pour* 100 *par an, et l'on a égard aux intérêts des intérêts. Le marchand voudrait connaître la spéculation qui lui sera la plus avantageuse.* Pour résoudre ce problème, il faut chercher quel serait aux conditions du premier marché, le prix des 50 mètres de drap de deuxième qualité à $\frac{8}{12}$; ce prix, comparé à celui qui résulte du second marché, fera connaître la *spéculation la plus avantageuse.* Effectuons les calculs :

Aux conditions du premier marché, 30 mètres de drap de première qualité à $\frac{9}{12}$, coûtent 720 fr. argent comptant ; les 50 mètres de drap de deuxième qualité à $\frac{8}{12}$, coûtent donc 1000 fr. en argent comptant ou 1210 fr. payables dans deux ans. Ainsi, 50 mètres de drap de deuxième qualité à $\frac{8}{12}$, payables dans deux ans, coûtent au marchand, 1210 fr. aux conditions du premier marché, et 1200 aux conditions du deuxième marché. La seconde spéculation est donc la plus avantageuse.

RÈGLE DE COMPAGNIE OU DE SOCIÉTÉ.

468. *Les mises de trois associés sont* 300 *fr.*, 500 *fr. et* 700 *fr.*; *le gain total est* 4500 *fr. On demande le gain de chaque associé.* Si le gain relatif à la mise 1 fr. était connu, il suffirait de le multiplier par le nombre des francs de chaque mois, pour obtenir les gains demandés; mais la somme des mises est 1500 fr.; on peut donc dire :

La mise totale 1500 fr. procurant un bénéfice de 4500 fr.

la mise 1 fr. procure le gain $\frac{4500}{1500}$ ou 3 fr.

la mise 300 fr. procure le gain 300 fois 3 fr. ou 900 fr.

la mise 500 fr. procure le gain 500 fois 3 fr. ou 1500 fr.

la mise 700 fr. procure le gain 708 fois 3 fr. ou 2100 fr.

Les gains des associés sont donc 900 fr., 1500 et 2100 fr. Ces nombres satisfont à toutes les conditions du problème, car la somme des gains partiels est égale au gain total, et le gain total étant le triple de la mise totale, les gains des associés sont triples de leur mises.

469. *Les mises de trois associés sont* 100 *fr.*, 250 *fr. et* 50 *fr.*; *la première mise est restée* 3 *mois dans la société, la seconde* 2 *mois, et la troisième* 14 *mois; le gain total est* 4500 *fr. Quel est le gain relatif à chaque mise?* Le gain de chaque associé dépend de sa mise et du temps qu'elle est restée dans la société. Si toutes les mises étaient restées le même temps, les gains seraient faciles à déterminer; il faut donc chercher quelles doivent être les mises pour que chacune d'elles restant le même temps dans la société, elles procurent les gains demandés. Or, 100 fr. placés pendant 3 mois, doivent rapporter autant que 3 fois 100 fr. ou 300 fr., en un mois; 250 fr. placés pendant 2 mois, et 50 fr. placés pendant 14 mois, doivent rapporter autant que 2 fois 250 fr. ou 500 fr., et 14 fois 50 fr. ou 700 fr., pendant un mois. Les gains sont donc les mêmes que dans la question précédente.

PROBLÈMES SUR LES CHANGES

470. 1er Exemple. *On sait que la guinée vaut* 26 *fr.* 47 *c. Pour calculer combien* 15000 *francs valent de guinées*, on dira : 100 guinées valent 2647 fr.; par conséquent, un franc vaut $\frac{100}{2647}$ guinées, et les 15000 fr. valent 15000 fois $\frac{100}{2647}$ guinées ou 566, 67 etc.

471. 2e Exemple. *Cent* piastres *d'Espagne valent* 543 *fr., et* 100 ducats *de Hollande valent* 1193 *fr.*; *combien* 3579 *piastres valent-elles de ducats?* D'après cet énoncé, une piastre vaut $\frac{543}{100}$, et 1 fr. vaut $\frac{100}{1193}$ ducats; la piastre vaut donc les $\frac{543}{100}$ de $\frac{100}{1193}$ ducats, ou $\frac{543}{1193}$ ducats; et les 3579 piastres valent 3579 fois $\frac{543}{1193}$ ducats, ou 1629 ducats.

Remarque. On calculerait de même combien l'unité de monnaie de l'un quelconque des pays désignés, vaut en monnaie des autres pays, car ayant trouvé que

$1 \text{ piastre} = \frac{543}{100} \text{ francs} = \frac{543}{1193} \text{ ducats}$, on en déduit que

$$1\text{ f} = \frac{100}{543} \text{ piastres} = \frac{100}{1193} \text{ ducats}, \ 1 \text{ ducat} = \frac{1193\text{ f}}{100} = \frac{1193}{543} \text{ piastres}.$$

472. *Un marchand veut échanger du drap contre du basin; on suppose que 2 mètres de drap valent 3 mètres de casimir, et que 5 mètres de casimir valent 7 mètres de basin. Combien faudra-t-il donner de mètres de basin, pour 60 mètres de drap?* D'après cet énoncé,

1^m de drap vaut $\frac{3^m}{2}$ de casimir, et 1^m de casimir vaut $\frac{7^m}{5}$ de basin;

1^m de drap vaut donc les $\frac{3}{2}$ de $\frac{7^m}{5}$ de basin, ou $\frac{21^m}{10}$ de basin;

Les 60^m de drap valent donc 60 fois $\frac{21^m}{10}$ de basin, ou 126^m de basin.

La règle que l'on donnait pour résoudre les trois questions précédentes était connue sous le nom de *règle conjointe*.

PROBLÈMES SUR LES MOBILES.

473. *Deux courriers vont dans le même sens; le premier a une avance de 138 lieues. il fait 3 lieues en 4 heures, et part 40 heures avant le second qui parcourt 6 lieues en 7 heures. On demande dans combien de temps les courriers se joindront, et quelles seront les distances des points de départ au point de rencontre.* Puisque le 1er courrier parcourt 3 lieues en 4 heures, il fait $\frac{3}{4}$ de lieue par heure. On verrait de même que le 2e courrier fait $\frac{6}{7}$ de lieue par heure. Mais, le 1er courrier part 40 heures avant le 2e, il fait donc pendant ce temps 40 fois $\frac{3}{4}$ de lieue, ou 30 lieues. Ainsi, lorsque le 2e courrier se met en route. le premier a une avance de 138 lieues plus 30 lieues ou de 168 lieues; le 2e courrier n'atteindra donc le 1er que lorsqu'il s'en sera rapproché de 168 lieues. Or, les courriers se rapprochent pendant une heure de $\frac{6}{7}$ moins $\frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{28}$ de lieue; ils se rapprocheront donc de 3 lieues en 28 heures, ou d'une lieue en $\frac{28}{3}$ d'heure, ou de 168 lieues en 168 fois $\frac{28}{3}$ d'heure, c'est à dire en 1568 heures. Le 2e courrier rencontrera donc le 1er après 1568 heures de marche; pendant ce temps, le 2e courrier aura parcouru 1568 fois $\frac{6}{7}$ lieues, ou 1344 lieues; le 1er courrier, qui part 40 heures avant le 2e, aura marché pendant 1608 heures et aura parcouru 1608 fois $\frac{3}{4}$ lieue, ou 1206 lieues; la différence 138 lieues entre ces espaces, est effectivement égale à la distance des points de départ des courriers.

474. *Deux courriers vont dans le même sens; le 1er a une avance de 200 lieues, il fait 3 lieues en 4 heures, et part 40 heures avant le second qui fait 6 lieues en 7 heures. Après combien d'heures de marche le 2e courrier ne sera-t-il plus en arrière*

du 1er que de 62 lieues ? Si l'on répète les calculs du problème précédent, on trouvera que le 1er courrier parcourt $\frac{3}{4}$ de lieue par heure, et qu'il a fait 30 lieues avant le départ du 2e courrier; ajoutant ces 30 lieues aux 200 lieues que le 1er courrier avait d'avance, le résultat 230 lieues exprime l'avance totale du 1er courrier. Par conséquent, pour que les deux courriers ne soient plus distants que de 62 lieues, le 2e doit se rapprocher du 1er de 230 lieues moins 62 lieues ou de 168 lieues. On vient de voir que ce rapprochement s'accomplira après 1568 heures de marche.

475. *Un lévrier poursuit un lièvre qui a 82 sauts de lièvre d'avance. Pendant que le lièvre fait 13 sauts, le levrier n'en fait que 9; mais 3 sauts de levrier en valent 5 de lièvre. Combien le lévrier doit-il faire de sauts pour attraper le lièvre?* D'après cet énoncé, 9 sauts de lévrier en valent 15 de lièvre; par conséquent, si le lièvre fait 13 sauts par moment, pendant ce temps le lévrier fait 9 sauts qui valent 15 sauts de lièvre; le lévrier se rapproche donc du lièvre de 2 sauts de lièvre par moment; pour s'en rapprocher de 82 sauts de lièvre dont il est en arrière, il lui faudra donc 41 moments; pendant ce temps, le lévrier aura fait 41 fois 9 sauts ou 369 sauts, et le lièvre aura fait 41 fois 13 sauts ou 533 sauts. Ainsi, le lévrier attrapera le lièvre en 369 sauts. Et en effet, 3 sauts de lévrier en valent 5 de lièvre, un saut de lévrier vaut $\frac{5}{3}$ de saut de lièvre, les 369 sauts de lévrier valent donc 369 fois $\frac{5}{3}$ de saut de lièvre ou 615 sauts de lièvre; or le lièvre n'a fait pendant le même temps que 533 sauts, c'est à dire 82 sauts de moins que le lévrier; le lévrier a donc effectivement gagné sur le lièvre, les 82 sauts de lièvre dont il était en arrière.

476. *Une montre marque midi; il faut trouver combien de fois les aiguilles se rencontreront depuis midi jusqu'à minuit, et à quelle heure chaque rencontre aura lieu.* Pendant une heure, l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions du cadran, et l'aiguille des heures parcourt les 5 divisions qui séparent deux heures consécutives; les aiguilles se rapprochent donc de 55 divisions par heure, ou d'une division en $\frac{1}{55}$ d'heure. Cela posé : si l'aiguille des heures restait sur midi, celle des minutes ne la joindrait qu'après avoir parcouru les 60 divisions du cadran; l'aiguille des minutes, pour joindre celle des heures, doit donc parcourir 60 divisions de plus, c'est à dire s'en rapprocher de 60 divisions; mais pour s'en rapprocher d'une division, il lui faut $\frac{1}{55}$ d'heure; pour s'en rapprocher des 60 divisions, il lui faudra donc $\frac{60}{55}$ d'heure. Les époques des autres rencontres s'en déduisent avec facilité, car les aiguilles marchant toujours avec la même vitesse, le temps écoulé depuis chaque séparation des aiguilles jusqu'à leur rencontre, reste constamment égal à $\frac{60}{55}$; on trouve ainsi que la onzième rencontre a lieu à 12 heures, c'est à dire sur le point de départ des aiguilles.

477. *Une montre indique les heures, les minutes et les secondes. Combien de fois ces aiguilles se rencontreront-elles, deux à deux et trois à trois, depuis midi jusqu'à minuit.* En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on trouvera que la première rencontre des trois aiguilles n'a lieu que dans 12 heures, que pendant ce temps l'aiguille des minutes a rencontré 11 fois celle des heures, que

l'aiguille des secondes a rencontré 719 fois celles des heures, et que l'aiguille des secondes a rencontré 708 fois celle des minutes.

PROBLÈMES DIVERS.

478. *Un père de famille laisse par testament la moitié de son bien à son fils, le tiers à sa fille, et les 10000 francs qui restent à sa veuve; il faut trouver le bien du défunt et la part de chaque enfant.* La part du fils jointe à celle de la fille, composent la moitié plus le tiers ou les $\frac{5}{6}$ de l'héritage ; les 10000 fr. qui restent à la mère expriment donc le sixième du bien total; ce bien est donc 60000 fr.; le fils en prend la moitié ou 30000 fr., la fille en prend le tiers ou 20000 fr.; il reste effectivement 10000 fr. à la veuve.

479. *Diophante, l'auteur du plus ancien livre d'Algèbre qui nous reste, passa dans l'enfance la sixième partie du temps qu'il vécut, et dans l'adolescence la douzième partie du même temps; ensuite il se maria et passa dans cette union le septième de sa vie augmenté de cinq ans, avant d'avoir un fils auquel il survécut quatre ans et qui n'atteignit que la moitié de l'âge auquel son père parvint. On demande l'age qu'avait Diophane quand il mourut.* Diophane passa le 6ᵉ de sa vie dans l'enfance, le 12ᵉ dans l'adolescence, le 7ᵉ plus 5 ans dans le mariage avant d'avoir un fils, la moitié de sa vie avec son fils, et 4 ans après la mort de son fils; ce qui fait les $\frac{75}{84}$ de sa vie, plus 9 ans; mais il passa sa vie entière dans ces divers états; par conséquent, les $\frac{9}{84}$ de l'âge de Diophante sont 9 ans; $\frac{1}{84}$ de cet âge est donc un an; Diophante vécut donc 84 ans. Si l'on fait la *preuve*, on trouvera que Diophante passa 14 ans dans l'enfance, 7 ans dans l'adolescence, 17 ans dans le mariage avant d'avoir un fils, 42 ans avec son fils, et 4 ans après la mort de son fils; ce qui fait en tout 84 ans.

480. *Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres. Chaque joueur ayant perdu une partie, dans l'ordre indiqué par le rang des joueurs, il reste 24 fr. au 1ᵉʳ joueur, 28 fr. au 2ᵉ joueur, et 14 fr. au 3ᵉ joueur. Combien chaque joueur avait-il d'argent en se mettant au jeu?* D'après cet énoncé:

A la fin de la 3ᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 24 fr., le 2ᵉ a 28 fr., et le 3ᵉ a 14 fr.

Il est facile d'en déduire combien chaque joueur avait d'argent à la fin de la seconde partie, car le 3ᵉ joueur ayant perdu la 3ᵉ partie a doublé l'argent des deux autres; ceux-ci n'avaient donc à la fin de la 2ᵉ partie que la moitié de ce qu'ils ont à la fin de la 3ᵉ, c'est à dire 12 et 14 fr.; le 3ᵉ joueur avait les 26 fr. qu'il a perdus avec les deux autres, augmentés des 14 fr. qui lui restent, c'est-à-dire 40 francs. Ainsi :

A la fin de la 2ᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 12 fr., le 2ᵉ a 14 fr. et le 3ᵉ a 40 fr.

Des raisonnements analogues conduiront aux résultats suivants:

A la fin de la 1ʳᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 6 fr., le 2ᵉ a 40 fr. et le 3ᵉ a 20 fr.

En se mettant au jeu, le 1ᵉʳ joueur a 36 fr., le 2ᵉ a 20 fr. et le 3ᵉ a 10 fr.

481. *Quatre joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des trois autres. Chaque joueur ayant perdu une partie, dans l'ordre indiqué par le rang des joueurs, les sommes d'argent qui leur restent sont 40 fr., 20 fr., 10 fr. et 5 fr. Combien chaque joueur avait-il d'argent en se mettant au jeu?*

Si l'on raisonne comme dans la question précédente, on sera conduit à ces résultats :

A la fin de la 4ᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 40 f., le 2ᵉ... 20 f., le 3ᵉ... 10 f., le 4ᵉ... 5 f.

A la fin de la 3ᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 20 f., le 2ᵉ... 10 fr., le 3ᵉ... 5 f., le 4ᵉ... 40 f.
A la fin de la 2ᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 10 f., le 2ᵉ... 5 f., le 3ᵉ... 40 f., le 4ᵉ... 20 f.
A la fin de la 1ʳᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 5 f., le 2ᵉ... 40 f., le 3ᵉ... 20 f., le 4ᵉ... 10 f.
En se mettant au jeu, le 1ᵉʳ joueur a 40 f., le 2ᵉ... 20 f., le 3ᵉ... 10 f., le 4ᵉ... 5 f.

De sorte qu'à la fin de la 4ᵉ partie, chaque joueur a autant d'argent qu'il en avait en se mettant au jeu.

RÈGLES DE FAUSSE POSITION.

482. On est parvenu, sans tâtonnement, aux solutions des questions précédentes; mais *il existe des problèmes qui échappent aux méthodes directes.* Si l'on essayait des nombres pris au hasard, on pourrait faire beaucoup de tentatives inutiles ; *on assure alors la marche du raisonnement, à l'aide d'hypothèses qui sont arbitraires et qui donnent quelquefois le moyen de détruire les erreurs.* En voici des exemples :

Un père de famille laisse 11000 *francs à partager entre sa veuve, deux fils et trois filles. Le testament porte que la part de la mère sera double de celle d'un fils, et qu'un fils recevra le double d'une fille. On propose d'effectuer ce partage.* D'après cet énoncé, si une fille prenait 1 fr., un fils prendrait 2 fr. et la mère 4 fr.; les 3 filles prendraient donc 3 fr., les 2 fils 4 fr. et la mère 4 fr.; ce qui fait 11 fr. en tout. Pour en déduire chaque part, on dira :

Sur 11 fr., la mère prendrait...... 4 fr., les 2 fils... 4 fr., et les 3 filles... 3 fr.
Sur 11000 f., la mère prendra donc 4000 f., les 2 fils 4000 f., et les 3 filles 3000 f.

483. *On a des pièces de* 2 *fr. et de* 5 *fr., il s'agit de payer* 26 *francs avec dix de ces pièces.* Si les dix pièces étaient de 2 fr., elles donneraient 20 fr. au lieu de 26 fr.; il faut donc augmenter de 6 fr. la valeur de ces dix pièces, sans en changer le nombre; ce qui aura lieu en remplaçant des pièces de 2 fr. par des pièces de 5 fr. Mais, chaque pièce de 5 fr., substituée à une pièce de 2 fr., augmente de 3 fr. la valeur des dix pièces; par conséquent, pour augmenter cette valeur de 6 fr. ou de 2 fois 3 fr., il faut substituer 2 pièces de 5 fr. à 2 pièces de 2 fr.; on formera donc les 26 fr. avec 8 pièces de 2 fr. et 2 pièces de 5 fr.

Si l'on voulait payer les 26 fr. avec 7 pièces, il faudrait prendre 3 pièces de 2 fr. et 4 pièces de 5 fr.

Il n'y a pas d'autres manières de composer 26 fr. avec des pièces de 2 fr. et de 5 fr.

484. *On propose de mêler ensemble de la poudre à* 24 *s. et à* 14 *s. la livre, de manière que le mélange revienne à* 20 *s. la livre.*

Pour résoudre ce problème, on prendra un nombre arbitraire pour le poids total du mélange, 10 liv. par exemple, et l'on dira : les 10 liv. de mélange à 20 *s.* la livre valent 200 *s.*; or 10 liv. à 24 *s.* coûteraient 240 *s.*; il faut donc diminuer ce dernier prix de 40 *s.*, en remplaçant de la poudre à 24 *s.* par de la poudre à 14 *s.* Mais, pour chaque livre de poudre à 24 *s.* remplacée par une livre à 14 *s.*, le prix 240 *s.* des dix livres diminue de 10 *s.*; il diminuera donc de 40 *s.*, en remplaçant 4 liv. à 24 *s.* par 4 liv. à 14 *s.*; les dix livres du mélange doivent donc être composées de 4 liv. à 14 *s.* et de 6 liv. à 24 *s.*; et comme 4 est les $\frac{2}{3}$ de 6, la quantité de poudre à 14 *s.* doit être les $\frac{2}{3}$ de la quantité de poudre à 24 *s.* Par exemple, si l'on prend 9 liv. à 24 *s.*, la quantité de poudre à 14 *s.* devra être les $\frac{2}{3}$ de 9 liv., ou 6 liv.; et en effet, 9 liv. à 24 *s.* mê-

lées avec 6 liv. à 14 *s.*, composent un mélange de 15 liv. qui vaut 300 *s.*; de sorte que ce mélange revient à 20 *s.* la livre.

La méthode employée pour résoudre les trois problèmes précédents a reçu le nom de *règle de fausse position*, parce qu'elle conduit au résultat à l'aide d'*une fausse supposition.*

RÈGLE DE DOUBLE FAUSSE POSITION.

485. *Un joueur interrogé sur ce qu'il a dans sa bourse, répond que l'excès du quintuple de ses louis sur* 30, *est égal à l'excès du double de ces mêmes louis sur* 6. *Combien le joueur avait-il de louis?* Pour résoudre ce problème, on donnera une valeur arbitraire au nombre des louis; si ce nombre ne jouit pas des propriétés énoncées, il produira une certaine *erreur* que l'on détruira à l'aide d'une seconde hypothèse. Voici le détail du calcul :

1re *hypothèse*............ 20 louis.	2e *hypothèse*........... 19 louis.
l'excès de 5 fois 20 sur 30 est... 70,	l'excès de 5 fois 19 sur 30 est... 65,
l'excès de 2 fois 20 sur 6 est.... 34,	l'excès de 2 fois 19 sur 6 est... 32,
l'*erreur* correspondante est donc 36.	l'*erreur* correspondante est donc 33.

Pour diminuer l'erreur 36 de 3, il faut diminuer de 1 le nombre 20 des louis, pour diminuer l'erreur 36 de 36, il faut diminuer de 12 le nombre 20 des louis.

Le joueur avait donc 8 louis. Et en effet, l'excès du quintuple de 8 sur 30 est 10, et l'excès du double de 8 sur 6 est également 10, comme l'exige l'énoncé.

486. *Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : mon âge est le triple de celui de mon fils, et il y a dix ans qu'il en était le quintuple. On demande l'âge du fils.*

Supposons d'abord que l'âge du fils soit 24 ans, celui du père sera 72 ans; il y a dix ans, le fils avait 14 ans et le père 62 ans; or le quintuple de 14 surpasse 62 de 8, l'erreur est donc 8. On verra de même, que si l'âge du fils diminue d'une année, l'erreur 8 diminuera de 2. Par conséquent, pour que cette erreur devienne nulle, il faut que l'âge du fils diminue de 4 années. Le fils a donc 20 ans et le père 60 ans; il y a dix ans, le fils avait 10 ans et le père 50 ans; l'âge du père était donc en effet le quintuple de l'âge du fils.

REMARQUE. La méthode qui a servi à résoudre les deux questions précédentes se nomme *règle de double fausse position*, parce qu'elle conduit au résultat à l'aide de *deux fausses suppositions; cette règle n'est applicable qu'aux questions dans lesquelles les erreurs diminuent proportionnellement aux hypothèses faites sur les valeurs des inconnues.* Quand cette condition n'a pas lieu, le calcul l'indique, en conduisant à un nombre qui ne satisfait pas au problème, et la question est du ressort de l'*Algèbre*.

Pour en donner un exemple, proposons-nous de *trouver le nombre par lequel on doit diviser* 12, *pour que le quotient soit égal au diviseur augmenté de* 1. Le nombre cherché devant diviser 12, nous essayerons deux diviseurs de 12, tels que 2 et 4; si le nombre cherché était 2, le quotient de 12 par ce nombre serait 6; or ce quotient doit être égal au diviseur 2 augmenté de 1, ou à 3; il y a donc 3 d'erreur. On trouverait de la même manière que l'erreur correspondante à l'hypothèse 4, est 2; mais l'hypothèse 2 a donné 3 d'erreur. On dira donc : pour diminuer l'erreur 3 de 1, il faut augmenter de 2 l'hypothèse 2; pour diminuer de 3 l'erreur 3, il faut donc augmenter l'hypothèse 2 de 3 fois 2; ce qui donne 8. Le nombre 8 ne satisfait pas aux conditions du problème, puisque le quotient de la division de 12 par 8, n'est pas égal au diviseur 8 augmenté de 1; cependant le problème admet une solution,

car le nombre 3 satisfait à la question proposée. L'Arithmétique ne peut fournir aucune solution des problèmes de cette espèce.

PROBLÈMES QUI ADMETTENT PLUSIEURS SOLUTIONS.

487. *Les neuf Muses, portant chacune le même nombre de couronnes de fleurs, rencontrent les trois Grâces et leur offrent des couronnes; la distribution faite, les Grâces et les Muses ont chacune le même nombre de couronnes. On demande combien les Muses portaient de couronnes et combien elles en ont donné?* Le nombre des Muses étant triple de celui des Grâces, la totalité des couronnes qui restent aux Muses après la distribution est le triple de ce qu'elles ont donné aux Grâces; les Muses portaient donc le quadruple de ce qu'elles ont donné aux Grâces. Par conséquent, le nombre total des couronnes est divisible par 4, et les Muses ont donné le quart de ce qu'elles portaient. Or, chacune des neuf Muses avait d'abord un même nombre de couronnes; le nombre total des couronnes est donc divisible par 9; nous avons prouvé qu'il est aussi divisible par 4; il doit donc être divisible par 4 fois 9, ou par 36; et en effet, tous les multiples de 36 satisfont à la question. Par exemple, si les neuf Muses portant 72 couronnes, en donnent le quart aux Grâces, il restera 54 couronnes aux neuf Muses, et les trois Grâces en auront 18; chaque Muse et chaque Grâce portera donc 6 couronnes après la distribution.

488. *Partager huit litres de vin en deux parties égales avec trois vases inégaux, dont le premier peut contenir 8 litres, le second 5 litres et le troisième 3 litres; les vases sont vides.* Pour abréger, désignez le vase de 8 litres par A, celui de 5 litres par B, et celui de 3 litres par C. Mettez les 8 litres de vin dans A; versez de A en C, de C en B, de A en C, de C en B, de B en A, de C en B, et de A en C; il restera 4 litres dans A. On peut trouver d'autres solutions de cette question.

489. *Deviner la somme de plusieurs nombres?*

Faites poser trois nombres de quatre chiffres; mettez dessons trois antres nombres, tels que leurs chiffres expriment ce qu'il faut ajouter à chacun des chiffres des trois nombres donnés pour obtenir 9; la somme des six nombres qui en résulteront sera évidemment égale à 3 fois 9999 ou à 29997.

Par exemple, si les uombres posés arbitrairement sont

2222, 1205 et 3004,

on placera dessous leurs *compléments* à 9999, c'est à dire ce qu'il faut ajouter à chacun de ces nombres pour obtenir 9999; ces *compléments* sont

7777, 8794 et 6995;

490. *On pose trois bijoux sur une table; chacun de ces bijoux est pris par une personne; il faut deviner quel est l'objet choisi par chaque personne.*

Si les trois bijoux sont un *étui*, un *anneau* et une *montre*, on les désignera par les lettres initiales, *e*, *a*, *m*; on prendra 24 jetons, on en donnera un à la 1re personne, 2 à la 2e et 3 à la 3e; on posera sur la table les 18 jetons qui resteront. Pour deviner l'objet pris par chaque personne, vous direz : que la personne qui a l'étui prenne sur la table (à votre insu) autant de jetons qu'elle en a dans la main, que celle qui a l'anneau prenne le double des jetons qu'elle a dans la main, et enfin que la personne qui a la montre prenne

le quadruple des jetons qu'elle a dans la main; demandez alors combien il reste de jetons sur la table; ce reste sera un des nombres, 1, 2, 3, 5, 6, 7

1	2	3	5	6	7
*ea*ux	*aé*riennes	*ém*ues	*am*oncelées	*mé*nagez	*Ma*rseille.

La 1re lettre du mot qui correspond au nombre des jetons qui restent sur la table est la lettre initiale de l'objet pris par la 1re personne, et la 2e lettre du même mot est la lettre initiale de l'objet pris par la 2e personne. Par exemple, lorsqu'il reste 6 jetons, le mot *mé*nagez, placé sous le reste 6, exprime que la 1re personne a la *m*ontre et que la seconde a l'*é*tui.

Remarque. L'exactitude de cette règle est facile à vérifier, car trois objets ne peuvent se combiner que de six manières différentes, et en appliquant la règle, on trouve que les six *restes* correspondants sont, 1, 2, 3, 5, 6, 7.

On peut exécuter ce tour de plusieurs manières, en changeant le nombre des jetons; tout se réduit à choisir des nombres de jetons tels, que chaque combinaison conduise à un reste différent.

DEUXIÈME SECTION.

ESSAI D'UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE SOLUTION DES PROBLÈMES.

1° DIFFICULTÉS DANS LA SOLUTION DES PROBLÈMES.

491. Les problèmes précédents se retrouvent dans tous les ouvrages d'arithmétique, avec des données plus ou moins modifiées, mais renfermant toujours au fond la solutiou des mêmes questions. La manière dont ils sont résolus est assurément la plus simple, mais non la plus expéditive. Hâtons-nous de dire que les mathématiciens ont trouvé des procédés rapides pour chacune des catégories de problèmes que présente Reynaud : règle de trois, règle d'intérêt, de société, etc.

Il serait trop long d'exposer ici tous ces procédés, constatons seulement qu'ils ne laissent dans l'esprit aucune notion d'ensemble sur la manière de résoudre les problèmes. Jusqu'ici les mathématiciens se sont bornés à préconiser la pratique et ont considéré la partie essentielle du calcul comme purement empirique, c'est à dire expérimentale.

Nous n'ignorons pas quelles sont les difficultés d'une méthode générale dans la solution des problèmes, mais quelles que soient ces difficultés, nous devons chercher à les résoudre.

492. Il y a trois méthodes générales indiquées jusqu'ici par les mathématiciens :

1° La méthode de réduction à l'unité;
2° La méthode de fausse position;
3° La méthode algébrique.

Les deux premières méthodes ont été indiquées par Reynaud. La troisième consiste à supposer le problème résolu et à chercher une équation dans laquelle entrent les données et le résultat. Voici des exemples pour chacune d'elles :

493. 1° 3 ouvriers font 7 mètres d'ouvrage, combien 5 ouvriers, travaillant pendant le même temps et dans les mêmes conditions, feront-ils de mètres du même ouvrage?

La méthode de réduction à l'unité consiste à déterminer combien un ouvrier fait de mètres : 3 ouvriers font 7 mètres, un ouvrier fera 3 fois moins que 3 ouvriers, c'est à dire $\frac{7}{3}$ de mètre. On en conclut que 5 ouvriers feront 5 fois plus de mètres, soit $\frac{7}{3} \times 5$, soit $\frac{35}{3}$ de mètres, soit $11^m + \frac{2}{7}$ de mètre.

Mais si le problème avait été : 7 mètres ont été faits par 3 ouvriers, combien faudra-t-il d'ouvriers pour faire 5 mètres? la méthode de réduction à l'unité

nous aurait conduit à dire : 7 mètres sont le produit de 3 ouvriers, 1 mètre sera le produit de 7 fois moins d'ouvriers, soit de $\frac{3}{7}$ d'ouvriers, et pour faire 5 mètres il faudra 5 fois plus d'ouvriers, soit $\frac{3}{7} \times 5 = \frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7}$. Or nous ne pouvons guère comprendre ce que c'est que deux ouvriers plus un septième d'ouvrier. L'ouvrier est une unité que l'on peut fractionner.

Les mathématiciens ont beau répondre que $\frac{15}{7}$ sont un nombre abstrait, la solution n'en devient que plus obscure, car ce ne sont pas des nombres abstraits qui produisent des mètres. Il faut donc renoncer à obtenir 5 mètres d'ouvrage si l'on ne trouve au préalable les $\frac{15}{7}$ d'ouvriers.

494. 2° La méthode de fausse position et la méthode algébrique sont au fond les mêmes. La première consiste à supposer le problème résolu par un nombre faux et à chercher quels résultats ce nombre fournirait avec les données du problème, puis à comparer le problème ainsi transformé au problème réel. On en déduit ainsi la marche des calculs à faire. La seconde, en supposant l'inconnue déterminée, cherche par quelle série de calculs on peut vérifier l'exactitude de cette inconnue.

Fausse position. — Le $\frac{1}{3}$ plus le $\frac{1}{4}$ d'un sac d'argent ont donné 50 fr. Combien y a-t-il dans le sac?

Supposons qu'il y ait 96 fr.; le $\frac{1}{3}$ de 96 fr. est 32, le $\frac{1}{4}$ est 24; $\frac{1}{3}$ de 96 fr. plus $\frac{1}{4}$ de 96 fr. sont égaux à 32 fr. $+ 24$, soit 56 fr. Le résultat obtenu est trop fort, mais on remarque que si le problème avait été : le $\frac{1}{3}$ et le $\frac{1}{4}$ d'un sac donnent 56 fr., on aurait obtenu le résultat en additionnant le $\frac{1}{3}$ avec le $\frac{1}{4}$, soit $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12}{7}$, et en considérant que 56 est les $\frac{12}{7}$ du résultat cherché, ce résultat est $\frac{50 \times 12}{7} = 85$ fr. $+ \frac{5}{7}$.

Ici, comme précédemment, on se demande ce que signifient $\frac{5}{7}$ de franc. Encore avons-nous pris dans notre fausse supposition un nombre qui approchait du résultat. Le calcul est déjà très-difficile à comprendre : que serait-il arrivé si, au lieu de 96 fr., nous avions pris 3 fr. 50, par exemple?

495. 3° *Méthode algébrique.* — Dans la même question, la méthode algébrique eût été plus expéditive. Appelant x le nombre cherché, on a $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 50$, soit $\frac{7x}{12} = 50$, soit enfin $x = \frac{50 \times 12}{7} = 85 + \frac{5}{7}$. Mais on remarque que cette manière de procéder est toute mécanique. Les mathématiciens s'accordent à reconnaître que rien n'est plus facile que de résoudre un problème quand l'équation est bien posée, mais que toute la difficulté consiste à bien poser l'équation.

Or c'est précisément dans ce dernier cas qu'une méthode générale fait défaut.

496. Ce que nous venons d'exposer n'est guère intelligible que pour les personnes qui ont pratiqué le calcul. Cherchons maintenant la méthode générale. Elle consiste :

1° A réduire les données du problème à des données purement arithmologiques;

2° A déterminer les relations de ces données;

3° A effectuer les calculs sur des nombres connus.

Tout ce qui précède n'a d'autre but que de faciliter la troisième partie de cette tâche; la *théorie des nombres* nous enseigne en effet les opérations à effectuer sur les nombres écrits en chiffres; la *théorie des quantités fixes* nous enseigne les opérations à effectuer sur les quantités écrites en lettres; mais ni l'une ni l'autre ne nous apprennent à ramener les données du problème à des données purement arithmologiques, et à déterminer les relations de ces données ainsi modifiées.

Appelons *arithmologique* le procédé qui consiste à effectuer les opérations; nous nommerons *arithmognosique* celui qui consiste à réduire, quand cela est possible, les données d'un problème à des nombres qui ne présentent plus d'autre idée que celle des constatations de notre esprit dans le temps, et nous désignerons sous le mot d'*arithmique* le procédé qui consiste à établir les relations précises qui existent entre les nombres ainsi modifiés.

MÉTHODE GÉNÉRALE APPLIQUÉE AUX RÈGLES DE TROIS.

497. Lorsque je veux savoir combien 9 ouvriers feront de mètres d'un ouvrage quand je sais que 4 ouvriers en ont fait 20 mètres, je dois écarter d'abord les idées étrangères au problème.

1° *Arithmognosie*. — L'idée d'ouvrier n'est d'aucune importance en elle-même, elle se réduit à l'idée de l'action qui produit pendant un temps donné. L'idée de mètre, quoique plus précise, peut être réduite également à l'idée de l'action qui mesure une grandeur donnée pendant un temps donné. Au fond, le problème se ramène à des idées de durée: la durée travail et la durée mesure qui sont inégales.

Appelant T la durée travail et M la durée mesure; si ces deux durées ne sont pas égales (car il est plus rapide de mesurer un ouvrage que de le faire) elles ont un rapport commun qu'il s'agit de déterminer.

2° *Arithmie*. — Appelant x le nombre cherché, appelant T le nombre de durées nécessaires à un ouvrier pour produire un travail, M le nombre de durées de même espèce nécessaires à la mesure de ce travail, le problème devient :

1° $4\,T$ correspondent à $20\,M$. 2° $9\,T$ correspondent à $x\,M$.

Puisqu'à un nombre T de durées correspond un nombre M de durées de même espèce, il sera facile d'établir l'équation qui relie ces quantités en tirant de 1° et de 2° la valeur de T, et en prenant chacune de ces valeurs pour un des membres de l'équation, puisqu'elles sont égales.

Dans 1°, nous remarquons que si $4\,T$ correspondent à $20\,M$, $1\,T$, 4 fois plus petit que $4\,T$, correspondra à une quantité 4 fois plus petite que $4\,T$, soit $T = \frac{20\,M}{4}$.

Dans 2°, $9\,T$ correspondant à $x\,M$, $1\,T$ correspondra à $\frac{x\,M}{9}$, d'où $\frac{20\,M}{4} = \frac{x\,M}{9}$, ce qui est la même chose que $T = T$.

Remarquons ici qu'il n'y a plus que des nombres dans le problème; M et T n'emportent plus avec eux l'idée d'ouvriers ni de mètres, mais l'idée de nombres exprimés sous forme littérale.

Ces nombres, figurés par des lettres, doivent disparaître dans la solution, comme il est facile de le constater.

3° *Arithmologie.* — L'équation étant posée, il reste à la résoudre à l'aide du procédé arithmologique, ce qui ne souffre aucune difficulté.

On fait disparaître les dénominateurs, ce qui donne:

$$20M \times 9 = xM \times 4$$

d'où $x = \frac{20M \times 9}{M \times 4} = \frac{20 \times 9}{4} = \frac{180}{4} = 45.$

498. 3 ouvriers font un ouvrage en 15 heures; combien faudra-t-il d'heures à 5 ouvriers pour faire le même ouvrage?

1° Appelons T la durée du travail de chaque ouvrier, H l'heure pendant laquelle travaillent les trois ouvriers réunis. Dans le premier cas, le travail est $3T \times 15H$; dans le second cas il est $5T \times xH$.

2° Mais comme le résultat et les conditions sont les mêmes de part et d'autre, la première quantité est égale à la seconde et l'équation résulte de l'énoncé même du problème

$$3T \times 15H = 5T \times xH.$$

3° Il est facile d'obtenir la valeur de x qui est évidemment

$$xH = \frac{3T \times 15H}{5T} = \frac{3 \times 15H}{5} = 9H.$$

499. Les problèmes composés que présentent les règles de trois ne présentent d'autre difficulté que celle de bien disposer les valeurs dans les équations lorsque le raisonnement a appris à ramener toutes ces valeurs à des nombres proprement dits, mais il y a un procédé mécanique pour les résoudre.

On distingue deux sortes de rapports ou quotités, l'un *direct* dont les deux termes croissent ou décroisseut ensemble, l'autre *inverse* dont l'un croît quand l'autre décroît.

Ainsi, dans le premier problème, le nombre des mètres produits est *directement proportionnel* au nombre des ouvriers, c'est à dire que *plus* il y a d'ouvriers, plus ils produisent de mètres.

Dans le second problème, le nombre des heures de travail est *inversement proportionnel* au nombre des ouvriers, c'est à dire que *plus* il y a d'heures de travail moins il faut d'ouvriers.

Appelons *homogènes*, c'est à dire de *même nature*, les termes auxquels nous aurions donné la même lettre T, M ou H, nous dirons que dans l'énoncé d'un problème, les termes se présentent comme antécédents dans les rapports quand ces rapports sont directs, et qu'ils se présentent comme antécédents dans un rapport et comme conséquents dans l'autre quand les rapports sont inverses.

C'est ce qui ressort des deux problèmes précédents où l'on a

1° $\frac{20M}{4} = \frac{xM}{9}$;

2° $3T \times 15H = 5T \times xH$ équiproduit qui, posé en équiquotient, donne $\frac{3T}{xH} = \frac{15H}{5T}$.

500. Voici quelques exemples des règles de trois présentés par Francœur, ils ne laisseront aucune obscurité sur le procédé employé dans ces sortes de problèmes.

RÈGLES DE TROIS SIMPLES.

I. 6 escadrons ont consommé un magasin de fourrage en 54 jours; en combien de jours 9 escadrons l'eussent-ils consommé? Règle inverse, d'où $\frac{9}{54} = \frac{6}{x} = 36$.

Escadr.	Jours.
6	54
9	x

II. Un vaisseau a encore pour 10 jours de vivres, mais on veut tenir la mer encore 15 jours : à quoi doit être réduite chaque ration? On ne trouve pas ici quatre termes; mais il est évident que l'un est sous-entendu, et que le problème doit être conçu de cette manière. On donnerait la ration 1 à chaque homme, s'il fallait tenir la mer 10 jours; on doit la tenir 15 jours, que donnera-t-on? Règle inverse : ainsi $\frac{15}{10} = \frac{1}{x}$, d'où $x = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Jours.	Ration.
10	1
15	x

RÈGLES DE TROIS COMPOSÉES.

501. On ramène souvent aux proportions des questions qui renferment plus de trois termes donnés. Il faut alors qu'elles soient formées de deux périodes qui contiennent des nombres homogènes, deux à deux, et *variables proportionnellement*. En voici un exemple :

Si 20 hommes ont fait 160 mètres d'ouvrage en 15 jours, combien 30 hommes en feraient-ils en 12 jours?

Hommes.	Mètres.	Jours.
20	160	15
30	x	12

Il se présentera deux cas, suivant que les termes qui ne répondent pas à l'inconnue sont en rapport direct ou inverse. Ici, 20 hommes et 15 jours sont en rapport inverse; car *plus* on emploie d'ouvriers, et *moins* il est nécessaire de les occuper de temps pour accomplir une même tâche; en sorte qu'on peut doubler, tripler... l'un des nombres, pourvu qu'on divise l'autre par 2, 3,..., et la question reste la même. Multiplions 20 hommes par 15, et divisons 15 jours par 15; il viendra 300 hommes et 1 jour : de même multiplions 30 hommes par 12, et nous aurons 360 hommes et 1 jour. La question devient donc, si 300 hommes ont fait 160 mètres en un jour, combien 360 hommes en feront-ils en un jour?

Hommes.	Mètres.	Jours.
300	160	1
360	x	1

Le temps étant le même de part et d'autre, il est inutile d'y avoir égard, et on a la règle directe $\frac{300}{160} = \frac{360}{x} = 192$ mètres.

Lorsque le rapport est direct, on procède différemment. Par exemple, si 20 hommes ont fait 160 mètres en 15 jours, combien faudra-t-il de jours à 30 hommes pour faire 192 mètres?

Hommes.	Mètres.	Jours.
20	160	15
30	192	x

Plus il y a d'hommes, et plus ils font de mètres; 20 hommes et 160 mètres sont en rapport direct. Ainsi, après avoir multiplié l'une de ces quantités par 2, 3..., il faudra aussi multiplier l'autre par le même nombre. Prenons 192 pour facteur de 20 hommes et 160 mètres, puis 160 pour facteur de 30 hommes

et 192 mètres, il est clair que le nombre des mètres (*) sera, dans les deux cas, 192×160. On a donc cette question : si 20×192 hommes ont fait un ouvrage en 15 jours, combien de jours seraient 30×160 hommes à faire ce même ouvrage? Cette règle est inverse et l'on a

$$\frac{30 \times 160}{15} = \frac{20 \times 192}{x} = \frac{20 \times 192 \times 15}{30 \times 160},$$

ou

$$x = \frac{2 \times 192 \times 5}{1 \times 160} = \frac{192}{16} = 12.$$

On raisonnera de même dans tout autre cas: le 2e de ces problèmes peut servir de preuve à l'exactitude du 1er calcul; et, en général, en renversant le problème, on fera la preuve de l'opération. Voici encore un exemple assez compliqué :

Si 40 ouvriers ont fait 300 mètres en 8 jours, en travaillant 7 heures par jour, combien 51 ouvriers seraient-ils de jours à faire 459 mètres en travaillant 6 heures par jour?

Hommes.	Mètres.	Jours.	Heures.
40	300	8	7
51	459	x	6

On verra d'abord que les ouvriers et les heures sont en rapport inverse; on mettra donc 40×7 heures d'une part, et 51×6 heures de l'autre, durant une heure, ce qui donnera lieu à la question indiquée ci-contre, ce qu'il est inutile d'énoncer.

Hommes.	Mètres.	Jours.
40×7	300	8
51×6	459	x

Les heures et les mètres sont en rapport direct; on fera donc 459 multiplicateur des termes de la première période, et 300 celui de la seconde; ce qui réduira le nombre des mètres à être le même de part et d'autre. On aura une règle de trois inverse que l'on posera ainsi :

Hommes.	Jours.
$40 \times 7 \times 459$	8
$51 \times 6 \times 300$	x

$$\frac{51 \times 6 \times 300}{8} = \frac{40 \times 7 \times 459}{x}, \quad x = \frac{40 \times 7 \times 459}{51 \times 6 \times 300}.$$

On peut même, avant d'effectuer le calcul, supprimer le facteur 3 dans 300 et 6, puis 9 dans 459; d'où

$$x = \frac{40 \times 7 \times 51 \times 8}{51 \times 2 \times 100} = \frac{4 \times 7 \times 4}{10} = 11,2.$$

502. On peut encore éviter ces divers raisonnements, car, en les reproduisant sur chaque terme comparé à inconnue, on voit que, *lorsque le rapport sera direct, le terme devra changer de place avec son homogène; tandis que s'il forme un rapport inverse on le laissera où il est. Enfin, on multipliera tous les nombres contenus dans chaque ligne et l'on égalera les produits entre eux.* Ainsi, dans la dernière question, les ouvriers et les jours sont en rapport inverse ainsi que les heures et les jours; mais les mètres et les jours forment un rapport direct; on changera de place seulement 300 et 459, on formera le produit des nombres contenus

$$40 \times 459 \times 8 \times 7$$
$$51 \times 300 \times x \times 6$$

dans chaque ligne, et égalant, il viendra $40 \times 459 \times 8 \times 7 = 51 \times 300 \times 6 \times x$, ce qui donne la même valeur que ci-devant; en effet, l'inconnue sera le quotient de $40 \times 459 \times 8 \times 7$ divisé par $51 \times 300 \times 6$.

Cette opération peut s'appliquer aux règles de trois simples.

(*) On aurait rempli le même but avec un facteur plus simple que 192; voyez ce qu'on a dit pour la réduction au même dénominateur (§ 323); nous avons pris ici 192 pour mieux faire concevoir la conséquence qui suit.

503. Laissons de côté les problèmes qui se résolvent par des méthodes particulières dont on trouve le procédé dans les traités les plus élémentaires d'arithmétique, et choisissons, parmi les problèmes de Reynaud, quelques-uns de ceux qui semblent échapper à toute solution; tels sont, par exemple, ceux de fausse position, et particulièrement ceux des §§ **485** et **486**.

Le joueur énigmatique qui dit posséder une somme telle que l'excès du quintuple de ses louis sur 30 est égal à l'excès du double de ses louis sur 6; pose une équation que l'algèbre résout aisément.

En effet, soit x le nombre cherché; l'excès du quintuple de ses louis sur 30 est $5x-30$; de même, l'excès du double de ses louis sur 6 est $2x-6$; or, d'après l'énoncé même :

$$5x-30=2x-6.$$

Les données du problème sont devenues purement arithmognosiques, et leurs relations arithmiques sont établies dès le début; le procédé arithmologique est très-simple :

Faisant passer les quantités connues dans un des membres de l'équation, il vient :

$$5x-2x=30-6=24$$

d'où

$$3x=24 \quad \text{et} \quad x=\frac{24}{3}=8.$$

Le joueur a donc 8 louis.

Si l'âge d'un père (§ **486**) est triple de celui de son fils, et, s'il y a dix ans, il en était le quintuple, on reconnaît d'abord que les nombres qui figurent dans le problème sont de même espèce, c'est à dire expriment des années. L'opération arithmognosique ne présente donc aucune difficulté.

Le procédé arithmique devient plus difficile, car on ne saisit pas tout d'abord les relations entre les données. Cependant, appelons x l'âge du fils, $3x$ est l'âge du père.

Il y a dix ans l'âge du fils était $x-10$, celui du père $3x-10$, mais alors ce dernier nombre était égal à 5 fois l'âge du fils, d'où

$$5(x-10)=3x-10, \quad \text{soit} \quad 5x-10\times5=3x-10$$

on trouve successivement :

$$5x-3x=50-10, \quad \text{d'où} \quad 2x=40, \quad \text{et} \quad x=20.$$

Le fils a donc 20 ans et son père 60. Il y a dix ans le fils avait 10 ans et son père 50.

504. Résolvons maintenant quelques problèmes du 1er degré. On se fera une idée du procédé algébrique à l'aide de la méthode de fausse position, car en supposant un nombre quelconque comme étant le nombre cherché, on est conduit naturellement à vérifier si ce nombre est conforme aux données du problème. On établit ainsi une série de calculs dans laquelle on remplacera le nombre supposé par x, et dont on tirera un résultat exact.

Un spéculateur fait 3 opérations où il perd dans la 1re la moitié, dans la 2e le quart, dans la 3e la dixième partie de son bien primitif; il lui reste encore 300 fr.; quelle était sa fortune?

En supposant qu'elle fut de 32000 fr., il faudrait écrire :

$$32000=\frac{32000}{2}+\frac{32000}{4}+\frac{32000}{10}+300.$$

Mais si cette égalité est fausse, car elle équivaut à $32000=27500$, le procédé

de vérification est juste, et l'on pourra, en remplaçant 32000 par x, affirmer que

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{10} + 300.$$

Multipliant tout par 20, dénominateur commun (**203**), on a :

$$20x = 10x + 5x + 2x + 6000$$

d'où $20x - 10x - 5x - 2x = 6000$, soit $3x = 6000$ et $x = 2000$.

Le spéculateur avait donc 2000 fr.

« Ainsi, notre règle, dit Francœur, consiste à faire subir à x toutes les opérations qu'on fera sur le nombre cherché, lorsque, après l'avoir trouvé, on voudra vérifier s'il répond en effet à la question.

« La valeur arbitraire attribuée à l'inconnue ne sert qu'à mettre ces calculs en évidence, et l'usage apprend bientôt à s'en passer. »

505. Il est certains problèmes qui ne se traitent pas aussi facilement par la méthode algébrique que par le simple raisonnement, tel est celui que présente Reynaud dans son *Algèbre* et qui résout le problème du § **480**, à l'aide de plusieurs inconnues.

« Désignons, dit-il, par x, y et z francs, les sommes avec lesquelles les joueurs entrent au jeu.

« Le 1er joueur, ayant perdu la 1re partie, donne y francs au 2e joueur et z francs au 3e; il ne lui reste donc que $x - y - z$ francs. Ainsi, à la fin de la 1re partie, le 1er joueur a $x - y - z$ francs; le 2e a $2y$ francs, et le 3e a $2z$ fr.

« On trouvera de même qu'à la fin de la 2e partie, le 1er joueur a $2(x - y - z)$ francs, le 2e a $3y - x - z$ francs, le 3e a $4z$ francs; et qu'après la 3e partie, le 1er joueur a $4(x - y - z)$ francs, le 2e a $2(3y - x - z)$ francs, et le 3e a $7z - x - y$ francs.

« Les équations du problème sont donc

$$4(x - y - z) = 24, \quad 2(3y - x - z) = 28, \quad 7z - x - y = 14;$$

elles se réduisent à

$$(1) \qquad \ldots x - (y + z) = 6, \quad 3y - (x + z) = 14, \quad 7z - (x + y) = 14.$$

« On en déduit, $x = 36$, $y = 20$, $z = 10$.

« On peut simplifier les calculs en observant que l'argent total des joueurs devant rester constamment le même, on a

$$x + y + z = 24 + 28 + 14 = 66;$$

d'où $y + z = 66 - x$, $x + z = 66 - y$, $x + y = 66 - z$.

« Ces trois relations réduisent les équations (1) à

$$x - (66 - x) = 6, \quad 3y - (66 - y) = 14, \quad 7z - (66 - z) = 14;$$

et l'on tire de ces dernières, $x = 36$, $y = 20$, $z = 10$. »

Cet exemple a pour but de démontrer qu'il ne faut jamais s'abandonner exclusivement aux procédés algébriques. Ajoutons en passant que les problèmes résolus à l'aide de plusieurs inconnues présentent généralement beaucoup de chances d'erreur quand ils sont traités par une méthode mécanique.

506. Lorsque l'on veut résoudre un problème à l'aide de deux ou plusieurs inconnues, il faut, ainsi que l'on vient de le voir, tirer de l'énoncé autant d'équations différentes que l'on établit d'inconnues.

Un orfèvre a fait 3 alliages d'or, d'argent et de cuivre, chacun pesant 160 grammes.

Dans le 1er il y a	70 grammes d'or,		80 d'argent et		10 de cuivre.	
Dans le 2e	— 50	—	70	—	40	—
Dans le 3e	— 20	—	90	—	50	—

Il veut faire, avec ces 3 alliages, un 4e alliage qui contienne $40^g + \frac{150}{160}$ d'or, $70^g + \frac{100}{160}$ d'argent, et $30^g + \frac{70}{160}$ de cuivre.

Soit x le nombre de grammes qu'il faut prendre du 1er alliage.

y	—	—	—	2e	—
z	—	—	—	3e	—

x grammes du 1er alliage contiennent $\frac{70x}{160}$ d'or,

y — du 2e alliage contiennent $\frac{50y}{160}$ d'or,

z — du 3e alliage contiennent $\frac{20z}{160}$ d'or,

car chaque gramme contient la même fraction de métal que le tout, dans chaque alliage.

Ces trois quantités réunies contiendront les $40^g + \frac{150}{160}$ d'or qui figureront dans le 4e alliage.

On obtiendra donc l'équation

$$\frac{70x + 50y + 20z}{160} = \frac{40 \times 160 + 150}{160}$$

qui revient, en divisant tout par 10 et en supprimant le dénominateur commun 16, à

$$(1°) \qquad 7x + 5y + 2z = 79.$$

On verrait de même que les trois quantités d'argent qui figureront dans le 4e alliage seront :

$$(2°) \qquad 8x + 7y + 9z = 122,$$

et les trois quantités de cuivre

$$(3°) \qquad x + 4y + 5z = 55.$$

En traitant les équations par la méthode indiquée au § **432** et suivants, on trouve

$$x = 4, \quad y = 9, \quad \text{et } z = 3.$$

Et, comme ces résultats sont trop faibles, car nous avons opéré sur des quantités divisées par 10, nous conclurons qu'il faudra prendre 40 grammes du 1er alliage, 90 du 2e et 30 du 3e pour former le 4e alliage.

507. Il n'entre pas dans le plan de cet ouvrage d'insister sur la solution des problèmes, car elle fait l'objet d'un enseignement spécial. Ce que nous venons d'exposer, au sujet des problèmes du 1er degré, suffit pour donner une

idée de la méthode suivie ; nous ne parlerons pas ici des problèmes du 2e degré, qui ne peuvent être étudiés complétement que dans la théorie des *quantités variables*, parce que les solutions qu'ils fournissent sont souvent difficiles à déterminer et doivent toujours être soumises à la discussion, comme nous allons le voir.

Quelques-uns de ces problèmes ne figurent dans l'enseignement des mathématiques élémentaires que pour servir de transition à l'enseignement supérieur, en établissant les principes sur lesquels se fondent les théories de ce dernier enseignement.

CHAPITRE III

THÉORIE DES QUANTITÉS VARIABLES. — Ire PARTIE.

DES FORMULES.

I

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

508. Ce que nous venons d'exposer pour les problèmes en général, et pour les règles de trois en particulier, montre suffisamment combien il est difficile de fixer des règles pour la solution des différentes questions soumises au calcul. La théorie générale fait complètement défaut, tant à cause de la variété des problèmes que de l'obscurité dont on cherche souvent à en envelopper les énoncés.

Cependant, quand on examine les différentes solutions obtenues, et quand on les écrit sous forme algébrique, c'est à dire avec leur expression la plus simple et la plus générale, on ne tarde pas à s'apercevoir qu'elles se réduisent à un petit nombre de formules. La seule manière de constituer une théorie se réduit donc à établir méthodiquement les différentes formules que peuvent présenter les calculs, à les analyser, et enfin à déterminer à quelles catégories de problèmes elles peuvent être appliquées.

L'établissement méthodique de ces formules n'a pas, que nous sachions, été tenté; il n'en est pas de même de l'analyse méthodique, qui a été poussée aussi loin qu'il est possible actuellement de le désirer; quant à l'étude des applications, elle est encore à faire.

Nous n'avons pas la prétention de constituer ici la théorie cherchée; il nous suffira d'en indiquer les principaux linéaments et de mettre le lecteur sur la voie des procédés à employer.

509. Les quantités ne se combinent les unes avec les autres que de six manières différentes : comme sommes, différences, produits, quotités, puissances ou racines. Il est vrai qu'elles peuvent se présenter en nombre infini sous l'une ou quelques-unes de ces formes; mais, à mesure que le nombre des quantités augmente, les simplifications se produisent, et il se dégage une sorte d'uniformité dans les calculs qui, au premier abord, semblaient devoir se

compliquer. C'est ce qu'il a été facile d'observer déjà lorsque nous avons eu à traiter plusieurs équations du 1[er] degré à plusieurs inconnues, §§ **437** et **438**.

510. Pour déterminer ces différentes combinaisons on peut partir d'une formule générale et très-simple.

Prenons, par exemple, la formule générale de l'addition, où l'on représente les nombres à additionner par a, b, c, d... et leur somme par k :

$$(1^\circ) \quad a+b+c+d\ldots=k.$$

Si l'on attribue à chaque lettre des valeurs égales : $a+b=2a$, $a+b+c=3a$, $a+b+c+d\ldots=na$, en supposant qu'il y ait n lettres, cette hypothèse donne la formule de la multiplication :

$$(2^\circ) \quad na=k$$

Si l'on suppose que, dans cette dernière formule, n est égal à a, on obtient $aa=k$, soit la formule de l'élévation à la 2[e] puissance :

$$(3^\circ) \quad a^2=k$$

En tirant de ces trois formules la valeur de a, il vient :

de la première : $(4^\circ) \quad a=k-(b+c+d\ldots)$

de la seconde : $(5^\circ) \quad a=\frac{k}{n}$

de la troisième : $(6^\circ) \quad a=\sqrt{k}$

Voici donc six formules très-simples tirées d'une seule, et auxquelles correspondent les six opérations. Chacune d'elles peut être considérée comme la solution d'un problème. On va voir qu'il est facile de déterminer les différents cas que peuvent présenter chacune de ces formules. Pour cela, il suffira d'attribuer des valeurs différentes à la lettre a qui figure dans toutes ces formules.

Nous supposerons que toutes les autres lettres expriment des nombres positifs, entiers, fractionnaires ou fractions.

Dans (1°) si a est plus grand que zéro, il figurera comme partie de la somme k;
si a est nul, c'est à dire égal à zéro, la somme k sera égale à $(b+c+d\ldots)$;
si a est négatif, c'est à dire plus petit que zéro, il faudra le retrancher de la somme $(b+c+d\ldots)$, mais il sera plus petit que cette somme, autrement k serait négatif.

Dans (2°) $na=k$, si a est un nombre entier ou fractionnaire, k sera plus grand que n;
si a est égal à 1, k sera égal à n;
si a est une fraction, k sera plus petit que n (§ **132**);
mais on ne peut faire $a=o$ ni $a<o$, car k serait nul ou négatif.

Dans (3°) $a^2=k$, a nombre entier donne pour k un carré parfait;
$a=1$ donne $k=1$;
a nombre fractionnaire ou fraction donne pour k une quotité commensurable, mais irréductible;
cela sera encore vrai pour $a<o$, car $(-a)^2$ donne $+a^2=+k$;
mais on ne peut admettre $a=o$, car alors k serait égal à zéro.

Dans (4°) $a = k - (b + c + d\ldots)$, a nombre positif suppose $k > (b+c+d\ldots)$,
$a = o$ suppose $k = (b+c+d\ldots)$.
a négatif suppose $k < (b+c+d\ldots)$.

Dans (5°) $a = \frac{k}{n}$, a est positif dans toutes les conditions $k > n$, $k < n$, et $k = n$, dans ce dernier, il est égal à 1.

Dans (6°) $a = \sqrt{k}$, a ne peut être que positif; mais il sera commensurable, ou incommensurable, suivant que k sera, ou non, carré parfait.

511. Tout ce qui précède rentre dans la *théorie des quantités fixes*, dont les opérations aboutissent à des résultats simples ou complexes, mais qui ne peuvent varier. Dans la *théorie des quantités variables*, au contraire, les résultats sont toujours entachés d'incertitude et ne peuvent être fixés qu'à la suite d'une discussion.

Examinons d'abord les cas où des opérations simples donnent des résultats incertains et inattendus.

I. Un négociant a pour 150 fr. de frais par jour; il fait en un jour trois ventes dans lesquelles il réalise successivement 42 fr., 77 fr. et 28 fr. de bénéfice; combien a-t-il gagné?

Réponse : $42 + 77 + 28 - 150 = -3$.

Il a gagné -3 fr., c'est à dire qu'il a perdu 3 fr. L'énoncé du problème était faux, il devait avoir pour objet la perte et non le gain; mais pouvait-on le savoir avant la solution?

Ce cas est celui que nous avons signalé dans le § **510** (1°) comme devant être écarté de la théorie des quantités fixes.

II. On trouvera une solution différente dans le cas (2°), où l'on admet que l'un des facteurs n ou a d'un produit k est égal à zéro, le résultat k devient **zéro**. C'est ainsi qu'un négociant qui aurait mis n valeurs entre a mains infidèles, n'obtiendrait aucun produit. Il en aurait été de même s'il avait mis n valeurs nulles entre a mains fidèles, ou encore n valeurs nulles entre a mains infidèles. L'hypothèse d'un produit nul entraîne nécessairement l'idée d'un facteur ou de deux facteurs nuls et réduit à néant le résultat de l'opération.

III. Un homme meurt laissant un trésor de 56,000 fr. à partager entre 4 héritiers. La part de chacun sera 14,000 fr. $= \frac{56{,}000}{4}$; mais il ne se présente aucun héritier, le testament est donc nul.

Il en aurait été de même si, les 4 héritiers s'étant présentés, le trésor n'avait pu être trouvé.

Mais dans le cas où la fortune du défunt ne serait réclamée par aucun héritier, parce qu'on supposerait que l'héritage est irréalisable, il serait permis d'attribuer à cet héritage toutes les valeurs possibles, depuis zéro jusqu'à l'infini, soit en gain, soit en perte, dans l'ordre positif comme dans l'ordre négatif. Cet héritage serait donc indéterminé.

Ainsi l'hypothèse $a = \frac{k}{n}$, fait $a = 0$ pour les cas $a = \frac{k}{0}$ et $a = \frac{0}{a}$, mais pour le cas $a = \frac{0}{0}$, on peut attribuer à a toutes les valeurs possibles; elles satisfont à l'équation $a = \frac{0}{0}$. Cette équation est donc le symbole de l'indétermination, car $a \times 0 = 0$, et $\frac{a}{0} = 0$, quelle que soit d'ailleurs la valeur de a.

L'expression $a=\frac{k}{n}$ présente un cas particulier lorsque l'on suppose que le dénominateur n décroît à l'infini. Si l'on fait successivement $n=1$, $n=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{10}$, $n=\frac{1}{1000}$, la valeur de k est successivement a, $2a$, $10a$, $1000a$; en sorte que, à mesure que n devient plus petit à l'infini, la valeur de a devient plus grande à l'infini. Or la limite des décroissements de n étant zéro, l'expression $a=\frac{k}{0}$, donne pour a une valeur infiniment grande. Cette expression est donc le symbole de l'infini.

II

FORMULES DU PREMIER DEGRÉ

PREMIER DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

512. Ces préliminaires posés, revenons sur les problèmes du 1er degré et discutons les résultats auxquels les formules peuvent conduire quand ils sont absurdes, nuls ou indéterminés.

Toute équation du 1er degré à une seule inconnue peut être ramenée à la formule générale :

$$ax + b = cx + d, \quad (1°)$$

dans laquelle les quantités connues a, b, c, d peuvent représenter tous les nombres, de zéro à l'infini, ce qui permet d'obtenir les différentes équations plus simples :

$$x = d, \text{ où } a = 1,\ b = 0,\ c = 0;$$
$$x + b = d, \text{ où } a = 1,\ c = 0,$$
$$x + b = x + d, \text{ où } a = 1,\ c = 1, \text{ etc.}$$

Dans le cas où il y aurait des quantités connues négatives, on pourrait les rendre positives en ajoutant un même nombre aux deux membres de l'équation.

Ainsi, si l'on avait $-15x + 6 = 12x - 16$, on ajouterait de part et d'autre $18x + 18$, ce qui donnerait $3x + 24 = 30x + 2$. Le résultat, dans les deux cas, est toujours $x = \frac{22}{27}$.

L'équation (1°) renferme donc tous les cas possibles des formules du 1er degré, quand on a supprimé les dénominateurs, réuni en un seul tous les multiples de l'inconnue et en une seule toutes les quantités connues.

La discussion des résultats divers auxquels peut conduire une équation du 1er degré pourra toujours être ramenée à celle de la formule (1°) que nous allons analyser.

513. Pour résoudre l'équation $ax + b = cx + d$, il suffira de retrancher $cx + b$ de part et d'autre, ce qui donne $ax - cx = d - b$, soit $(a - c)x = d - b$, d'où $x = \frac{d - b}{a - c}$ (2°).

Dans cette dernière équation, si l'on a $d > b$ et $a > c$, la solution est naturelle, x est un nombre positif; mais si l'on a $d < b$ ou $a < c$, la solution est incertaine, car x devient négatif. — Il faudrait, pour que x restât positif, les deux conditions réunies.

Si le problème annonçait une solution positive, il faudrait en corriger l'énoncé, de manière à ce qu'il ait en vue une solution négative, comme nous l'avons fait au § **511**, I. Quand ce cas se présente, on conclut que le problème avait été mal posé, soit par erreur, soit à dessein.

514. Il y a encore une autre manière de rectifier l'énoncé; elle consiste à établir que l'une des quantités connues du second membre devait être celle du

premier membre et réciproquement, c'est à dire que l'énoncé aurait dû, dans le cas $b > d$, par exemple, conduire à la formule $ax + d = cx + b$, ce qui aurait donné pour x la valeur positive $x = \frac{b-d}{a-c}$.

515. Une équation du 1er degré à une seule inconnue n'admet qu'une solution, soit positive, soit négative.

En effet, si dans l'équation $ax + b = cx + d$, x pouvait être égal à A et à B, on aurait $aA + b = cA + d$ et $aB + b = cB + b$.

En retranchant ces deux équations membre à membre, il reste encore une équation $a(A - B) = c(A - B)$,
dans laquelle a et c étant inégaux, d'après la donnée même, ne peuvent devenir égaux à la suite de leur multiplication par $(A - B)$, qu'à la condition $(A - B) = 0$, c'est à dire $A = B$.

Toute autre valeur attribuée à A et à B conduirait à une conclusion contraire à la donnée.

516. L'équation $x = \frac{d-b}{a-c}$ présente encore un cas, c'est celui où $a = c$. Il vient alors $x = \frac{d-b}{0}$, où x serait infini ; mais l'expression $x = \frac{d-b}{0}$ conduit à $x \times 0 = a - b$, qui revient à $0 = d - b$, ou à $d = b$.

Il en résulte que si l'on suppose $a = c$, cette supposition entraîne l'égalité $d = b$, et l'équation devient $x = \frac{0}{0}$, où l'on pourra attribuer à x toutes les valeurs possibles, comme nous l'avons vu au § **511**, III. La solution, dès lors, est indéterminée.

Il en serait de même pour le cas $d = b$.

PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

517. Les formules (A) et (B) du § **434** : $y = \frac{a'k - ak'}{a'b - ab'}$ et $x = \frac{b'k - bk'}{a'b - ab'}$ ne présentent aucune difficulté tant que les valeurs de x et de y sont positives ; cela fait supposer que les numérateurs et les dénominateurs des fractions sont positifs et que leurs termes sont inégaux.

Quand les valeurs de x et de y sont négatives, il faut modifier l'énoncé § **511**.

Quand on suppose que le dénominateur est égal à zéro, ce qui entraîne l'égalité $a'b = ab'$, on retombe pour les deux équations dans le cas du § **516**.

518. Jusqu'ici il n'y a rien de nouveau, et l'on peut faire les mêmes observations pour les équations du 1er degré à un nombre quelconque d'inconnues, puisque ces équations sont résolues par des formules où les valeurs des inconnues ont toutes un dénominateur commun.

Mais si l'on se reporte au § **426**, on constate que quand on n'a qu'une équation pour deux inconnues, le problème est indéterminé. Il en sera de même pour tous les cas où l'on aura un nombre d'équations inférieur au nombre des inconnues. Or ce cas peut rentrer dans le précédent. Si, dans le système de deux équations à deux inconnues, nous examinons séparément la valeur de chaque inconnue, nous trouvons cette valeur indéterminée quand le dénominateur est égal à zéro ; mais comme les deux équations A et B sont dépendantes l'une de l'autre, dès l'instant que l'on attribue à l'une des inconnues une valeur déterminée, l'autre équation devient elle-même déterminée. § **426**.

En effet, si l'on attribue à y la valeur déterminée n, on rentre dans le cas d'une équation à une inconnue, car l'équation $ax+by=k$ devient $ax+bn=k$, et $x=\frac{k-bn}{a}$.

On peut attribuer à y toutes les valeurs imaginables; mais quand on pose certaines conditions à la solution du problème, il devient facile de découvrir dans quelles limites sont enfermées les valeurs à attribuer,

Soit l'équation unique à deux inconnues $x=32-5z$, où x sera déterminé en *fonction* de z, c'est à dire suivant la valeur attribuée à z, on pourra mettre à la place de z une quantité quelconque; mais si l'on ne veut obtenir pour x que des solutions positives, il faut que $5z$ ne soit pas plus grand que 32, et il n'y a que les nombres positifs 1, 2, 3, 4, 5 et 6 que l'on puisse substituer à z; le nombre 7 serait trop grand, puisqu'il donnerait pour x la solution $32-5\times7=-3$.

Les conditions que l'on pose le plus fréquemment aux problèmes indéterminés consistent à déterminer les valeurs entières d'une des inconnues. La discussion des formules conduit alors à des résultats curieux qu'il serait trop long d'exposer ici.

ÉQUATIONS DU 2e DEGRÉ.

519. Ce que nous venons de dire établit que tous les problèmes n'ont pas pour résultat une solution unique, mais qu'une grande partie de ces problèmes entraîne des solutions multiples. C'est ainsi que toutes les équations du 2e degré présentent au moins deux solutions; mais avant d'examiner la valeur de ces solutions, il importe d'examiner les différents cas que peut présenter la formule du § **445** (3),

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-q+\frac{1}{4}p^2}.$$

Cette formule résume les deux suivantes :

$$1^\circ\quad x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{-q+\frac{1}{4}p^2},\quad \text{et}\quad 2^\circ\quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{-q+\frac{1}{4}p^2}.$$

Or, suivant que la quantité placée sous le radical est positive, nulle ou négative, on obtient trois espèces de solutions :

1° Lorsque q représente un nombre négatif dans la formule originelle $x+px+q=0$, la quantité $\sqrt{-q+\frac{1}{4}p^2}$ devient $\sqrt{-(-q)+\frac{1}{4}p^2}$, soit $\sqrt{+q+\frac{1}{4}p^2}$. Or, quelles que soient les valeurs qui entrent sous le radical, ces valeurs étant positives, on pourra toujours en extraire la racine exacte ou approchée. On voit d'ailleurs que l'équation originelle $x^2+px-q=0$ devient $x^2+px=q$, c'est à dire que les valeurs de l'inconnue sont représentées par une quantité connue;

2° Si l'on admet que la quantité placée sous le radical est nulle, la formule se réduit à $x=-\frac{p}{2}$; il n'y a plus qu'une seule solution;

3° Si la quantité placée sous le radical $-q+\frac{1}{4}p^2$ est négative, les racines

de x sont *imaginaires*. c'est-à dire qu'aucun nombre mis à la place de x ne saurait réduire x^2+px+q à zéro.

520. Les racines x' et x'' du § précédent étant ajoutées l'une à l'autre, on a $x'+x''=-2\frac{p}{2}=-p$, car les deux radicaux se détruisent par la réduction.

Les racines x' et x'' étant multipliées l'une par l'autre, on a

$$x'\times x''=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\times\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right).$$

Or le produit d'une somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces quantités (page 431), et le produit $x'\times x''$ devient

$$\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2,\ \text{soit}\ \frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right),$$

qui équivaut à q. Il en résulte que $x'\times x''=q$.

Ainsi *la somme des deux racines d'une équation du 2e degré à une seule inconnue est égale au coefficient de l'inconnue pris avec un signe contraire.*

Et *le produit de ces deux racines est égal à la quantité qui résume les termes connus.*

521. Des relations $x'-x''=p$ et $x'\times x''=q$ on conclut que :

1° Quand $p=0$, la somme des racines est nulle, et pour cela il faut qu'elles soient égales et de signes contraires;

2° Quand $q=0$, le produit des racines est nul, et pour cela il faut que l'une de ces racines soit nulle.

On tire parti des résultats précédents pour déterminer à première vue quelle est la nature des racines de l'équation du 2e degré à une inconnue.

Ainsi, dans l'équation $9x^2-12x+3=0$, le produit des deux racines étant $+3$, elles sont de même signe, toutes deux positives ou toutes deux négatives, mais comme leur somme est $+12$, on en conclut qu'elles sont positives; en effet $x'=4$ et $x''=\frac{1}{3}$.

Dans l'équation $x^2-x-2=0$, le produit des deux racines étant -2, elles sont de signe contraire, mais leur somme étant $+1$, il faut que la racine positive soit plus grande que la racine négative; en effet : $x'=2$ et $x''=-1$.

On peut aussi, lorsque l'on connaît une des racines, déterminer l'autre très-simplement; en effet : $x'+x''=-p$, d'où $x'=(p+x'')$ et $x''=-(p+x')$.

Ainsi, l'une des racines de l'équation $x^2-5x+6=0$ étant $+3$, l'autre racine sera $x'=-(-5+3)=+5-3=2$.

522. Jusqu'ici nous avons ramené la formule générale, § **443**,

$$Ax^2+Bx=C$$

à l'équation plus simple $x^2+px+q=0$, dans laquelle x^2 est débarrassé de son coefficient. L'emploi de cette formule est plus expéditif dans les problèmes où x^2 se trouve sans coefficient; mais dans les problèmes où il est accompagné d'un coefficient, il est préférable d'employer une formule définitive où figure ce coefficient.

Cherchons cette formule.

Elle revient à $Ax^2+Bx+C=0$ où A, B, C peuvent être positifs ou négatifs.

Multiplions tout par 4A, il vient :

$$4A^2x^2+4ABx+4AC=0,\quad \text{soit}\ 4A^2x^2+4ABx=-4AC$$

ajoutons de part et d'autre B^2, il vient : $4A^2x^2 + 4ABx + B^2 = B^2 - 4AC$, équation dans laquelle le premier membre est le carré de $2Ax + B$ donc $(2Ax + B)^2 = B^2 - 4AC$,

on en tire la formule cherchée, qui est : $x = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ (Y)

C'est ce que l'on aurait trouvé d'une autre manière en remplaçant, dans la formule $x = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$, p par $\dfrac{B}{A}$ et q par $\dfrac{C}{A}$ § **445**.

Lorsque l'on aura une équation où x^2 se présentera avec un coefficient ($9x^2 - 12x + 3 = 0$ par exemple), on emploiera donc la formule (Y).

$$x = +12 \pm \frac{\sqrt{12^2 - 4(9 \times 3)}}{2 \times 9} \quad \text{d'où l'on tire } x' = 1 \text{ et } x'' = \frac{1}{3}.$$

523. On résout aisément deux équations à deux inconnues, quand l'une étant du 2ᵉ degré, l'autre est du 1ᵉʳ degré :

Soit : $x - y + 1 = 0$ et $x^2 + y^2 + y - x - 14 = 0$.

La 1ʳᵉ équation donne $y = 1 + x$ et la 2ᵉ devient $x^2 + x - 6 = 0$ d'où $x' = 2$ et $x'' = -3$ et comme $y = 1 + x$, y est égal à $+3$ et à -2.

524. Voici quelques problèmes choisis par Francœur pour élucider cette théorie.

I. Trouver un nombre x tel, qu'en ôtant 2 de son carré le reste soit 1. On a $x^2 - 2 = 1$, d'où $x = \pm \sqrt{3}$.

II. Partager a en deux parties telles, que m fois la 1ʳᵉ, multipliée par n fois la 2ᵉ, donne le produit p. On a

$$mxn(a - x) = p, \quad \text{d'où} \quad x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{p}{mn}\right)}.$$

• Si l'on veut partager a en deux parties, dont le produit p soit donné, il faut faire $m = n = 1$. Comme les racines sont imaginaires lorsque $p > \frac{1}{4}a^2$, on voit que le produit ne peut surpasser le carré de la moitié de a, c'est à dire que le carré de $\frac{1}{2}a$ est le plus grand produit possible qu'on puisse former avec les deux parties de a.

III. Étant donnés le produit p de deux poids et leur différence, trouver chacun d'eux ? On a $xy = p$, $x - y = d$; d'où

$$x = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + p)}$$

et

$$y = -\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + p)}.$$

IV. Trouver deux nombres tels, que leur somme a, et celle b de leurs cubes soient données. De $x + y = a$, $x^3 + y^3 = b$, on tire $a^3 - 3a^2x + 3ax^2 = b$, et faisant $b = af$, on a

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{3}f - \tfrac{1}{12}a^2)}$$

et

$$y = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{3}f - \tfrac{1}{12}a^2)}.$$

V. Quel est le nombre dont n fois de puissance p est égale à m fois la puissance $p + 2$? $x = \pm\sqrt{\dfrac{n}{m}}$.

VI. Plusieurs personnes sont tenues de payer les frais d'un procès, montant à 800 fr. ; mais trois sont insolvables, et les autres, suppléant à leur

défaut, sont contraintes de donner chacune 60 fr. outre leur part; on demande le nombre x des payants. On a $\frac{800}{x+3}=\frac{800}{x}-60$, d'où $x^2+3x=40$ et $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{4}+40)}=-\frac{3}{2}\pm\frac{13}{2}$; ainsi, il y avait 5 payants, au lieu de 8. Il est aisé d'interpréter la racine négative -8.

VII. Soit donnée une fraction $\frac{a}{b}$; quel est le nombre x qui, ajouté, soit au numérateur a, soit au dénominateur b, donne deux résultats dont le premier soit k fois le deuxième, ou

$$\frac{a+x}{b}=\frac{ak}{b+x},\quad x^2+(a+b)\,x=ab\,(k-1);$$

donc
$$x=-\tfrac{1}{2}(a+b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[(a-b)^2+4abk]}.$$

ÉQUATIONS DU DEGRÉ SUPÉRIEUR.

525. Certaines équations du 4ᵉ degré, quand elles ne comprennent pas la 3ᵉ puissance de x et peuvent se ramener à la forme $x^4-2px^2-q=0$, se décomposent en deux équations du 2ᵉ degré; car si $z=x^2$, l'équation devient

$$z^2-2pz-q=0,$$

dont les racines seront a' et a'';

Or, comme $x=\pm\sqrt{z}$, l'équation a quatre racines $+\sqrt{a'}-\sqrt{a'}+\sqrt{a''}-\sqrt{a''}$.

Il est facile de conclure de ceci que les racines se multiplient à mesure que l'inconnue a des exposants plus élevés. On peut dire, en effet et généralement, qu'une équation du $m^{ième}$ degré a m racines.

526. On conçoit dès lors que plus le degré des équations s'élève, plus la discussion devient complexe, et qu'il faut renoncer à suivre la méthode que nous avons indiquée ici. Quelques mathématiciens l'ont poursuivie pour les 3ᵉ, 4ᵉ degrés et quelques cas des degrés supérieurs. Ce travail, très-délicat et très-difficile, n'aboutit pas à une solution générale. Il a fallu chercher d'autres moyens.

Pour cela, on a recherché quelles étaient les propriétés générales des racines des équations de tous les degrés, ce qui a conduit à déterminer diverses théories applicables à certains cas; mais la théorie complète fait défaut jusqu'à ce jour, et les solutions que quelques mathématiciens, et tout récemment Wronski, ont présentées comme des solutions applicables à tous les cas ne sont guère praticables à cause des difficultés que l'on éprouve à les interpréter dans le cours des calculs.

CHAPITRE III

FONCTIONS. — THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS. — IIe PARTIE

I

PRÉLIMINAIRES.

Nous ne pouvons exposer ici que les rudiments de la théorie générale des équations; mais avant d'aborder cette partie de l'arithmologie, on fera bien de reprendre d'abord en sous-œuvre, et au point de vue de l'algèbre, toutes les théories que nous avons exposées dans le premier chapitre de cet ouvrage, en ayant soin de remplacer les nombres constitutifs du calcul par des lettres, et en attribuant successivement à ces lettres toutes les valeurs possibles, c'est à dire en les faisant varier, dans l'ordre positif, de 1 à l'infiniment grand, et de 1 à 0 dans l'infiniment petit. On examinera, par la même occasion, les hypothèses des valeurs inférieures à zéro, c'est à dire négatives.

Nous avons déjà donné plusieurs exemples de cette manière de procéder.

On étudiera ensuite la multiplication et la division des quantités algébriques en l'étendant aux polynomes les plus compliqués, et on s'exercera particulièrement aux opérations qui ont trait aux polynomes ordonnés d'après les puissances croissantes et décroissantes d'une même lettre.

Enfin, en ce qui concerne les puissances et les racines, on procèdera de la façon suivante :

II

BINOME DE NEWTON ET PUISSANCES.

527. Pour les puissances d'une somme composée de deux parties $(x+a)$, on suivra le procédé indiqué au § **378**, qui conduit à la formule générale

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\times 2}a^2x^{m-2} + m\frac{(m-1)(m-2)}{2\times 3}a^3x^{m-3}\ldots + a^m,$$

dans laquelle les quantités m, $\frac{m(m-1)}{1\times 2}$, $m\frac{(m-1)(m-2)}{2\times 3}$ indiquent la com-

position du coefficient, et où les exposants de x vont en décroissant de x^m à x^0, tandis que ceux de a vont en croissant de a^0 à a^m.

Il importe de faire connaître comment on a obtenu cette formule.

528. Nous avons vu, § **378**, comment se formaient les puissances d'une somme $(a+b)$ ou $(d+u)$ quand leurs coefficients étaient numériques. Newton a donné la formule de la formation algébrique de ces puissances, de telle sorte que, quelle que soit la puissance, on peut toujours déterminer les termes qui la constituent.

Si l'on multiplie $(x+a)$ par $(x+b)$ le produit est $x^2+ax+bx+ba$, soit

$$x^2+(a+b)x+ab.$$

Ce produit, multiplié par $x+c$, donne

$$x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(ca+cb)x+abc, \text{ soit}$$
$$x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

Ce nouveau produit, multiplié par $x+d$, donnera

$$x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$
$$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

En sorte que si l'on ordonne le produit $(x+a)\times(x+b)\times(x+c)\times(x+d)\ldots$, d'après l'ordre décroissant des puissances de x, on pourra représenter le produit de m facteurs décomposés en deux parties dont l'une est x et l'autre une lettre quelconque, par la form le générale :

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots+Nx^{m-s}\ldots+Px^2+Qx+abcdef\ldots$$

dans laquelle A est la somme $a+b+c+d+\ldots$ des deuxièmes termes des facteurs du binome;

B est la somme $ab+ac+bc\ldots$ des produits formés par les *combinaisons* de ces deuxièmes termes 2 à 2;

C est la somme $abc+acd+abd\ldots$ des produits formés par les *combinaisons* de ces termes 3 à 3;

. . . .

N est la somme des produits formés par les *combinaisons* des deuxièmes termes s à s;

. . . .

P est la somme des produits formés par les *combinaisons* des deuxièmes termes 2 à 2;

Q est la somme des produits formés par les *combinaisons* des deuxièmes termes 1 à 1.

Enfin, le dernier terme est un produit indépendant de x et composé de tous les deuxièmes termes pris comme facteurs.

Cela posé, si l'on fait tous les deuxièmes termes égaux à a : $b=a$, $c=a$, $d=a\ldots$, etc.

A sera égal à a répété autant de fois qu'il y a de seconds termes; or, comme il y en a m, on a $A=ma$.

B sera égal à a^2 répété autant de fois qu'il y a de combinaisons des seconds termes 2 à 2; or le nombre de ces seconds termes étant m, le nombre de leurs combinaisons 2 à 2 sera, § **367**,

$$m\,\frac{m-1}{2}, \text{ soit } B=m\,\frac{m-1}{2}\,a^2.$$

C sera égal à a^3 répété autant de fois qu'il y a de combinaisons 3 à 3 entre les seconds termes, et le nombre de ces combinaisons étant

$$m\,\frac{(m-1)\times(m-2)}{2\times 3},\quad \text{on a}\quad C=m\,\frac{(m-1)\times(m-2)}{2\times 3}\,a^3.$$

N sera égal à $m\,\dfrac{(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots}{2\times 3\times 4\ldots}\ldots a^4$.

$P=\dfrac{m-1}{2}\,a^{m-2}$;

$Q=ma^{m-1}$;

Enfin, le dernier terme où x est absent, est a^m.

Dans la supposition que tous les seconds termes sont égaux à a et qu'il y a m termes, le produit $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots$ équivaut à $(x+a)^m$.

Et la formule $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-1}+\ldots abcd\ldots$ donne

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+m\,\frac{(m-1)}{2}\,a^2x^{m-2}+m\,\frac{(m-1)\,(m-2)}{2\times 3}\,a^3x^{m-3}\ldots$$

$$\ldots+m\,\frac{m-1}{2}\,a^{m-2}x^2+ma^{m-1}x+a^m.$$

Cette formule devient ainsi la formule générale à l'aide de laquelle on obtient la puissance quelconque d'une quantité binome.

On voit que cette formule est composée de $m-1$ termes. Les coefficients qui y figurent ont été donnés par le triangle arithmétique de Pascal; mais on peut ici les obtenir directement en remplaçant m par sa valeur.

529. Le premier terme est x^m, le dernier a^m.

Dans les termes intermédiaires la puissance de a croît d'autant d'unités qu'il en faut retrancher à l'exposant m de x^m.

Après le coefficient moyen, qui peut se répéter une fois et qui est le plus fort des coefficients, les autres coefficients reparaissent en ordre rétrograde.

530. Quand on fait, dans $(x+a)^m$, $a=(-a)$ on obtient le développement de la puissance du binome $(x-a)^m$ en remplaçant dans celui du binome $(x+a)^m$ le signe $+$ par le signe $-$, dans tous les termes où figure la lettre a affectée d'un exposant impair. Il est clair que dans les termes où a porte un exposant pair, le signe $+$ est maintenu, car $(-a)^2,=+a^2$, $(-a)^4=+a^4\ldots$, etc., ainsi que nous l'avons vu au § **142**.

Pour ne pas compliquer les quelques notions que nous allons donner de l'algèbre supérieure, nous supposerons toujours que m est un nombre entier et positif.

Nous représenterons en outre par a, b, c, d toutes les quantités *constantes*, c'est à dire les quantités dont la valeur reste toujours la même dans le cours du même calcul.

Nous représenterons par x, y, z toutes les quantités *variables*, c'est à dire les quantités auxquelles on peut substituer des valeurs différentes dans le cours du même calcul.

En d'autres termes, les quantités que l'algèbre élémentaire représente comme quantités connues resteront *constantes*, et celles qu'elle représente comme quantités inconnues seront *variables*.

La puissance $(x+a)^9$ sera donc, suivant que l'on consulte le triangle de Pascal ou la formule de Newton :

$$x^9+9ax^8+36a^2x^7+84a^3x^6+126a^4x^5$$
$$+126a^5x^4+84a^6x^3+36a^7x^2+9a^8x+a^9.$$

531. Si l'on fait $a = p + q$, la formule donne $(x + p + q)^2 = [a + (p + q)]^2$ et $[x+(p+q)]^m = x^m + m(p+q)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1+2}(p+q)^2 x^{m-2} \ldots + (p+q)^m$, dans laquelle les puissances de $(p+q)$ se déterminent de la même façon que pour $(x+a)^m$.

On peut donc former la puissance m d'un trinome $(a+b+c)^m$.

Pour former la puissance d'un polynome $(a+b+c+d\ldots k)^m$, on fera $(c+d\ldots k) = x$, ce qui donnera le trinome $(a+b+x)^m$, dont on peut former la puissance; décomposant ensuite x en $c+y$, y étant égal à la somme des lettres $(d+e+\ldots k)$. On intercalera cette valeur dans la formule du trinome; de substitutions en substitutions on arrivera à la formule du polynome $(a+b+c+d\ldots k)^m$.

III

RACINES DES POLYNOMES.

532. Pour extraire la racine d'un polynome quelconque P, il faut l'ordonner suivant les puissances décroissantes de l'inconnue dans tous les termes de P. La racine $m^{\text{ième}}$ du 1er terme de P sera le 1er terme a de la racine cherchée. Retranchant ce 1er terme de P; le 1er reste divisé par ma^{m-1} donnera le 2e terme b de la racine. Retranchons $(a+b)^m$ de P, le 1er terme du nouveau reste divisé par ma^{m-1} fournira le 3e terme c de la racine, etc. On observera qu'il faut déterminer la puissance m de la racine à mesure que l'on y fait figurer une nouvelle quantité et extraire cette puissance du polynome entier.

Voici, d'après Reynaud, deux exemples de cette opération :

Soit proposé d'extraire la racine cinquième de

$$810x^7 + 32x^{15} - 240x^{13} - 243x^5 + 720x^{11} - 1080x^9.$$

On ordonne ce polynome suivant les puissances décroissantes de x, et l'on effectue le calcul de la manière suivante :

$$\begin{array}{l|l} P = 32x^{15} - 240x^{13} + 720x^{11} - 1080x^9 + 810x^7 - 243^5 & 2x^3 - 3x \\ \hline \text{1}^{\text{er}} \text{ reste } R_1 = -240x^{13} + 720x^{11} - 1080x^9 + 810x^7 - 243x^5 & \\ \text{2}^{\text{e}} \text{ reste } R_2 = P - (2x^3 - 3x)^5 = 0. & \end{array}$$

La racine cinquième du 1er terme $32x^{15}$ du polynome P donne le 1er terme $2x^3$ de la racine cherchée. Retranchant $(2x^3)^5$ ou $32x^{15}$ du polynome proposé P, on obtient le 1er reste $R_1 = -240x^{13} +$ etc.; la division du 1er terme $-240x^{13}$ de ce reste, par $5(2x)^4$ ou par $80x^4$, fournit le 2e terme $-3x$ de la racine cherchée. On retranche de P la cinquième puissance de $2x^4 - 3x$; le reste R_2 étant zéro, on voit que $2x^3 - 3x$ exprime la racine cinquième du polynome proposé.

On trouvera de même que la racine quatrième de

$$a^8 - \frac{3b^2}{c}a^7 + \frac{27b^4}{8c^2}a^6 - \frac{27b^6}{16c^3}a^5 + \frac{81b^8}{256c^4}a^4, \text{ est } a^2 - \frac{3b^2}{4c}a.$$

IV

FONCTIONS.

533. On appelle fonction toute expression algébrique considérée relativement à sa forme et non à sa valeur. $a + x$, $ax^2 + bx$, $abx^m + abx^{m-1} + abx^{m-2}$ ..., etc., sont des fonctions de x, quoiqu'elles aient des valeurs différentes.

Dans un polynome tel que $x^m + {}^{m-1} + px^{m-2} + \ldots qx + r$, on obtient des résultats différents suivant qu'on attribue à x des valeurs différentes ; mais la forme du polynome restant la même, on le représentera sous la formule générale $F(x)$.

Le polynome précédent étant examiné concurremment avec un polynome de forme différente on représentera celui-ci, pour le distinguer, par la formule générale $f(x)$.

Un 3e polynome d'une autre forme encore, examiné coucurremment avec les deux précédents, sera représenté par $f(x)$.

$F(x)$ et $F(z)$ représentent des fonctions de même forme composées identiquement de la même manière, l'une en x. l'autre en z; si $F(x)$ représente $x^2 + 2x + 5$, $F(z)$ représentera $z^2 + 2z + 5$.

En somme, $F(x)$, $f(x)$, $f(x)$, $F(z)$ ne sont que des abréviations des polynomes que l'on ne veut pas écrire tout au long.

V

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS.

534. Quand on a réduit une équation d'un degré quelconque m à sa plus simple expression, si l'on fait passer tous les termes dans un même membre, on a l'expression générale :

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Qx^2 + Sx + T = 0.$$

Cette expression peut être représentée, pour abréger, par $F(x) = 0$.

Les lettres A, B..., S, T, représentent les quantités qui multiplient les puissances diverses de l'inconnue, et sont des nombres entiers ou fractionnaires, positifs, nuls ou négatifs.

535. Si l'on divise ce polynome $F(x)$ par $x - a$, on obtient un quotient

$$f(x) = A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \ldots S'$$

et un reste R, en sorte que l'opération peut se mettre sous la forme

$$F(x) = (x - a) \times f(x) + R.$$

Ce reste R est nul, ou non, suivant que a est ou n'est pas racine de l'équation $F(x)$.

536. Quand on substitue dans $F(x)$ à la place de la lettre x, et successivement, deux valeurs p et q réelles et finies, on obtient deux résultats de signes contraires, et l'équation a au moins une racine réelle comprise entre p et q.

537. Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à celui de son dernier terme.

538. Toute équation de degré pair dont le dernier terme est négatif a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

539. Quand les termes de l'équation $F(x) = 0$ ont tous le même signe, cette équation n'a pas de racine positive; mais quand les termes sont alternativement positifs et négatifs, elle n'a pas de racine négative.

540. Quand l'équation $F(x) = 0$ ne contient que des puissances paires de l'inconnue, les puissances impaires étant supprimées, toutes les racines ont deux à deux la même valeur numérique avec des signes contraires.

541. Toute équation du degré m peut se décomposer en un seul système de facteurs binomes du 1[er] degré, tels que $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc., au nombre de m, ce qui admet m racines réelles ou imaginaires, mais jamais davantage.

542. Toute équation de degré pair peut se décomposer en facteurs réels du 2[e] degré.

543. Dans toute équation de la forme $F(x)=0$, la quantité B qui multiplie le 2[e] terme de l'inconnue, prise avec un signe contraire, est égale à la somme des racines;

La quantité C, coefficient du 3[e] terme, est égale à la somme des produits deux à deux des racines;

Le coefficient du 4[e] terme, pris en signe contraire, représente la somme des produits trois à trois des racines, etc.

Enfin, le dernier terme, pris avec son signe quand le degré de l'équation est pair, pris avec le signe contraire quand le degré est impair, est égal au produit de toutes les racines.

Remarque. — Comme ces résultats sont vrais pour toutes les équations, on peut les vérifier en partie sur l'équation du 2[e] degré $ax^2+bx+c=0$: on verra qu'ils étendent aux équations de tous les degrés des propriétés que nous avons déjà établies au § **519** et suivants pour les équations du 2[e] degré.

VI

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.

544. Toute équation de la forme $F(x)$ peut être débarrassée du coefficient de son premier terme en remplaçant x par une autre inconnue y, en fonction sur ce coefficient, soit $x=\frac{y}{A}$.

On peut donc ramener toute équation $F(x)$ à une équation plus simple, telle que

$$F(x)=x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}\ldots rx^2+sx+t=0.$$

Cette équation est dite *transformée*.

545. On peut aussi augmenter d'une même quantité k toutes les racines de $F(x)$; on obtient ainsi une autre transformée; pour cela il suffit de remplacer x par $y-k$. Quand on fait $x=y+k$, on diminue toutes les racines d'une même quantité k.

546. Si dans la même équation on fait $y=\frac{m}{a}$, on fait disparaître le second terme de $F(x)$.

547. Pour multiplier par une même quantité k toutes les racines de $F(x)$, on fait $x=\frac{y}{k}$.

548. Pour diviser par une même quantité k toutes les racines de $F(x)$, on fait $x=yk$.

VII

LIMITES DES RACINES.

549. On appelle *limite supérieure* des racines de l'équation $F(x)$ toute quantité plus grande que la plus grande racine, et *limite inférieure* toute quantité plus petite que la plus petite racine.

Le plus grand coefficient des termes de l'équation, augmenté de 1, est toujours une limite supérieure des racines.

Lorsqu'il y a des termes négatifs, le plus grand coefficient de ces termes, pris en valeur absolue et augmenté de 1, est également une limite supérieure des racines positives.

La fraction qui a pour numérateur le dernier terme de l'équation et pour dénominateur ce dernier terme augmenté de la valeur absolue (*) du plus grand des coefficients, est une limite inférieure des racines.

VIII

RÈGLES DES SIGNES DE DESCARTES.

550. Quand deux termes consécutifs d'une équation sont de même signe, on dit qu'il y a *permanence;* quand ils sont de signes contraires, on dit qu'il y a *variation.*

Quand l'équation est complète, c'est à dire renferme toutes les puissances de l'inconnue comprise entre x^m et x^0, le nombre des permanences ajouté au nombre des variations donne une somme égale à m, c'est à dire au nombre de ses racines.

Si l'un des termes manque, on lui donne pour coefficient ± 0.

Une équation de la forme $F(x)$ ne peut avoir plus de racines négatives qu'elle ne contient de permanences ni plus de racines positives qu'elle ne contient de variations.

Cette règle, que l'on appelle *règle des signes de Descartes*, parce qu'elle est due à ce philosophe, permet, entre autres applications, de découvrir *à priori*, dans certains cas, si une équation a des racines imaginaires.

Soit l'équation

$$x^3 + 2x - 7 = 0.$$

Remplaçant le terme manquant, celui de la 2e puissance de x, par $\pm 0x^2$, on a

$$x^3 \pm 0x^2 + 2x - 7 = 0.$$

Si l'on prend le signe + pour le second terme, il n'y a qu'une variation et par conséquent qu'une seule racine réelle positive.

Si l'on prend $-0x^2$ pour le second terme, il n'y aura pas de permanence et l'équation n'aura pas de racine négative.

Or l'équation étant du 3e degré, aura trois racines, dont une seule sera réelle; les deux autres seront donc imaginaires.

(*) On appelle valeur absolue d'une quantité cette quantité prise positivement, quel que soit son signe. Ainsi la valeur absolue de + 3 et de − 3 est 3.

IX

FONCTIONS DÉRIVÉES.

551. Quand dans le polynome $F(x)$ on remplace x par $x+k$ et que l'on ordonne les termes par rapport aux puissances croissantes de k, il vient

$$F(x+k) = F(x) + kF'(x) + \frac{k^2}{1\times 2}F''(x) + \frac{k^3}{1\times 2\times 3}F'''(x)\ldots + k^m.$$

$F(x)$ étant le polynome primitif, $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$ sont les fonctions dérivées successives ou les *dérivées successives* de ce polynome primitif.

La valeur de $F'(x)$ développée est $mx^{m-1}+a(m-1)x^{m-2}\ldots+2rx+s$.

La valeur de $F''(x)$ est $m(m-1)x^{m-2}+a(m-1)(m-2)x^{m-3}\ldots+2r$.

La valeur de $F'''(x)$ est $m(m-1)(m-2)\ldots 3\times 2\times 1$.

Si l'on compare ces dérivées entre elles et si on les compare au polynome primitif, on voit qu'elles se déduisent les unes des autres par un procédé constant.

552. Quand on fait croître x d'une manière insensible entre deux limites a et b, la fonction $F(x)$ croîtra tant que la dérivée $F'(x)$ gardera une valeur positive et décroîtra dans le cas contraire.

La dérivée devient nulle quand a représente une valeur *maximum* ou *minimum* de $F(x)$.

Lorsqu'en attribuant à x dans une fonction $f(x)$ des valeurs successives, cette fonction croît d'abord pour diminuer ensuite, on appelle *maximum* l'état de la fonction qui sépare les accroissements des diminutions.

Si $f(x)$ diminue d'abord pour croître ensuite, on appelle *minimum* la valeur qui sépare les diminutions des accroissements.

X

ÉQUATIONS A PLUSIEURS INCONNUES.

553. Pour résoudre des équations à plusieurs inconnues, on procède par voie d'*élimination*, c'est à dire que l'on déduit d'un système d'équations à m inconnues un autre système d'équations à $m-1$ inconnues.

En traitant le nouveau système comme le précédent, on obtient un autre système d'équations où figurent $m-2$ inconnues. On continue de la sorte jusqu'à ce que l'on obtienne une seule équation à une seule inconnue, ainsi qu'il a été dit aux §§ **426** et suivants.

On rentre ainsi dans le cas général d'une seule équation à une seule inconnue, quel que soit d'ailleurs le degré de l'inconnue. L'*équation finale* (à une seule inconnue) est d'un degré qui ne saurait surpasser celui du produit des équations d'où on l'a tirée.

XI

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES A TOUS LES DEGRÉS.

554. Nous avons déterminé les formules à l'aide desquelles on résout les équations du 1er et du 2e degré à une seule inconnue; on peut trouver des formules analogues pour les équations du 3e et du 4e degré, mais pour les degrés supérieurs, il devient presque impossible d'exprimer les racines comme précédemment, à l'aide des coefficients seulement.

Lorsque l'équation est numérique, c'est à dire lorsque toutes les quantités connues sont exprimées en nombres, il est toujours possible de déterminer les valeurs de toutes ses racines réelles, quel que soit le degré de l'équation.

Ces racines peuvent être commensurables et incommensurables.

1° *Des racines commensurables.*

555. Quand tous les coefficients d'une équation à une seule inconnue sont des nombres entiers, les racines commensurables entières de cette équation sont des facteurs du dernier terme.

Dans l'équation

$$ax^m + bx^{m-1} + \ldots px \times q = 0$$

toute valeur substituée à la place de x et qui satisfera aux conditions de l'équation est *racine* de cette équation.

Soit A l'une de ces racines, l'équation devient

$$aA^m + bA^{m-1} \ldots + pA + q = 0,$$

d'où il est visible que

$$q = A(aA^{m-1} + bA^{m-2} \ldots + p).$$

Il résulte de là qu'il suffira d'essayer les diviseurs de q compris entre zéro et les limites supérieures des racines positives et négatives. Ceux des diviseurs qui satisferont à l'équation seront racines de cette équation.

556. Pour calculer toutes les racines commensurables d'une équation, il faut:

1° La ramener à la forme $ax^m + bx^{m-1} \ldots + px + q = 0$, en remplaçant, si l'équation est incomplète, les puissances de x qui manquent par des puissances de x ayant le coefficient zéro;

2° Supprimer le coefficient du 1er terme en ax^m en faisant $x = \frac{y}{a}$;

3° Multiplier tous les termes de la transformée par a^{m-1}; on obtient ainsi une équation qui n'aura pour racines commensurables que des nombres entiers;

4° Prendre les limites supérieures des racines positives et négatives de l'équation;

5° Ecrire sur une même ligne horizontale tous les diviseurs du dernier terme compris entre ces limites par ordre de grandeur, tant avec le signe + qu'avec le signe —;

6° Ecrire au dessous les quotients respectifs;

7° Y ajouter, avec son signe, le coefficient de x; on obtient ainsi de nouveaux dividendes qui, divisés respectivement par les diviseurs primitifs, donnent de nouveaux quotients;

8° Ajouter à chacun de ces nouveaux quotients le coefficient de x^2 et diviser par les diviseurs primitifs.

On continuera de la sorte jusqu'à ce que l'on ait épuisé les coefficients de tous les termes de l'équation. On négligera tout quotient qui ne sera pas exact. Ceux des diviseurs qui auront fourni dans la dernière ligne des quotients exacts seront racines de l'équation transformée. Pour les rendre racines de l'équation primitive, il faudra les diviser par a^{m-1}.

Voici un exemple, tiré de Reynaud, dans lequel il n'y a pas les transformations 1°, 2° et 3°, à faire subir à l'équation primitive:

$$x^3-7x+6=0$$

et où, par conséquent, il n'y aura pas de division à faire subir aux racines définitives.

On remplacera le terme manquant en x^2 par $+0x^2$, ce qui donne

$$x^3+0x^2-7x+6=0.$$

Les valeurs absolues de ces racines sont comprises entre zéro et $+4$.

Diviseurs à essayer,	$+2$,	$+3$,	-2,	-3,
Quotients q_1,	$+3$,	$+2$,	-3,	-2,
Dividendes q_1-7,	-4,	-5,	-10,	-9,
Quotients q_2 ,	-2,	.... ,	$+5$,	$+3$.
Valeurs,	-2,	.... ,	$+5$,	$+3$.

La première ligne horizontale renferme les diviseurs du dernier terme 6 compris entre les limites des racines. On a divisé 6 par chaque diviseur, ce qui a fourni les quotients q_1 placés dans la deuxième ligne. On a ajouté à ces quotiens le coefficient -7 de x, ce qui a donné les dividendes placés dans la troisième ligne. La division de ces dividendes par les diviseurs correspondants $+2, -2, -3$, de $+6$, a fourni les quotients exacts $-2, +5, +3$; or -5 n'étant pas divisible par $+3$, on en a conclu que $+3$ n'est pas racine. Et comme en ajoutant à ces nouveaux quotients le coefficient zéro de x^2 (ce qui ne change pas ces quotients), les sommes $-2, +5, +3$, doivent être égales aux diviseurs correspondants $+2, -2, -3$, pris avec des signes contraires, on voit que les diviseurs $+2, -3$, sont racines, et que -2 n'est pas racine. D'autre part, $x=1$ satisfait à l'équation proposée. Les trois racines de cette équation sont donc $+1, +2$ et -3.

On ne soumet jamais à ces essais les diviseurs $+1$ et -1 parce qu'il est plus simple de faire $x=\pm 1$ dans l'équation proposée.

557. Remarquons qu'il est fort possible d'avoir pour dernières valeurs deux ou plusieurs nombres égaux, ce qui ne donne au fond qu'une même racine; mais comme on compte autant de racines qu'il y a de degrés dans l'exposant de l'inconnue, on dit alors que l'équation a deux, trois, etc., *racines égales*.

2° *Racines incommensurables.*

558. Les racines incommensurables ne peuvent être obtenues que d'une manière approchée. Il y a plusieurs méthodes pour obtenir rapidement une ap-

proximation satisfaisante; telles sont les méthodes de Newton, de Sturm, de Budan. Elles ne peuvent être exposées ici. Disons en général que pour obtenir avec certitude les valeurs approchées des racines réelles incommensurables, il faut substituer, dans les essais, des nombres qui diffèrent entre eux d'une quantité moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles de l'équation proposée.

Il suffit pour cela que toutes les racines soient inégales.

Or, pour savoir si une équation a des racines égales, il faut déterminer le plus grand commun diviseur entre le premier nombre de l'équation $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$. Quand il n'y a pas de commun diviseur en x, l'équation n'a que des racines inégales.

Dans le cas contraire, on fait dépendre la résolution de l'équation de celle de plusieurs équations d'un degré moindre qui n'ont que des racines inégales et dont les racines sont celles de la proposée. Les procédés que l'on emploie constituent ce que l'on appelle, en général, l'*abaissement des équations*, parce que l'on abaisse le degré de l'inconnue dans les équations qui conduisent à la solution.

559. Il reste maintenant à indiquer comment il faut procéder dans les essais pour la détermination des racines incommensurables.

Soit p la somme de tous les termes positifs du polynome $f(x)$, soit n la somme de tous les termes négatifs du même polynome; $f(x)=0$ pourra se représenter par $p-n=0$. Lorsque x croît d'une manière continue p et n croissent également d'une manière continue, mais on remarque qu'il arrive un point où deux valeurs croissantes successives a et b, substituées à la place de x, donnent, la première un résultat positif, la seconde un résultat négatif. Il en résulte que p, qui était plus grand que n pour les cas $x=a$, devient plus petit que n pour le cas $x=b$. Ni a ni b ne sont les racines, car a est trop faible et b trop fort, mais entre a et b il y a nécessairement une valeur c qui donne $p=n$; or cette valeur, commensurable ou incommensurable, satisfait à l'équation.

Cela posé, soit l'équation $x^3-112x+448=0$; faisons y successivement $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$; jusqu'ici les résultats sont de même signe, mais pour l'hypothèse $x=6$ le résultat, tout à l'heure positif, devient négatif; il y a donc entre 5 et 6 une valeur qui satisfait à l'équation; cette valeur, ne pouvant être un nombre entier, est incommensurable et il faut en approcher.

Pour obtenir cette approximation à moins de 1 dixième d'unité, on fera $x=5,1$, $x=5,2$, $x=5,3$, etc., on verra que $x=5,4$ et $x=5,5$ fournissent des résultats de signe contraire, $x=5,4$ est donc une valeur de la racine à moins de 1 dixième.

Pour obtenir cette valeur à moins de 1 centième, on ferait $x=5,41$ $x=5,42$, $x=5,43$ et l'on verrait que $x=5,42$ à moins de 1 centième.

On arriverait ainsi à déterminer la valeur à moins de 1 dix-millième qui est, d'après Reynaud, 5,4275.

Ce procédé est très long et on ne l'emploie que pour faire comprendre d'une manière générale comment on arrive à déterminer les racines incommensurables.

CHAPITRE III

THÉORIE DES QUANTITÉS VARIABLES. — III[e] PARTIE

CALCUL INFINITÉSIMAL

I

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

560. Le calcul infinitésimal se divise en deux sections : le calcul différentiel et le calcul intégral.

Ce calcul est dit infinitésimal parce que l'on y voit figurer des quantités infiniment grandes ou infiniment petites parmi des quantités finies. Les quantités infiniment petites, appelées *différentielles*, ont pour but d'aider à découvrir des quantités finies inconnues.

Pour avoir une idée d'une différentielle, on peut supposer qu'en cherchant une racine incommensurable d'une équation $F(x)$, on ait poussé l'approximation au delà de toute valeur appréciable, la racine se trouve enfermée entre deux limites très-voisines, mais elle diffère. en moins de la limite inférieure et en plus de la limite supérieure, d'une quantité infiniment petite que l'on ne peut évaluer. Cette quantité est une différentielle.

L'introduction des différentielles dans le calcul a été suggérée pour les cas où, dans un système d'équations à plusieurs inconnues, on a moins d'équations que d'inconnues. L'introduction d'une différentielle donne souvent l'équation qui manque. Aussi est-elle d'un grand usage dans la solution des problémes indéterminés.

La différentielle d'une quantité ou d'une fonction variable $f(x)$ se note en faisant précéder la quantité ou la fonction de la lettre d. dx signifie la différentielle de x. Elle est la différence infiniment petite entre deux états successifs de x quand on fait croître ou décroître cette quantité. dxy est la différentielle du produit de deux quantités variables x et y.

RÈGLES DE LA DIFFÉRENTIATION.

561. On appelle différentiation l'opération par laquelle on obtient la différentielle d'une quantité ou d'une fonction variable. Elle s'opère en retranchant la quantité proposée de cette même quantité augmentée de ses différentielles.

Pour différentier la somme $a+b+x+y$, où a et b sont des quantités déterminées et constantes, tandis que x et y sont des quantités variables, on remarquera que les quantités constantes a et b n'ont jamais de différentielle puisque leur différence est toujours une quantité finie, il n'y aura de différentielles que pour les variables x et y; soit dx et dy ces différentielles.

On trouve pour différentielle de la somme donnée $d(a+b+x+y)$

$$a+b+(x+dx)+(y+dy)-(a+b+x+y)$$

qui équivaut à $dx+dy$ (ce cas est le même que si l'on cherchait la différentielle de la somme $x+y$), d'où

1° La différentielle d'une somme composée de parties constantes et de parties variables est égale à la somme des différentielles des variables.

Si l'on cherche la différentielle de la différence de deux variables x et y, $d(x-y)$, on a $(x+dx)-(y+dy)-(x-y)$; ce qui équivaut à $dx-dy$, donc :

2° La différentielle d'une différence entre deux quantités variables est égale à la différence de leurs différentielles.

La différentielle de xy est $(x+dx)\times(y+dx)-xy=ydx+xdy+dxdy$, mais ce dernier produit $dx\times dy$ est infiniment petit puisqu'il a pour facteurs deux différentielles qui sont chacune des fractions infiniment petites de l'unité. Or, on a vu, § **224**, que le produit des fractions est plus petit que chacun des facteurs. On conclut de là que l'on peut négliger cette dernière valeur, en sorte que $d(xy)$ sera représentée par $ydx+xdy$, donc :

3° La différentielle d'un produit de deux quantités variables est la somme des produits de chaque variable par la différentielle de l'autre variable.

On voit que $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x+dx}{y+dx}-\frac{x}{y}$; en réduisant au même dénominateur, il vient $\frac{ydx-xdy}{y^2-ydy}$. Or, dans le dénominateur, la quantité ydy étant infiniment petite par rapport à y^2, on peut la négliger sans que la valeur de la fraction soit sensiblement altérée, et l'on obtient l'expression définitive $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$, donc :

4° La différentielle du quotient de deux quantités variables est égale à la différence des produits de chaque variable par la différentielle de l'autre en fraction sur le carré de la variable diviseur.

La différentielle de x^m, $d(x)^m$ donne $(x+dx)^m-x^m$ où, en développant les termes de la puissance $(x+dx)^m$, on obtient

$$(x^m+mx^{m-1}dx+\frac{1}{2}(m-1)x^{m-1}dx^2+\ldots)-x^m,$$

mais dx^2 et les termes suivants en dx sont infiniment petits par rapport à dx, car les puissances des fractions sont d'autant plus petites que l'exposant est plus grand. On néglige ces termes avec leurs facteurs et la différentielle de x^m se réduit dès lors à $mx^{m-1}dx$, donc :

5° La différentielle de la puissance quelconque d'une variable est égale au produit de deux facteurs (mx^{m-1}) et (dx) dont l'un est la différentielle de la variable et l'autre la puissance proposée de la variable dont l'exposant est diminué de l'unité, puissance que l'on multiplie par l'exposant primitif.

Nous ne parlerons pas ici de la différentiation des fonctions transcendantes et des fonctions composées qui nous entraînerait trop loin.

II

CALCUL INTÉGRAL.

562. Le calcul intégral a pour but de remonter des quantités différentielles aux quantités finies dans lesquelles les différentielles ont été introduites.

$ydx+xdy$ étant la différentielle de xy, la valeur xy est l'*intégrale* de $ydx+xdy$, ce que l'on note de la façon suivante $\int ydx+xdy=xy$. Le signe $\int$ représente l'initiale du mot *somme* parce que Leibnitz, inventeur du calcul différentiel, appelait l'intégrale la somme des quantités différentielles.

Il résulte de là que l'équation $\int ydx+xdy=xy$ n'est vraie qu'à la condition d'ajouter au second membre une quantité C qu'il reste à déterminer. La notation n'est donc complète que sous la forme

$$\int ydx+xdy=xy+C$$

de même $\int mx^{m-1}dx=x^m+C$.

Les règles de l'intégration sont inverses de celles de la différentiation; il est donc inutile de la reproduire ici.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES.

Nous ne faisons qu'indiquer ici les éléments des calculs de l'algèbre supérieure, car on ne peut enseigner ces calculs et en démontrer l'utilité que par de nombreux exemples.

La méthode qui préside au calcul infinitésimal substitue aux variations véritables que l'on fait subir aux quantités, des valeurs supposées qui n'entraînent pas d'erreur capable de modifier les résultats. On ne doit jamais oublier que les différentielles doivent être de même nature que leur intégrale, et réciproquement.

NOTE

SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS.

563. La probabilité d'un événement est, en général, une hypothèse plus ou moins vague et qui semble échapper à tout calcul. Cependant, quand on a des nombres en vue, elle peut être l'objet d'un problème mathématique. Dans ce cas la probabilité s'exprime par une fraction dont le dénominateur se compose de toutes les chances favorables ou contraires, et dont le numérateur est le nombre des chances favorables ou celui des chances contraires, suivant que l'on cherche à établir le degré de probabilité ou d'improbabilité de l'événement.

Une urne contient 35 boules, 14 blanches et 21 noires, s'il s'agit d'y prendre une boule quelconque, le total des chances est 35; le nombre des chances d'amener une boule blanche est évidemment $\frac{14}{35}$ ou $\frac{2}{5}$; celui des chances d'amener une boule noire $\frac{21}{35}=\frac{3}{5}$. Il y a 3 à parier contre 2 que l'on tirera une boule noire, 2 à parier contre 3 que l'on amènera une boule blanche.

564. En général, soit m le nombre des conditions favorables, n le nombre des conditions contraires, la fraction $\frac{m}{m+n}$ donne le degré de probabilité des conditions favorables, $\frac{n}{m+n}$ le degré de probabilité des conditions contraires. En n'examinant que le nombre des conditions favorables, on voit que si l'on fait $m=0$, il n'y a pas de conditions favorables, et il y a certitude négative, c'est à dire *impossibilité*. Si la fraction croît de zéro à $\frac{1}{2}$, tant que l'on aura $\frac{n}{m+n} > \frac{1}{2}$, le nombre des conditions favorables est moindre que celui des conditions contraires, et il y a *défiance;* quand la fraction est égale à $\frac{1}{2}$, le nombre des conditions favorables est égal à celui des conditions contraires, et il y a *incertitude;* quand la fraction est $> \frac{1}{2}$, le nombre des conditions favorables l'emporte sur celui des conditions contraires, et il y a *chance;* enfin, plus la fonction s'approche de $\frac{2}{2}=1$, plus on approche de la *certitude*. Il y a certitude quand la fraction est $\frac{2}{2}=1$, c'est à dire est égale à l'unité.

On voit par là, très-clairement, que tous les degrés de probabilité sont compris entre 0 et 1, c'est à dire s'expriment par une fraction.

565. La probabilité à résoudre peut présenter 3 ou plusieurs conditions au

lieu de deux. Une urne peut contenir 3 boules blanches, 5 boules rouges, 12 boules noires, total $3+5+10=18$ boules. Le degré de probabilité, pour amener boule blanche sera $\frac{3}{18}$, pour une boule rouge $\frac{5}{18}$, pour une boule noire $\frac{10}{18}$.

Appelons $m+n+p+\ldots$ les conditions diverses du problème, la chance d'obtenir m es $\frac{m}{m+n+p\ldots}$, celle d'obtenir n est $\frac{n}{m+n+p\ldots}$, etc.

566. La probabilité à résoudre ne se borne pas à une seule espèce de conditions; elle peut dépendre du concours de deux espèces de conditions. On veut savoir quel est le degré de probabilité d'amener 5 et as avec deux dés à jouer. Il y a 2 chances sur 6 pour que l'un des dés amène le nombre 5 ou as; pour ce premier dé, le degré de probabilité est $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, mais l'un des résultats 5 ou as étant obtenu, l'autre dé ne peut amener, pour satisfaire à la donnée, qu'un seul nombre, as ou 5, et le degré de probabilité pour le second dé, considéré à part, est $\frac{1}{6}$. Mais, quand on les considère simultanément, les chances deviennent moins nombreuses, car pour chaque condition fournie par le 1er dé, le 2e dé ne laisse que $\frac{1}{6}$ de chance. La chance du 1er dé étant $\frac{1}{3}$, la chance pour que le second dé amène le nombre voulu est $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{3}$, soit $\frac{1}{18}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}$.

On conclut de là, que, quand on attend le concours de deux ou plusieurs chances indépendantes l'une de l'autre, le degré de probabilité total est le produit de tous les degrés de probabilité partiels.

Ainsi un joueur qui posséderait 36 fr. et voudrait risquer, sur un coup de dés semblable à celui-ci, une partie de son avoir proportionnelle à la chance de gagner, ne devrait risquer que le $\frac{1}{18}$ de cet avoir, soit $\frac{36}{18}=2$, c'est à dire 2 fr.

Il est facile de constater que plus les probabilités se composent, plus les chances diminuent, puisqu'elles sont les produits de fractions de plus en plus nombreuses.

567. Examinons maintenant le cas des retours successifs, la possibilité d'amener deux, trois fois la même face d'un dé, par exemple. Pour la première fois la probabilité est $\frac{1}{6}$; la probabilité de l'amener une seconde fois est encore $\frac{1}{6}$; la probabilité que cette face se présente deux fois de suite est $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{6}$; soit $\frac{1}{36}=\frac{1}{6^2}$. On verrait de même que la probabilité d'amener la même face 3, 4, ... m fois de suite sera $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \ldots \left(\frac{1}{6}\right)^m$.

La probabilité de ne pas obtenir la même face en deux coups serait par la même raison $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$. Il semble au premier abord qu'en ajoutant la probabilité du succès $\frac{1}{36}$ à celle des insuccès $\frac{25}{36}$, on obtiendrait le total de tous

les cas qui devrait être $\frac{36}{36}$, mais on n'a que $\frac{26}{36}$. En recherchant la cause de cette anomalie, on constate que dans les cas contraires on n'a pas compris celui où 6 arriverait au premier jet seulement et celui où 6 arriverait au second jet seulement; pour chacun de ces cas isolés il y a $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$, soit $\frac{5}{36}$ de probabilité et pour les deux $\frac{10}{36}$ qu'il faut ajouter à $\frac{26}{36}$ pour obtenir tous les cas.

Si nous désignons par a la probabilité de l'apparition de la face proposée, par b celle d'une autre face quelconque, la somme de tous les cas sera :

1° Pour le cas où la face viendra deux fois de suite, $a \times a = a^2$;

2° Pour le cas où elle n'apparaîtra pas du tout $b \times b = b^2$;

3° Pour le cas où elle n'apparaîtra qu'une fois, soit au premier, soit au second coup, $2 \times (b \times a) = 2ab$.

Le total des cas sera donc $a^2 + 2ab + b^2$, formule du carré d'une somme composé de deux parties.

Pour trois coups ou retours successifs on trouvera le cube de cette même somme $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Et pour m coups la formule générale de $(a+b)^m$.

568. Jusqu'ici nous avons supposé que l'on connaît toutes les conditions du problème. Mais qu'un joueur, par exemple, jetant un certain dé d'une certaine manière, au lieu d'obtenir une face une fois sur 6 en moyenne, l'obtienne 5 fois sur 6, il ne faudra pas, pour cela, admettre que tout calcul soit dérouté. Ici les causes des conditions sont inconnues, mais les conditions des retours n'en persistent pas moins si le joueur obtient le résultat cherché 50 fois sur 60, ou 500 fois sur 600. On substituera dès lors les résultats aux causes.

Ainsi, quand l'expérience aura depuis longtemps démontré qu'un événement se produit m fois tous les n ans, on pourra déterminer la probabilité des retours de cet événement, quelque cachées d'ailleurs ou compliquées qu'en soient les causes. C'est ainsi qu'à l'aide des statistiques on établit la proportion des naissances à celle des morts, celle des individus du sexe masculin aux individus du sexo féminin, etc. On fait ainsi jouer un grand rôle au calcul dans les sciences sociales.

579. Nous terminerons par cette remarque importante, car aucune science n'est étrangère aux autres. L'Arithmologie trouve des applications dans toutes les connaissances impersonnelles; elle figure dans les connaissances personnelles comme une des conditions de la *méthode;* enfin, nous la voyons apparaître dans la partie *économique* des connaissances sociales.

Ce que nous venons d'exposer de l'arithmologie permet d'aborder l'étude des connaissances impersonnelles au point de vue des calculs qu'elles comportent. Nous avons jugé inutile de nous étendre ici sur les détails des applications qui trouvent naturellement leur place dans les autres sciences, et tout particulièrement dans la géométrie et dans la mécanique.



ERRATA.

INTRODUCTION A L'ARITHMOLOGIE, page 111, 9e ligne, *au lieu de:* dans ce premier volume; *lisez:* dans ce volume.

Page 305, § **13**, ligne terminée par le renvoi (*), *au lieu de:* $\sqrt{81} = 3$; *lisez:* $\sqrt[4]{81} = 3$.

Page 444, avant-dernière ligne, *au lieu de:* en fraction de trois des autres; *lisez:* en fonction de trois des autres.

Page 445, colonne horizontale affectée d'un astérisque (*), deuxième formule, *au lieu de:* $n = 1 + \frac{\log. l - la}{\log. q}$; *lisez:* $n = 1 + \frac{\log. l - \log. a}{\log. q}$.

Page 453, 3e ligne du § **436**, *au lieu de:* d'après les formules (A) et (B) § ( ); *lisez:* d'après les formules (A) et (B) § (**434**).

Page 490, 3e ligne, *au lieu de:* la valeur de n est successivement...; *lisez:* la valeur de $\frac{k}{n}$ est...

1096. — Paris. — Imprimerie de H. CARION, rue Bonaparte, 64.

